VI ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1
1966

О РАВНОМЕРНОМ ПОИСКЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

Э. ГЯЧЯУСКАС

В работе вычисляются вероятности обнаружения объекта-овалоида, расположенного в некотором шаре, при равномерном поиске отрезком и шаром, а также – математическое ожидание объема обнаруженной части объекта.

Овалоидом называется выпуклое тело в трехмерном пространстве, ограниченное квадрируемой поверхностью.

Теорема 1. Пусть в шаре W радиуса R расположен объект T_0. В шаре W случайным образом помещается прямолинейный отрезок K длины L. Предполагается, что все направления отрезка и все положения его центра, при которых отрезок целиком помещается в шаре W, одинаково возможны. Если объект T_0 есть овалоид объема V_0, площади поверхности S_0 и располагается внутри шара, концентрического W, радиуса $R-L$, тогда вероятность P_1 обнаружения, т. е., вероятность того что отрезок пересечет объект, равна

$$P_1=\frac{3\,(LS_0-4V_0)}{\pi\,(16R^3-12R^2L+L^3)}\,. \tag{1}$$

Доказательство. Вероятность P_1 определим следующим образом:

$$P_1=\frac{m_2}{m_1}\,, \tag{2}$$

где m_2 есть кинематическая мера множества всех ориентированных отрезков длины L, имеющих общую точку с овалоидом объема V_0, площади поверхности S_0; m_1 – кинематическая мера множества всех ориентированных отрезков длины L, содержащихся внутри шара радиуса R.

Эти меры определим в следующих леммах.

Лемма 1. Кинематическая мера m_2 множества всех ориентированных отрезков длины L, имеющих общую точку с овалоидом T_0 объема V_0, площади поверхности S_0, равна

$$m_2=2\pi\,(\pi LS_0+4\pi V_0). \tag{3}$$

Доказательство. Известно, что кинематическая мера множества всех овалоидов T объема V, площади поверхности S, имеющих общую точку с овалоидом T_0 объема V_0, площади поверхности S_0 равна ([1], § 39)

$$2\pi\,(4\pi V_0+MS_0+M_0S+4\pi V), \tag{4}$$

где $M\,(M_0)$ – интеграл средней кривизны поверхности овалоида $T\,(T_0)$.

Интеграл средней кривизны поверхности $S(T)$ овалоида T равен ([2], стр. 19)

$$M=\frac{1}{2}\int\limits_{S(T)}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)ds+\frac{1}{2}\int\alpha dl,$$

где R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны поверхности $S(T)$ в какой-то точке, а ds — элемент площади поверхности в той же точке; α — угол при ребре поверхности, отвечающий элементу ребра dl, т. е. угол, который образуют внешние нормали поверхностных элементов, примыкающих к этому элементу ребра.

Пусть овалоид T есть цилиндр, высота которого — L, радиус основания — r. Тогда выражение (4) принимает вид

$$2\pi(4\pi V_0+MS_0+M_0 2\pi r(L+r)+4\pi^2 r^2 L), \tag{5}$$

где интеграл средней кривизны поверхности цилиндра равен

$$M=\pi L+\pi^2 r.$$

В пределе при $r\to 0$ из цилиндра получаем отрезок длины L. Таким образом, по формуле (5) имеем, что мера отрезков, имеющих общую точку с овалоидом T_0, равна

$$m_2=2\pi(\pi LS_0+4\pi V_0).$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Кинематическая мера m_1 множества всех ориентированных отрезков длины L, содержащихся внутри шара радиуса R, равна

$$m_1=\frac{2\pi^3}{3}(16R^3-12R^2L+L^3). \tag{6}$$

Доказательство. Искомую меру представляет выражение ([3], стр. 152)

$$m_1=\int\limits_{K\subset W}\sin\Theta\,dx\,dy\,dz\,d\varphi\,d\psi\,d\Theta,$$

где x, y, z — координаты центра отрезка K длины L, φ, ψ, Θ — эйлеровы углы направления отрезка, W — шар радиуса R.

Пусть отрезок перемещается внутри шара так, что при $\varphi=c_1$, $\psi=c_2$, $\Theta=c_3$ ($c_i=\mathrm{const}$, $i=1, 2, 3$) отрезок скользит по сфере. При этом центр отрезка опишет поверхность некоторого овалоида. Обозначим его объем через V_L. Тогда искомая мера принимает вид —

$$m_1=8\pi^2 V_L,$$

так как при любых фиксированных значениях углов φ, ψ, Θ значение V_L есть то же самое, ибо описываются одинаковые овалоиды.

Определим объем V_L

$$V_L=2V_{\text{сегм}},$$

где $V_{\text{сегм}}$ — объем сегмента высоты $R-L/2$ шара радиуса R,

$$V_{\text{сегм}}=\pi\left(\frac{2}{3}R^3-\frac{1}{2}R^2L+\frac{1}{24}L^3\right).$$

Следовательно, мера m_1 равна

$$m_1=\frac{2\pi^2}{3}\,(16\,R^3-12\,R^2L+L^3).$$

Лемма доказана.

Закончим доказательство теоремы. Подставив выражения (3) и (6) в (2), получаем

$$P_1=\frac{3\,(LS_0+4V_0)}{\pi\,(16\,R^3-12\,R^2\,L+L^3)}\,.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть в шаре W радиуса R расположен объект T_0. В шаре W случайным образом помещается шар T радиуса r. Предполагается, что все положения центра шара T, при которых шар T целиком помещается в шаре W, одинаково возможны. Если объект есть овалоид объема V_0, площади поверхности S_0 и располагается в шаре, концентрическом W, радиуса $R-2r$, то вероятность обнаружения объекта, т. е., вероятность того, что шар T будет иметь общую точку с объектом T_0, равна

$$P_2=\frac{3\left(V_0+S_0r+M_0r^2+\frac{4}{3}\,\pi r^3\right)}{4\pi\,(R-r)^3}\,. \tag{7}$$

Доказательство. Вероятность P_2 определим следующим образом:

$$P_2=\frac{m_4}{m_3}\,, \tag{8}$$

где m_4 — кинематическая мера множества всех возможных положений шара радиуса r, при которых он имеет общую точку с фиксированным овалоидом объема V_0, площади поверхности S_0, равная

$$m_4=8\pi^2\left(V_0+S_0r+M_0r^2+\frac{4}{3}\,\pi r^3\right). \tag{9}$$

Это выражение есть частный случай формулы (4).

m_3 — кинематическая мера множества всех возможных положений шара T, при которых он целиком содержится внутри шара радиуса R. Меру m_3 представляет выражение ([3], стр. 152)

$$m_3=\int\limits_{T\subset W}\sin\Theta\,dx\,dy\,dz\,d\varphi\,d\psi\,d\Theta,$$

где x, y, z — координаты центра шара T, φ, ψ, Θ — эйлеровы углы фиксированного направления шара T, W — шар радиуса R.

Отсюда получаем, что

$$m_3=\frac{32\,\pi^2}{3}\,(R-r)^3. \tag{10}$$

Подставив (9) и (10) в (8), получаем утверждение теоремы 2.

Теорема 3. Пусть U — объем области $T\cdot T_0$, т. е., объем обнаруженной части объекта T_0 объема V_0, площади поверхности S_0, при равномерном поиске фиксированного объекта-овалоида овалоидом T объема V, площади поверхности S; $E(U)$ — математическое ожидание величины U. Тогда

$$E(U)=\frac{4\pi\,V\,V_0}{4\pi\,V_0+M\,S_0+M_0\,S+4\pi\,V}\,, \tag{11}$$

где $M\,(M_0)$ — интеграл средней кривизны поверхности овалоида $T\;(T_0)$.

Доказательство. Интегрально-геометрическим способом определяем, что

$$E(U) = \frac{m_5}{m_6} = \frac{\int\limits_{T \cdot T_0 \neq 0} V\,dK}{\int\limits_{T \cdot T_0 \neq 0} dK},$$

где мера m_6 равна ([1], § 39)

$$m_6 = 2\pi (4\pi V_0 + MS_0 + M_0 S + 4\pi V),$$

а мера m_5 ([1]) –

$$m_5 = 8\pi^2 V V_0.$$

Теорема доказана.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
28.V.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Blaschke, Vorlesungen über Integralgeometrie, Berlin, 1955.
2. Л. Фейеш-Тот, Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве, Москва, 1958.
3. Л. Сантало, Введение в интегральную геометрию, Москва, 1956.

APIE TOLYGIĄ PAIEŠKĄ ERDVĖJE

E. GEČIAUSKAS

(*Reziumė*)

Sakykime, rutulyje su spinduliu R randasi ovaloidas T_0. Apskaičiuojamos ovaloido T_0 aptikimo tikimybės atsitiktinai ieškant su atkarpos K ir rutulio T pagalba. Taip pat apskaičiuoamas aptiktos objekto-ovaloido dalies tūrio matematinis vidurkis atsitiktinai ieškant ovaloidu.

ON UNIFORM DETECTION IN SPACE

E. GEČIAUSKAS

(*Summary*)

Let W be a sphere of radius R containing a convex body T_0. Probabilities of intersections of T_0 with randomly chosen segment K and sphere T respectively are computed. Also mean value of common area of fixed convex body and randomly chosen convex body is finded.