# ОДНОЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА СО СЛУЧАЙНОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ПОТОКА И СКОРОСТЬЮ ОБСЛУЖИВАНИЯ

В. А. ИВНИЦКИЙ

## Введение

К настоящему времени теория однолинейных систем массового обслуживания с очередью является одним из наиболее разработанных направлений теории массового обслуживания. Многими авторами были рассмотрены разнообразные схемы обслуживания, встречающиеся в практике и представляющие теоретический интерес, и в этом направлении был получен целый ряд важных, далеко идущих результатов. Известно, что для пуассоновского потока и произвольного распределения длительности обслуживания общие результаты были получены А. Я. Хинчиным, в частности, для стационарного распределения длины очереди и времени ожидания [1], [2]. Аналогичные результаты по-другому были получены Поллачеком [3] и Такачем [4]. Стационарное распределение длины очереди имеет производящую функцию, которая определяется по известной формуле Поллачека—Хинчина. При этом интенсивность входящего потока и скорость обслуживания предполагалась постоянной. Однако во многих практически важных задачах, особенно в теории надежности, интенсивность входящего потока не является постоянной. В частности, она может зависеть от длины очереди. Например, интенсивность входящего потока для одного ремонтного канала, обслуживающего $n$ устройств, будет равна $\lambda(n-k)$, где $\lambda$ – интенсивность отказов одного устройства и $k$ – число отказавших устройств. В данном случае интенсивность входящего потока пропорциональна количеству исправных устройств. Однако существуют и более сложные зависимости $\Lambda$ входящего потока от $k$ – количества неисправных (или исправных) устройств. Например, при резервировании по мощности, напряжению, силе тока эти зависимости имеют вид:

$$\lambda_i=\lambda_H\left[\frac{1}{n-i}\right]^{m_1},\quad \lambda_i=\lambda_H\left[\frac{s}{n-i}\right]^{m_1}.$$

Они приведены в [8].

Процесс обслуживания можно интерпретировать как выполнение определенного количества работы $\eta$, поэтому естественно определяется скорость выполнения работы или скорость обслуживания, которая может меняться от состояния к состоянию обслуживающей системы.

Описанное таким образом обобщение классической задачи теории массового обслуживания вкладывается как частный случай в общую схему массового обслуживания, разработанную для целей аналитического исследования И. Н. Коваленко в [5], [6]. Разработанный им рекуррентный метод для исследования вероятностных характеристик общей схемы является эффективным алгоритмом для получения соответствующих формул для конкретных систем. В настоящей статье мы следуем общему методу исследования однолинейных систем, развитому в монографии Б. В. Гнеденко и И. Н. Коваленко [2]. Для получения нужных характеристик системы составляются дифференциальные уравнения, описывающие поведение процесса обслуживания, с последующим решением при помощи преобразования Лапласа—Стильтьеса.

## Постановка задачи

Имеется однолинейная система массового обслуживания с входящим потоком марковского типа, интенсивность которого в момент $t$ зависит от числа требований, находящихся в системе в этот момент времени. Обозначим интенсивность потока в момент, когда длина очереди равна $i$, через $\lambda_i$. Таким образом, интенсивность потока $\lambda(t)$ представляет ступенчатую функцию, скачки которой происходят в случайные моменты времени.

Скорость обслуживания зависит от длины очереди и равна $\alpha_i$, если длина очереди в этот момент равна $i$. Пусть работа по обслуживанию одного требования зависит от длины очереди в момент начала обслуживания этого требования и имеет распределение $H_i(x)$, если длина очереди равна $i$. (Требование, начинающееся обслуживаться в этот момент, имеет номер 1, то есть включается в длину очереди.) Обозначим через $\nu(t)$ длину очереди в момент $t$. Нужно найти точное стационарное распределение длины очереди, то есть

$$P_k=\lim_{t\to\infty} P\{\nu(t)=k\}.$$

## Составление дифференциальных уравнений

Обозначим через $\xi(t)$ — величину работы в момент $t$, которую необходимо еще выполнить для обслуживания требования, которое система обслуживает в этот момент, если такое имеется. Легко видеть, что векторный случайный процесс

$$\zeta(t)=\{\nu(t),\ \xi(t)\}$$

будет марковским. Обозначим его стационарное распределение

$$\varphi_0=P_0;\quad \varphi_k(x)=\lim_{t\to\infty} P\{\nu(t)=k,\ \xi(t)<x\},\qquad k\geqslant 1.$$

Введенные функции $\varphi_k(x)$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\lambda_0\varphi_0=\alpha_1\varphi_1'(0), \tag{1}$$

$$\alpha_1\varphi_1'(x)-\lambda_1\varphi_1(x)-\alpha_1\varphi_1'(0)+\alpha_2\varphi_2'(0)H_1(x)+\lambda_0\varphi_0 H_1(x)=0, \tag{2}$$

$$\alpha_i\varphi_i'(x)-\lambda_i\varphi_i(x)-\alpha_i\varphi_i'(0)+\alpha_{i+1}\varphi_{i+1}'(0)H_i(x)+\lambda_{i-1}\varphi_{i-1}(x)=0\qquad (i\geqslant 2). \tag{3}$$

Действительно, (1) доказывается следующим образом. Пусть $\nu(t+h)=0$. Тогда либо в момент времени $t$ $\nu(t)=0$ и при этом за время от $t$ до $t+h$ ни одно требование не поступило, либо в момент $t$ в системе находилось одно требование, которое за интервал времени длины $h$ должно покинуть систему $[\nu(t)=1,\ \xi(t)<\alpha_1 h]$. Остальные события имеют вероятность порядка малости более высокого, чем $h$. Формула полной вероятности дает:

$$\varphi_0=(1-\lambda_0 h)\,\varphi_0+\varphi_1(\alpha_1 h)+o(h),$$

или

$$\lambda_0\varphi_0=\frac{\varphi_1(\alpha_1 h)\,\alpha_1}{\alpha_1 h}+o(1).$$

Устремив $h$ к нулю, немедленно приходим к формуле (1). Одновременно получается существование производной $\varphi_1'(o)$.

Рассмотрим случай $i=1$. Если $\nu(t+h)=1$ и $\xi(t)<x$, то это означает (если пренебречь событиями с общей вероятностью более высокого порядка малости, чем $h$), что осуществилось одно из трех взаимноисключающихся событий:

1) за время от $t$ до $t+h$ не поступило ни одного требования, в момент $t$ в системе находилось одно требование, до конца обслуживания этого требования в момент $t$ осталось количество работы, меньшее $x+\alpha_1 h$, но большее $\alpha_1 h$ (иначе обслуживание этого требования закончилось бы до момента $t+h$);

2) в момент времени $t$ в системе находилось два требования, но для того из них, которое находилось на обслуживании, осталось выполнить не больше, чем $\alpha_2 h$, чтобы оно покинуло систему; для обслуживания требования, которое в момент $t$ находилось в состоянии ожидания, необходимо выполнить работу, меньшую $x+\alpha_1(h+\Theta)$ ($\Theta$ обозначает время с момента $t$ до ухода вышеуказанного требования);

3) в момент времени $t$ в системе не было требований, в интервале $(t, t+h)$ поступило требование, для обслуживания которого нужно выполнить работу, меньшую чем $x+\alpha_1(h-\Theta_1)$ ($\Theta_1$ обозначает время с момента $t$ до момента поступления указанного требования).

Если $x$ – точка, в которой $H_1(x)$ дифференцируема, то

$$H_1\Big(x+\alpha_1(h-\Theta)\Big)=H_1(x)+O(h),$$
$$H_1\Big(x+\alpha_1(h-\Theta_1)\Big)=H_1(x)+O(h).$$

По формуле полной вероятности

$$\varphi_1(x)=(1-\lambda_1 h)\,[\varphi_1(x+\alpha_1 h)-\varphi_1(\alpha_1 h)]+\varphi_2(\alpha_2 h)\,H_1(x)+\lambda_0 hH_1(x)+o(h),$$

или

$$\frac{\varphi_1(x+\alpha_1 h)-\varphi_1(x)}{h}-\lambda_1\varphi_1(x+\alpha_1 h)-\frac{\varphi_1(\alpha_1 h)}{h}+\frac{\varphi_2(\alpha_2 h)}{h}\,H_1(x)+\lambda_0\varphi_0 H_1(x)=o(h).$$

Совершенно также, как в [2], доказывается возможность перехода к пределу при $h\to 0$ и мы приходим к (2). Аналогично доказываются соотношения (3) при $i\geqslant 2$. Таким образом, дифференциальные уравнения доказаны.

## Решение системы

Устремив в (1), (2) (3) $x\to\infty$, получаем

$$\left.\begin{aligned}&\lambda_0\varphi_0=\alpha_1\varphi_1'(0),\\&-\lambda_1\varphi_1(\infty)-\alpha_1\varphi_1'(0)+\alpha_2\varphi_2'(0)+\lambda_0\varphi_0=0,\\&-\lambda_1\varphi_i(\infty)-\alpha_i\varphi_i'(0)+\alpha_{i+1}\varphi_{i+1}'(0)+\lambda_{i-1}\varphi_{i-1}(\infty)=0.\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

Складывая первое уравнение со вторым, получившееся в результате второе уравнение с третьим, и так далее, находим, что $\alpha_i \varphi_i'(0)=\lambda_{i-1}\varphi_{i-1}(\infty)$. Очевидно, что $\varphi_i(\infty)=P_i$. Поэтому

$$\alpha_i \varphi_i'(0)=\lambda_{i-1}P_{i-1}.$$

Введем преобразования Лапласа – Стильтьеса

$$\tilde{\varphi}_i(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\varphi_i(x)\,dx, \quad \tilde{h}_i(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,dH_i(x).$$

Справедлива следующая теорема:

**Теорема 1.** *Для $P_i$ и $\tilde{\varphi}_i(s)$ имеют место рекуррентные соотношения:*

$$P_i=\frac{\lambda_{i-1}\left[P_{i-1}-\frac{\lambda_i}{\alpha_i}\,\tilde{\varphi}_{i-1}\left(\frac{\lambda_i}{\alpha_i}\right)\right]}{\lambda_i\tilde{h}_i\left(\frac{\lambda_i}{\alpha_i}\right)}, \tag{5}$$

$$\tilde{\varphi}_i(s)=\frac{1}{s(\alpha_i s-\lambda_i)}\left[\lambda_{i-1}P_{i-1}-\lambda_i P_i\tilde{h}_i(s)-\lambda_{i-1}s\tilde{\varphi}_{i-1}(s)\right], \tag{6}$$

*где*

$$P_1=\frac{\lambda_0P_0\left(1-\tilde{h}_1\left(\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\right)\right)}{\lambda_1\tilde{h}_1\left(\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\right)}, \quad \tilde{\varphi}_1(s)=\frac{\lambda_0P_0\left[\tilde{h}_1\left(\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\right)-\tilde{h}_1(s)\right]}{s(\alpha_1 s-\lambda_1)\,\tilde{h}_1\left(\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\right)}. \tag{7}$$

Доказательство. Для $i\geqslant 2$ при помощи преобразования Лапласа – Стильтьеса уравнение (3) преобразуется к виду

$$(\alpha_i s-\lambda_i)\,\tilde{\varphi}_i(s)=\frac{1}{s}\left[\alpha_i\varphi_i'(0)-\alpha_{i+1}\varphi_{i+1}'(0)\,\tilde{h}_i(s)-\lambda_{i-1}s\tilde{\varphi}_{i-1}(s)\right]=$$

$$=\frac{1}{s}\left[\lambda_{i-1}P_{i-1}-\lambda_iP_i\tilde{h}_i(s)-\lambda_{i-1}(s)\,\varphi_{i-1}(s)\right]. \tag{8}$$

В левой части стоит произведение $\alpha_i s-\lambda_i$ на функцию, аналитическую в правой полуплоскости, то есть, при $\mathrm{Re}\,\{s\}>0$. Следовательно, при $s=\frac{\lambda_i}{\alpha_i}$ левая часть обращается в нуль. Записав условие равенства нулю для правой части этого равенства, будем иметь:

$$\lambda_{i-1}P_{i-1}-\lambda_iP_i\tilde{h}_i\left(\frac{\lambda_i}{\alpha_i}\right)-\lambda_{i-1}\frac{\lambda_i}{\alpha_i}\,\tilde{\varphi}_{i-1}\left(\frac{\lambda_i}{\alpha_i}\right)=0$$

или

$$P_1=\frac{\lambda_{i-1}\left[P_{i-1}-\frac{\lambda_i}{\alpha_i}\,\tilde{\varphi}_{i-1}\left(\frac{\lambda_i}{\alpha_i}\right)\right]}{\lambda_i\tilde{h}_i\left(\frac{\lambda_i}{\alpha_i}\right)}; \qquad i\geqslant z.$$

Подставляя значение $P_i$ в равенство (8), определяем $\tilde{\varphi}_i(s)$:

$$\tilde{\varphi}_i(s)=\frac{1}{s(\alpha_i s-\lambda_i)}\left[\lambda_{i-1}P_{i-1}-\lambda_iP_i\tilde{h}_i(s)-\lambda_{i-1}s\tilde{\varphi}_{i-1}(s)\right]=$$

$$=\frac{\lambda_{i-1}}{s(\alpha_i s-\lambda_i)}\left[P_{i-1}\left(1-\frac{h_i(s)}{h_i\left(\frac{\lambda_i}{\alpha_i}\right)}\right)\frac{\lambda_i h_i(s)}{\alpha_i\tilde{h}_i\left(\frac{\lambda_i}{\alpha_i}\right)}\,\tilde{\varphi}_{i-1}\left(\frac{\lambda_i}{\alpha_i}\right)-s\tilde{\varphi}_{i-1}(s)\right].$$

Для $i=1$

$$(\alpha_1 s-\lambda_1)\,\tilde{\varphi}_1(s)=\frac{1}{s}\left[\alpha_1\varphi_1'(0)-\alpha_2\varphi_2'(0)\,\tilde{h}_1(s)-\lambda_0\varphi_0\tilde{h}_1(s)\right]=$$

$$=\frac{1}{s}\left[\lambda_0\varphi_0\left(1-\tilde{h}_1(s)\right)-\lambda_1P_1\tilde{h}_1(s)\right].$$

Отсюда

$$P_1=\frac{\lambda_0\varphi_0\left(1-\tilde{h}_1\left(\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\right)\right)}{\lambda_1\tilde{h}_1\left(\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\right)},\quad \tilde{\varphi}_1(s)=\frac{\lambda_0\varphi_0\left[\tilde{h}_1\left(\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\right)-\tilde{h}_1(s)\right]}{s(\alpha_1 s-\lambda_1)\tilde{h}_1\left(\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\right)}.$$

Следовательно, по рекуррентным формулам (5), (6) можно последовательно определять $P_i$ и $\tilde{\varphi}_i(s)$. Например,

$$P_2=\frac{\lambda_1\lambda_0 P_0}{\lambda_2\tilde{h}_2\left(\frac{\lambda_2}{\alpha_2}\right)\tilde{h}_1\left(\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\right)}\cdot\left[\frac{1-\tilde{h}_1\left(\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\right)}{\lambda_1}-\frac{\tilde{h}_1\left(\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\right)-\tilde{h}_1\left(\frac{\lambda_2}{\alpha_2}\right)}{\frac{\alpha_1\lambda_2}{\alpha_2}-\lambda_1}\right].\tag{9}$$

Все $P_i$ и $\tilde{\varphi}_i(s)$ будут иметь сомножителем $\varphi_0=P_0$, который определяется из условия $\sum_{i=0}^{\infty}P_i=1$. Таким образом, теорема 1 доказана.

Следует отметить, что $P_i$ и $\tilde{\varphi}_i(s)$ являются рациональными суперпозициями выражений вида $\int_0^{\infty}e^{-sx}dH_i(x)$ и $\int_0^{\infty}e^{-\frac{\lambda_i}{\alpha_i}x}dH_i(x)$ в полном соответствии с общей теоремой И. Н. Коваленко об аналитическом виде стационарных распределений вероятностей состояний однолинейных систем [5].

С помощью теоремы 1 можно в некоторых случаях получать производящие функции для распределения длины очереди. Например, выведем формулу Поллячека—Хинчина. В этом случае $\alpha_i=1$ $(i>0)$, $\lambda_0=\lambda_1=\ldots=\lambda_i=\ldots=\lambda$. (Величина работы численно равна времеми обслуживания.) (5) примет вид

$$\left.\begin{aligned}P_i\tilde{h}(\lambda)&=P_{i-1}-\lambda\tilde{\varphi}_{i-1}(\lambda)\\ P_1\tilde{h}(\lambda)&=P_0\left(1-\tilde{h}(\lambda)\right)\end{aligned}\right\}.\tag{10}$$

Введем производящую функцию

$$\Psi(z)=\sum_{i=0}^{\infty}P_i z^i.$$

Тогда из (10) получается уравнение для производящей функции

$$\tilde{h}(\lambda)\Psi(z)=z\Psi(z)-\lambda z\tilde{a}(z,\lambda)+P_0\tilde{h}(\lambda)(1-z)+P_0 z,$$

где

$$\tilde{a}(z,s)=\int_0^{\infty}e^{-sx}\sum_{i=0}^{\infty}\varphi_i(x)z^i\,dx=$$

$$=\frac{\lambda P_0(1-z)}{\left(s-\lambda(1-z)\right)s}\left\{\frac{z\tilde{h}\left(\lambda(1-z)\right)}{\tilde{h}\left(\lambda(1-z)\right)-z}\left[1-\frac{\tilde{h}(s)}{z}\right]-1+\tilde{h}(s)\right\}+P_0.\tag{11}$$

Отсюда

$$\Psi(z)=\frac{\lambda z\tilde{a}(z,\lambda)-P_0\tilde{h}(\lambda)(1-z)-P_0 z}{z-\tilde{h}(\lambda)}.\tag{12}$$

Подставляя (11) в (12), получаем

$$\Psi(z)=\frac{P_0(1-z)\tilde{h}\left(\lambda(1-z)\right)}{\tilde{h}\left(\lambda(1-z)\right)-z},\quad \text{где } P_0=1-\lambda\tau \text{ и } \tau=\int_0^{\infty}x\,dH(x).$$

В этом случае рекуррентные соотношения (5) и (6) выглядят следующим образом. Обозначим $s\bar{\varphi}_i(s)$ через $\bar{\Psi}_i(s, \lambda)$. Тогда

$$\Psi_i(s, \lambda)=\frac{\lambda}{s-\lambda}\left[P_{i-1}\left(1-\frac{\bar{h}(s)}{\bar{h}(\lambda)}\right)+\bar{\Psi}_{i-1}(\lambda, \lambda)\frac{\bar{h}(s)}{\bar{h}(\lambda)}-\bar{\Psi}_{i-1}(s, \lambda)\right],$$

$$P_i=\frac{P_{i-1}-\bar{\Psi}_{i-1}(\lambda, \lambda)}{\bar{h}(\lambda)},$$

$$\bar{\Psi}_i(\lambda, \lambda)=\lambda\left[\frac{\bar{h}'(\lambda)}{\bar{h}(\lambda)}\left(\bar{\Psi}_{i-1}(\lambda, \lambda)-P_{i-1}\right)-\frac{\partial\Psi_{i-1}(s, \lambda)}{\partial s}\bigg|_{s=\lambda}\right],$$

$$P_1=\frac{P_0\left(1-\bar{h}(\lambda)\right)}{\bar{h}(\lambda)}, \quad \bar{\Psi}_1(s, \lambda)=\frac{\lambda P_0\left(\bar{h}(\lambda)-\bar{h}(s)\right)}{(s-\lambda)\bar{h}(\lambda)}, \quad \bar{\Psi}_1(\lambda, \lambda)=-\frac{\lambda P_0\bar{h}'(\lambda)}{\bar{h}(\lambda)}.$$

Заметим, что, если обозначить $s\bar{\varphi}_i(s)$ через $\bar{\Psi}_i(s)$, то рекуррентные соотношения будут несколько упрощены. Именно,

$$P_i=\frac{\lambda_{i-1}\left[P_{i-1}-\bar{\Psi}_{i-1}\left(\frac{\lambda_i}{\alpha_i}\right)\right]}{\lambda_i\bar{h}_i\left(\frac{\lambda_i}{\alpha_i}\right)},$$

$$\bar{\Psi}_i(s)=\frac{1}{\alpha_i s-\lambda_i}\left[\lambda_{i-1}P_{i-1}-\lambda_i P_i\bar{h}_i(s)-\lambda_{i-1}\bar{\Psi}_{i-1}(s)\right],$$

где

$$P_1=\frac{\lambda_0 P_0\left(1-\bar{h}_1\left(\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\right)\right)}{\lambda_1\bar{h}_1\left(\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\right)}, \quad \bar{\Psi}_1(s)=\frac{\lambda_0 P_0\left[\bar{h}_1\left(\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\right)-\bar{h}(s)\right]}{(\alpha_1 s-\lambda_1)\bar{h}_1\left(\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\right)}.$$

Введение более общего предположения о том, что распределение работы по обслуживанию требования зависит от длины очереди в момент, когда это требование начинает обслуживаться, может быть несколько искусственно, но оно позволяет рассмотреть в виде частных случаев схемы, имеющие реальное применение. В первом случае, если скорость обслуживания зависит от состояния и меняется от состояния к состоянию, достаточно положить $H_1(x)=\cdots=H_i(x)=\cdots=H(x)$.

Возможен и второй случай, когда скорость обслуживания во время обслуживания требования остается постоянной. Но это все равно, что скорость обслуживания вообще постоянная и равна, скажем, 1, а время обслуживания (в данном случае оно имеет непосредственный смысл) зависит от длины очереди в начале обслуживания. Тогда можно считать, что $H_i(x)$ — это распределение времени обслуживания, если в начале обслуживания длина очереди была равна $i$, и $\alpha_i=1$ (в этом случае величина работы и величина времени обслуживания численно одинаковы).

Равенству $P_0=1-\lambda\tau$ для случая $\lambda_i=\lambda$ и $\alpha_i=1$ при всех $i$ соответствует несколько более сложное равенство. Имеет место

**Теорема 2.** *Для однолинейной системы массового обслуживания с очередью с интенсивностью входящего потока и скоростью обслуживания, зависящими от длины очереди, справедливо равенство*

$$P_0\lambda_0\tau_1=\sum_{i=1}^{\infty}P_i(\alpha_i-\lambda_i\tau_i). \tag{13}$$

Доказательство. Складывая уравнения (1), (2) и (3), получаем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_i'(x) = \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i \varphi_i'(0) \left(1 - H_{i-1}(x)\right) + \alpha_1 \varphi_i'(0) \left(1 - H_1(x)\right).$$

Интегрируя это равенство в пределах от 0 до $\infty$, имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i P_i = \sum_{i=2}^{\infty} \lambda_{i-1} P_{i-1} \tau_{i-1} + \lambda_0 P_0 \tau_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i \tau_i + P_0 \lambda_0 \tau_1$$

или

$$P_0 \lambda_0 \tau_1 = \sum_{i=1}^{\infty} P_i (\alpha_i - \lambda_i \tau_i).$$

Если $\lambda_i > 0$ для $i = 0, 1, \ldots, j-1$ и $\lambda_j = 0$ (длина очереди не превосходит $j$, т. е. имеется конечное число состояний), определить $P_j$, пользуясь рекуррентным соотношением (5), нельзя. В этом случае $P_j$ определяется из (13) $\left(\text{т. е. нужно выразить } P_j \text{ через } P_0, \text{ а } P_0 \text{ определится из условия } \sum_{i=0}^{j} P_i = 1\right)$. В этом случае эргодическое распределение существует всегда. Вопрос о существовании стационарного эргодического распределения возникает тогда, когда $\lambda_i > 0$ для всех $i$. Ответ на него дает следующая теорема

**Теорема 3.** *Для существования стационарного эргодического распределения длины очереди однолинейной системы массового обслуживания с очередью достаточно, чтобы выполнялись два условия:*

1) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \infty$,

2) $P_0 > 0$.

Доказательство. Для процесса $\nu(t)$ существует три возможности:

а) $\nu(t)$ уходит в бесконечность за конечное время;

б) $\nu(t)$ уходит в бесконечность при $t \to \infty$;

в) $\nu(t)$ остается конечным на всей полуоси $t > 0$, т. е. существует собственное стационарное эргодическое распределение.

Условия 1) и 2) обеспечивают осуществление третьей возможности. Действительно, условие 1) представляет собой известное условие Феллера того, чтобы процесс чистого размножения не уходил в бесконечность за конечное время. Обозначим процесс чистого размножения через $\mu(t)$. Легко видеть, что $\nu(t) \leqslant \mu(t)$ стохастически, т. е. $F_{\nu(t)}(x) \geqslant F_{\mu(t)}(x)$. Отсюда при выполнении условия 1) процесс $\nu(t)$ не уходит в бесконечность за конечное время. Легко видеть, что, если $P_0 = 0$, то процесс $\nu(t)$ уходит в бесконечность на бесконечности. Справедливо и обратное утверждение: если процесс $\nu(t)$ уходит в бесконечность на бесконечности, то $P_0 = 0$. Отсюда, если выполняются условия 1), 2), то осуществляется третья возможность, т. е. существует собственное стационарное эргодическое распределение. Теорема доказана.

$P_i$ представляются в виде:

$$P_i = P_0 \cdot \hat{P}_i, \quad \hat{P}_0 = 1.$$

Так как $\sum\limits_{i=0}^{\infty} P_i=1$, то для $P_0$ получается выражение

$$P_0=\frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{\infty}\hat{P}_i}. \tag{15}$$

Таким образом, в силу (15) для существования эргодического распределения вероятностей состояний нашей системы при условии $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}=\infty$ достаточно сходимости ряда

$$\sum_{i=0}^{\infty}\hat{P}_i<\infty(0<\lambda_i<\infty,\ 0<\alpha_i\leqslant\infty). \tag{16}$$

Однако проверять ряд (16) на сходимость несколько сложно. Мы дадим простые достаточные условия сходимости этого ряда, выполняющиеся в большинстве практических приложений.

**Лемма.** *Для сходимости ряда* (16) *достаточно, чтобы нашлись такие числа* $c_0 n_0$, *что для всех* $i>n_0$, $\alpha_i-\lambda_i\tau_i\geqslant c_0>0$.

Доказательсво. Из теоремы 2 следует, что

$$\frac{\lambda_0\tau_1}{\sum\limits_{i=0}^{\infty}\hat{P}_i}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty}\hat{P}_i(\alpha_i-\lambda_i\tau_i)}{\sum\limits_{i=0}^{\infty}\hat{P}_i}.$$

Пусть нашлось такое конечное $n_0$, что для всех $i\geqslant n_0$ $\alpha_i-\lambda_i\tau_i\geqslant c_0>0$, где $c_0$ как угодно малое положительное число. Тогда

$$\frac{\lambda_0\tau_1}{\sum\limits_{i=0}^{\infty}\hat{P}_i}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty}P_i(\alpha_i-\lambda_i\tau_i)}{\sum\limits_{i=0}^{\infty}P_i}\geqslant\frac{\sum\limits_{i=1}^{n_0-1}\hat{P}_i(\alpha_i-\lambda_i\tau_i)+c_0\sum\limits_{i=n_0}^{\infty}\hat{P}_i}{\sum\limits_{i=0}^{n_0-1}\hat{P}_i+\sum\limits_{i=n_0}^{\infty}\hat{P}_i}.$$

Предположим, что при условиях леммы ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\hat{P}_i$ расходится. Отсюда следует, что $\sum\limits_{i=n_0}^{\infty}\hat{P}_i=\infty$ при любом конечном $n_0$. Тогда левая часть неравенства равна нулю, в то время как правая часть неравенства равна $c_0>0$. Получилось противоречие. Следовательно, в условиях леммы ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\hat{P}_i$ сходится.

Таким образом, суммируя вышесказанное, получаем следующие достаточные условия, приведенные ниже в виде следствия.

**Следствие.** Для существования собственного стационарного эргодического распределения длины очереди однолинейной системы массового обслуживания достаточно, чтобы выполнялись два условия:

1) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \infty$;

2) нашлись два таких числа $c_0$ и $n_0$, что для всех $i > n_0$ $\alpha_i - \lambda_i \tau_i \geqslant c_0 > 0$.

Рассмотрим пример применения полученных рекуррентных формул [7]. Пусть два одинаковых устройства с интенсивностью отказов каждого $\lambda$ восстанавливаются одним ремонтным каналом. Время восстановления является случайной величиной $\eta$ с законом распределения $H(x)$ и преобразованием Лапласа—Стильтьеса $\tilde{h}(s)$. Скорости восстановления $\alpha_1$ и $\alpha_2$. В нашем примере $\lambda_i = (2-i)\lambda$. Определим $P_0$, $P_1$ и $P_2$.

Имеем

$$P_0 + P_1 + P_2 = 1,$$

из (13)

$$\lambda_0 \tau P_0 = P_1 (\alpha_1 - \lambda_i \tau) + P_2 \alpha_2$$

и из (7)

$$P_1 \lambda_1 \tilde{h}\left(\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\right) = \lambda_0 P_0 \left(1 - \tilde{h}\left(\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\right)\right).$$

Решая эту систему уравнений, находим $P_0$, $P_1$ и $P_2$:

$$P_1 = \frac{\lambda_0 \left(1 - \tilde{h}\left(\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\right)\right)}{\lambda_1 \tilde{h}\left(\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\right)} P_0, \quad P_2 = \frac{1}{\alpha_2} \left[\lambda_0 \tau - \frac{(\alpha_1 - \lambda_1 \tau)\lambda_0 \left(1 - \tilde{h}\left(\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\right)\right)}{\lambda_1 \tilde{h}\left(\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\right)}\right] P_0,$$

$$P_0 = \left[1 + \frac{\lambda_0 \tau}{\alpha_2} + \frac{\lambda_0 \left(1 - \tilde{h}\left(\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\right)\right)}{\lambda_1 \tilde{h}\left(\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\right)} - \frac{(\alpha_1 - \lambda_1 \tau)\lambda_0 \left(1 - \tilde{h}\left(\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\right)\right)}{\alpha_2 \lambda_1 \tilde{h}\left(\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\right)}\right]^{-1}.$$

В случае $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\lambda_i = (2-i)\lambda$ имеем:

$$P_0 = \frac{\tilde{h}(\lambda)}{2\lambda\tau + \tilde{h}(\lambda)},$$

$$P_1 = \frac{2\left(1 - \tilde{h}(\lambda)\right)}{2\lambda\tau + \tilde{h}(\lambda)},$$

$$P_2 = \frac{2\tilde{h}(\lambda) - 2(1 - \lambda\tau)}{2\lambda\tau + \tilde{h}(\lambda)}.$$

Таким образом, для однолинейной системы массового обслуживания с очередью проведено исследование стационарного распределения длины очереди и для него получены несложные рекуррентные формулы, при этом также найдены простые достаточные условия существования собственного стационарного эргодического распределения.

В заключение автор выражает глубокую благодарность И. Н. Коваленко, под непосредственным руководством которого была выполнена эта работа.

Москва

Поступило в редакцию
10.IX.1965

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. Я. Хинчин, Работы по математической теории массового обслуживания, Физматгиз, 1963.
2. Б. В. Гнеденко и И. Н. Коваленко, Лекции по теории массового обслуживания, Киев, 1963.
3. F. Pollaczek, Über das Warterproblem, Math. Zeit., 38, 1934, 492–537.
4. L. Takács, Investigation of waiting-time problems, Acta Acad. Sci. Hung., 6, 1955, 101–129.
5. И. Н. Коваленко, Некоторые аналитические методы в теории массового обслуживания, сб. „Кибернетику—на службу коммунизму", вып. 2, 1964.
6. И. Н. Коваленко, Некоторые вопросы надежности сложных систем, сб. „Кибернетику—на службу коммунизму", вып. 2, 1964.
7. Ю. К. Беляев, Линейчатые марковские процессы и их приложение к задачам теории надежности, Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике, Вильнюс, 1961.
8. А. Л. Райкин, Автоматика и телемеханика, т. XXIV, N 4, 1963, 558–562.

## VIENTIESINĖ SISTEMA SU ATSITIKTINIAIS ĮEINANČIO SRAUTO INTENSYVUMU IR APTARNAVIMO GREIČIU

V. IVNICKIS

(*Reziumė*)

Straipsnyje nagrinėjama vientiesinė masinio aptarnavimo sistema, kurioje įeinančio srauto intensyvumas $\lambda_i$ ir aptarnavimo greitis $\alpha_i$ priklauso nuo eilės ilgio $i$.

Eilės $P_i$ ilgio stacionarinio pasiskirstymo atveju, jei toks pasiskirstymas egzistuoja, rastos nesudėtingos rekurentinės formulės. Be to, rastos paprastos pakankamos sąlygos, kad egzistuotų stacionarus ergodiškas pasiskirstymas.

## ONE-LINE RANDOM INPUT RATE AND SPEED SERVICE SYSTEM

V. IVNITSKI

(*Summary*)

One-line service system where input flow rate $\lambda_i$ and service speed $\alpha_i$ are dependent on queue lengthiis discussed. Simple recurrent formulae for stationary distribution for queue length $P_i$ (if it exists) are obtained. Simple sufficient conditions for existence of stationary ergodic distribution are found.