VI ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1966

РЕШЕТО А. СЕЛЬБЕРГА В АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЛОВЫХ ПОЛЯХ

Б. В. ЛЕВИН, М. И. ТУЛЯГАНОВА

В этой статье мы изучаем распределение почти простых идеалов алгебраического числового поля в полиномах над этим полем. Частный случай этой задачи для случая мнимого квадратического поля изучался ранее в работах [2] и [3]. В частности, в [3] было доказано, что всякое четное число мнимого квадратического поля представимо в виде суммы двух слагаемых, одно из которых разлагается в произведение не более двух, а другое не более трех простых идеалов. В работе [1] А. И. Виноградов доказал аналог этой теоремы для произвольного алгебраического числового поля.

В работе [1] используется метод, разработанный ранее А. И. Виноградовым в работе [4]. При этом в схеме его доказательства возникли дополнительные трудности, связанные с отсутствием столь полной информации о нулях дзета-функции Дедекинда, какая имеется о нулях дзета-функции Римана.

Использование метода работы [5] позволяет обойти эти трудности и получить оценки для случая произвольного полинома. Попутно мы получаем также новое простое доказательство асимптотической формулы Брауэра—А. Виноградова [6] для числа классов идеалов.

§ 1. Вспомогательные леммы

Пусть k — поле рациональных чисел $\varkappa$ — расширение k, K — расширение $\varkappa$ $(k\subset\varkappa\subset K)$. Через $N_{\varkappa|k}\,\mathfrak{p}$ обозначим норму идеала $\mathfrak{p}$ из $\varkappa$, а через $N_{K|k}\mathfrak{P}$ — норму идеала $\mathfrak{P}$ из K, через $N_{k|\varkappa}\,\mathfrak{P}$ — относительную норму $\mathfrak{P}$ из K.

Пусть, далее, $f(x)$ произвольный примитивный полином с коэффициентами из поля $\varkappa$, разлагающийся на r неприводимых над полем $\varkappa$ полиномов, $\omega(\mathfrak{p})$ число решений сравнения

$$f(x)\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{p}).$$

Пусть $\Theta_1, \ldots, \Theta_r$ — корни полиномов $f_1(x), \ldots, f_r(x)$, $K_\nu=\varkappa\,(\Theta_\nu)$ — расширение поля $\varkappa$.

$$\prod_{i=1}^{r} f_i(x)=f(x).$$

Тогда имеет место следующая

Лемма 1. Пусть $\Theta_1(x)=\sum_{N_{\varkappa|k}\mathfrak{p}\leq x}\omega(\mathfrak{p})\log N_{\varkappa|k}\ \mathfrak{p}$. Тогда для $x>x_0(D)$

$$\Theta_1(x)=rx+\sum_{\nu=1}^{r}E(d_\nu)\frac{x^{\rho_\nu}}{\rho_\nu}+o(xe^{-a\sqrt{\log x}}),\tag{1}$$

где $\mathfrak{p}$ пробегает простые идеалы поля K^ν, ρ_ν — зигелевский нуль дзета-функции Дедекинда $\zeta_{k_\nu}(s)$. d_ν — дискриминант поля K_ν.

Если дзета-функция Дедекинда $\zeta_{K_\nu}(s)$ не имеет зигелевского нуля или этот нуль удовлетворяет условию

$$\max_{\nu=\overline{1,r}}\rho_\nu<1-\frac{a}{\sqrt{\log x}}\ \left(\text{т. е. при } x>x_0e^{\left(\frac{a}{1-\rho_\nu}\right)^2}\right),$$

то

$$\Theta_1(x)=rx+0(xe^{-a\sqrt{\log x}}).\tag{1'}$$

Доказательство. Мы опираемся на параллелизм разложения простого идела $\mathfrak{p}$ из $\varkappa$ в произведение идеалов из K_ν и разложения неприводимого полинома $f_\nu(x)$ над $\varkappa$ на неприводимые по модулю $\mathfrak{p}$ множители, где K_ν порождено присоединением корня $f_\nu(x)$ к $\varkappa$ (см., например, [7], стр. 83).

Пусть $\mathfrak{P}$ простой идеал из K_ν, $N_{K_\nu|k}\ \mathfrak{P}$ — норма $\mathfrak{P}$ в K_ν. Тогда по теореме о распределении простых идеалов (см., например, [8])

$$\sum_{N_{K_\nu|k}\mathfrak{P}\leq x}\log N_{K_\nu|k}\mathfrak{P}=x+E(d_\nu)\frac{x^{\rho_\nu}}{\rho_\nu}+O(xe^{-a\sqrt{\log x}}).\tag{2}$$

С другой стороны, пользуясь теоремой об относительной норме, получаем

$$\sum_{N_{K_\nu|k}\mathfrak{P}\leq x}\log N_{K_\nu|k}\mathfrak{P}=\sum_{\substack{N_{\varkappa|k}N_{K_\nu|\varkappa}\mathfrak{P}\leq x\\ N_{K_\nu|\varkappa}\mathfrak{P}=\mathfrak{p}}}\log N_{\varkappa|k}\ N_{K_\nu|\varkappa}\mathfrak{P}+$$

$$+\sum_{\substack{N_{K_\nu|k}\mathfrak{P}\leq x\\ N_{K_\nu|\varkappa}\mathfrak{P}\neq\mathfrak{p}}}\log N_{K_\nu|k}\ \mathfrak{P}=\sum_{\substack{N_{\varkappa|k}\mathfrak{p}\leq x\\ \mathfrak{P}\times D_{K_\nu|\varkappa}}}\omega_\nu(\mathfrak{p})\log N_{\varkappa|k}\ \mathfrak{p}+\sum_{\substack{N_{K_\nu|k}\mathfrak{P}\leq x\\ N_{K_\nu|\varkappa}\mathfrak{P}\neq\mathfrak{p}}}\text{og}\ N_{K_\nu|k}\ \mathfrak{P},$$

где $D_{K_\nu|\mathfrak{R}}$ — относительный дискриминант поля K_ν, $\omega_\nu(\mathfrak{p})$ — число решения сравнения $f_\nu(x)\equiv 0\ (\text{mod}\ \mathfrak{p})$. Предполагая, что $x>\log^3 D_{K_\nu|\varkappa}=x_0(D)$, получаем

$$\sum_{N_{\varkappa|k}\mathfrak{p}\leq x}\omega_\nu(\mathfrak{p})\log N_{\varkappa|k}\mathfrak{p}=x+E(d_\nu)\frac{x^{\rho_\nu}}{\rho_\nu}+O(xe^{-a_\nu\sqrt{\log x}}).\tag{3}$$

Суммируя (3) по ν от 1 до r и полагая $\min_{i=\overline{1,r}} a_\nu=a$, получаем формулу (1), так как

$$f(x)=f_1(x)\ f_2(x)\dots f_r(x).$$

Если дзета-функция Дедекинда $\zeta_{K_\nu}(s)$ не имеет зигелевского нуля ρ_ν или ρ_ν удовлетворяет условию

$$\max_{\nu=\overline{1,r}} \rho_\nu < 1 - \frac{a}{\sqrt{\log x}} \left(m.\,e. \quad x > x_0 e^{\left(\frac{a}{1-\rho_\nu}\right)^2}\right),$$

то получаем (1[1]).

Лемма 2. *Имеют место следующие асимптотические формулы:*

$$\sum_{N\mathfrak{p}\leq u} \frac{\omega(\mathfrak{p}) \log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} = r \log u + \sum_{\nu=1}^{r} E(d_\nu) \frac{u^{\rho_\nu}-1}{\rho_\nu - 1} + F_1(\rho) -$$

$$- \sum_{\nu=1}^{r} E(d_\nu) \frac{2^{\rho_\nu}-1}{\rho_\nu(\rho_\nu - 1)} + O(e^{-a\sqrt{\log u}}), \tag{4}$$

$$\sum_{N\mathfrak{p}\leq u} \frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}} = r \log\log u + \sum_{\nu=1}^{r} E(d_\nu) \int_2^u \frac{v^{\rho_\nu - 2}}{\log v} dv + A(\rho) + O(e^{-a\sqrt{\log u}}), \tag{5}$$

$$\sum_{N\mathfrak{p}\leq x} \omega(\mathfrak{p}) = r \int_2^x \frac{dx}{\log x} + \sum_{m=2}^{[x]} \left\{ \sum_{\nu=1}^{r} E(d_\nu) \frac{m^{\rho_\nu}}{\rho_\nu} \left(\frac{1}{\log m} - \frac{1}{\log(m+1)} \right) \right\} +$$

$$+ \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{r} E(d_\nu) \frac{[x]^{\rho_\nu}}{\rho_\nu}}{\log([x]+1)} + O(xe^{-a\sqrt{\log x}}), \tag{6}$$

где $F_1(\rho)$, $A(\rho)$ — величины, зависящие только от ρ, a — положительная постоянная.

Если дзета-функция Дедекинда $\zeta_{K_\nu}(s)$ не имеет зигелевского нуля ρ_ν или ρ_ν удовлетворяет условию

$$\max_{1\leq\nu\leq r} \rho_\nu < 1 - \frac{a}{\sqrt{\log x}} \left(\text{т. е. если } x > x_0\, e^{\left(\frac{a}{1-\rho_\nu}\right)^2}\right),$$

то

$$\sum_{N\mathfrak{p}\leq x} \frac{\omega(\mathfrak{p}) \log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} = r \log x + A_1 + O(e^{-a\sqrt{\log x}}), \tag{4'}$$

$$\sum_{N\mathfrak{p}\leq x} \frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}} = r \log\log x + B_1 + O(e^{-a\sqrt{\log x}}), \tag{5'}$$

$$\sum_{N\mathfrak{p}\leq x} \omega(\mathfrak{p}) = r \int_2^x \frac{dx}{\log x} + O(xe^{-a\sqrt{\log x}}), \tag{6'}$$

где A_1, B_1 не зависят от x, a — положительная постоянная.

Доказательство. Для доказательства используем абелевское суммирование

$$\sum_{N\mathfrak{p}\leq u} \frac{\omega(\mathfrak{p}) \log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} = \sum_{n=2}^{[u]} \frac{\Theta_1(n) - \Theta_1(n-1)}{n} = \sum_{n=2}^{[u]} \Theta_1(n) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{\Theta_1([u])}{[u]+1}.$$

Из леммы 1 после некоторых упрощений получаем

$$\sum_{N\mathfrak{p}\leqslant u} \frac{\omega(\mathfrak{p})\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} = r\log u + \sum_{\nu=1}^{r} E(d_\nu)\frac{u^{\rho_\nu-1}}{\rho_\nu-1} + F_1(\rho) +$$

$$+ O(e^{-a\sqrt{\log u}}) - \sum_{\nu=1}^{r} E(d_\nu)\frac{2^{\rho_\nu-1}}{\rho_\nu(\rho_\nu-1)}.$$

Теперь докажем (5). Очевидно, что

$$\sum_{N\mathfrak{p}\leqslant u} \frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}} = -\sum_{N\mathfrak{p}\leqslant u} \frac{\omega(\mathfrak{p})\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} \int_{N\mathfrak{p}}^{u} d\,\frac{1}{\log x} + \frac{1}{\log u}\sum_{N\mathfrak{p}\leqslant u} \frac{\omega(\mathfrak{p})\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} =$$

$$= -\int_{2}^{u} \sum_{N\mathfrak{p}\leqslant v} \frac{\omega(\mathfrak{p})\log N\mathfrak{p}}{N(\mathfrak{p})}\, d\,\frac{1}{\log v} + \frac{1}{\log u}\sum_{N\mathfrak{p}\leqslant u} \frac{\omega(\mathfrak{p})\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}}.$$

Воспользовавшись (4), находим

$$\sum_{N\mathfrak{p}\leqslant u} = \frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}} = r\log\log u + F^*(\rho) + \sum_{\nu=1}^{r} E(d_\nu)\frac{u^{\rho_\nu-1}}{(\rho_\nu-1)\log u} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{r} \frac{E(d_\nu)}{\rho_\nu-1}\int_{2}^{u} \frac{v^{\rho_\nu-2}}{\log^2 v}\,dv - \sum_{\nu=1}^{r} E(d_\nu)\frac{2^{\rho_\nu-1}}{\rho_\nu(\rho_\nu-1)\log 2} + O(e^{-a\sqrt{\log u}}),$$

где $F^*(\rho)$ величина, зависящая только от ρ.

Интегрированием по частям доказываем (5).

Теперь докажем (6)

$$\sum_{N\mathfrak{p}\leqslant x} \omega(\mathfrak{p}) = \sum_{l=2}^{[x]}\sum_{N\mathfrak{p}=l} \omega(\mathfrak{p}) = \sum_{i=2}^{[x]} \frac{1}{\log i}\Big(\sum_{N\mathfrak{p}\leqslant i} \omega(\mathfrak{p})\log N\mathfrak{p} - \sum_{N\mathfrak{p}\leqslant i-1} \omega(\mathfrak{p})\log N\mathfrak{p}\Big) =$$

$$= \sum_{m=2}^{[x]} \frac{1}{\log m}\Big(\Theta_1(m) - \Theta_1(m-1)\Big) = r\sum_{m=2}^{[x]} \frac{1}{\log m} +$$

$$+ \sum_{m=2}^{[x]} \frac{\big(\Theta_1(m) - rm\big) - \big(\Theta_1(m-1) - r(m-1)\big)}{\log m} = r\int_{0}^{x} \frac{du}{\log u} + O(1) +$$

$$+ \sum_{m=2}^{[x]} (\Theta_1(m) - rm)\left(\frac{1}{\log m} - \frac{1}{\log(m+1)}\right) + \frac{1}{\log 2} + \frac{\Theta_1([x]) - [x]}{\log([x]+1)}.$$

Отсюда на основании леммы 1 получаем доказательство формулы (6).

Для дальнейших приложений укажем следующее

Следствие:

$$\sum_{N\mathfrak{p}\leq x}\frac{\omega(\mathfrak{p})\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}-\omega(\mathfrak{p})}=r\log x+\sum_{\nu=1}^{r}E(d_\nu)\frac{x^{\rho_\nu-1}}{\rho_\nu-1}+F_2(\rho)-$$

$$-\sum_{\nu=1}^{r}E(d_\nu)\frac{2^{\rho_\nu-1}}{\rho_\nu(\rho_\nu-1)}+O(e^{-a\sqrt{\log x}}), \tag{7}$$

$$\sum_{N\mathfrak{p}\leq x}\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}-\omega(\mathfrak{p})}=r\log\log x+\sum_{\nu=1}^{r}E(d_\nu)\int_2^x\frac{v^{\rho_\nu-2}}{\log v}\,dv+A(\rho)+O(e^{-a\sqrt{\log x}}), \tag{8}$$

где $F_2(\rho)$, $A(\rho)$ — величины, зависящие только от ρ.

Если дзета-функция Дедекинда не имеет зигелевского нуля или удовлетворяет условию

$$\max_{\nu=\overline{1,r}}\rho_\nu<1-\frac{a}{\sqrt{\log x}},$$

то

$$\sum_{N\mathfrak{p}\leq x}\frac{\omega(\mathfrak{p})\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}-\omega(\mathfrak{p})}=r\log x+B_1+O(e^{-a\sqrt{\log x}}), \tag{7'}$$

$$\sum_{N\mathfrak{p}\leq x}\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}-\omega(\mathfrak{p})}=r\log\log x+B_2+O(e^{-a\sqrt{\log x}}), \tag{8'}$$

$$\sum_{x\leq N\mathfrak{p}<y}\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}-\omega(\mathfrak{p})}=r\log\frac{\log y}{\log x}+B_3+O(e^{-a\sqrt{\log x}}), \tag{8''}$$

где B_1, B_2, B_3 не зависят от x.

Для оценок сверху по методу решета важную роль играют оценки суммы $m(x)$, определенной равенством (9).

Теорема 1. *Пусть* $\mu(\mathfrak{a})$ — *функция Мёбиуса*

$$\omega^*(\mathfrak{a})=\frac{\omega(\mathfrak{a})}{\prod\limits_{\mathfrak{p}\mid\mathfrak{a}}\left(1-\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right)},\quad m(x)=\sum_{N\mathfrak{a}\leq x}\frac{\mu^2(\mathfrak{a})\,\omega^*(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}}. \tag{9}$$

Тогда существует такая постоянная B_r, что

$$m(x)=B_r\log^r x\left(1+0\left(\frac{1}{\log x}\right)\right). \tag{10}$$

Доказательство. Покажем в начале, что $m(x)$ удовлетворяет специальному интегральному уравнению.

Для этого поступаем следующим образом:

$$\sum_{N\mathfrak{a}\leq x}\frac{\mu^2(\mathfrak{a})\,\omega^*(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}}\log N\mathfrak{a}=r\sum_{N\mathfrak{a}\leq x}\frac{\mu^2(\mathfrak{a})\,\omega^*(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}}\log\frac{x}{N\mathfrak{a}}+g_1(x), \tag{11}$$

где

$$g_1(x)=\sum_{N\mathfrak{a}\leq x}\frac{\mu^2(\mathfrak{a})\,\omega^*(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}}\left(\sum_{N\mathfrak{p}\leq\frac{x}{N\mathfrak{a}}}\frac{\omega(\mathfrak{p})\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}-\omega(\mathfrak{p})}-r\log\frac{x}{N\mathfrak{a}}-\right.$$

$$\left.-\sum_{\substack{N\mathfrak{p}\leq\sqrt{\frac{x}{N\mathfrak{a}}}\\(\mathfrak{a},\,\mathfrak{p})=\mathfrak{o}}}\frac{(\omega^*(\mathfrak{p}))^2\log N\mathfrak{p}}{(N\mathfrak{p})^2}\right).$$

На основании (7′) получаем $g_1(x)=O(m(x))$, так как

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{p}\leq\sqrt{\frac{x}{N\mathfrak{a}}}\\(\mathfrak{a},\mathfrak{p})=\mathfrak{v}}}\frac{(\omega^*(\mathfrak{p}))^2-\log N\mathfrak{p}}{(N\mathfrak{p})^2}=O(1).$$

Из (11) следует, что $m(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$m(x)\log x=(r+1)\int_1^x m(u)\frac{du}{u}+g_1(x), \tag{12}$$

где $g_1(x)=O(m(x))$.

Так как функция $m(x)$ кусочно-постоянная, то, понимая под производными производные справа, перепишем (12) в виде

$$\frac{d}{dx}\log\int_1^x m(u)\frac{du}{u}=\frac{r+1}{x\log x}+g_2(x), \tag{13}$$

где

$$g_2(x)=\frac{g_1(x)(r+1)}{x[m(x)\log x-g_1(x)]\log x}=O\left(\frac{1}{x\log^2 x}\right).$$

Решая уравнение (13), получаем

$$m(x)=B_r\log^r xe^{-\int\limits_x^\infty g_2(u)\,du}+\frac{g_1(x)}{\log x}e^{\int\limits_x^\infty g_2(u)\,du}=B_r\log^r x+O(\log^{r-1}x).$$

§ 2. Обобщенное произведение Мертенса и асимптотическая формула для числа классов идеалов

Докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть дзета-функция Дедекинда $\zeta_{K_\nu}(s)$ имеет зигелевский нуль ρ_ν. Тогда*

$$\sum_{N\mathfrak{p}<x}\left(1-\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right)=\frac{e^{-rC+\sum\limits_{\nu=1}^r E(d_\nu)\int\limits_x^\infty\frac{v^{\rho_\nu-2}}{\log v}dv}}{B_rA_K^r\log^r x}\left(1+O(e^{-a\sqrt{\log x}})\right), \tag{14}$$

где

$$B_r=\prod_{\mathfrak{p}}\frac{\left(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}}\right)^r}{1-\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}};$$

A_K — вычет $\zeta_{K_\nu}(s)$ в точке $s=1$.

Если $\zeta_{K_\nu}(s)$ не имеет зигелевского нуля или

$$\max_{\nu=\overline{1,r}}\rho_\nu<1\frac{a}{\sqrt{\log x}}$$

(т. е., если $x>x_0e^{\left(\frac{a}{1-\rho_\nu}\right)^2}$), то

$$\prod_{N\mathfrak{p}<x}\left(1-\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right)=\frac{e^{-Cr}}{B_rA_K^r\log^r x}\left(1+O(e^{-a\sqrt{\log x}})\right). \tag{14′}$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\log \prod_{N\mathfrak{p}\leqslant x}\left(1-\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right)=\sum_{N\mathfrak{p}\leqslant x}\left[\log\left(1-\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right)+\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right]-\sum_{N\mathfrak{p}\leqslant x}\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}=$$

$$=\sum_{\mathfrak{p}}\left[\log\left(1-\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right)+\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right]-\sum_{N\mathfrak{p}\leqslant x}\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}+O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Согласно формуле (5), получаем

$$\log \prod_{N\mathfrak{p}\leqslant x}\left(1-\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right)=B(\rho)-r\log\log x-\sum_{\nu=1}^{r}E(d_\nu)\int_2^x\frac{v^{\rho_\nu-2}}{\log v}dv+O\left(e^{-a\sqrt{\log x}}\right).$$

Отсюда получаем

$$\prod_{N\mathfrak{p}\leqslant x}\left(1-\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right)=\frac{e^{B(\rho)-\sum_{\nu=1}^{r}E(d_\nu)\int_2^x\frac{v^{\rho-2}}{\log v}dv}}{\log^r x}\left(1+O\left(e^{-a\sqrt{\log x}}\right)\right),\tag{15}$$

где

$$B(\rho)=\sum_{\mathfrak{p}}\left(\log\left(1-\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right)+\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right)-A(\rho).\tag{16}$$

Пусть $s>1$,

$$F(s)=\prod_{\mathfrak{p}}\frac{1}{1-\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}},$$

$$\log F(s)=-\sum_{\mathfrak{p}}\left[\log\left(1-\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right)+\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right]+\sum_{\mathfrak{p}}\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}=$$

$$=g(s)-\sum_{\mathfrak{p}}\left[\log\left(1-\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right)+\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right],$$

где

$$g(s)=\sum_{\mathfrak{p}}\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}.$$

Прибавляя $r\log(s-1)$, получаем

$$r\log(s-1)+\log F(s)=r\log(s-1)+g(s)-\sum_{\mathfrak{p}}\left[\log\left(1-\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right)+\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right],$$

$$r\log(s-1)+g(s)=\log(s-1)^rF(s)+\sum_{\mathfrak{p}}\left[\log\left(1-\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right)+\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right],$$

$$(s-1)^rF(s)=(s-1)^r\prod_{\mathfrak{p}}\frac{\left(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}^s}\right)^r}{1-\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}^s}\right)^r}=(s-1)^r\zeta_K^r(s)\prod_{\mathfrak{p}}\frac{\left(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}^s}\right)^r}{1-\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}},$$

$$\lim_{s\to1+0}(s-1)^rF(s)=\prod_{\mathfrak{p}}\frac{\left(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}}\right)^r}{1-\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}}\lim_{s\to1+0}[(s-1)\zeta_K(s)]^r=B_rA_K^r,$$

где

$$B_r=\prod_{\mathfrak{p}}\frac{\left(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}}\right)^r}{1-\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}};\quad A_K\text{ — вычет }\zeta_K(s)\text{ в точке }s=1,$$

т. е.

$$A_K=\frac{(2\tilde{\omega})^{n/2}RH}{W\sqrt{|d|}};\qquad \tilde{\omega}=\begin{cases}2, & \text{если } K-\text{вещественное поле}\\ \pi, & \text{если } K-\text{мнимое поле.}\end{cases}$$

Следовательно,

$$\lim_{s\to 1+0}\{r\log(s-1)+g(s)\}=\log A_K^r B_r+\sum_{\mathfrak{p}}\left[\log\left(1-\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right)+\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right]. \tag{17}$$

Рассмотрим функцию

$$g(s,x)=\sum_{N\mathfrak{p}\le x}\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}=\sum_{N\mathfrak{p}\le x}\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}[(N\mathfrak{p})^{1-s}-x^{1-s}]+x^{1-s}\sum_{N\mathfrak{p}\le x}\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}=$$

$$=(s-1)\int_2^x\sum_{N\mathfrak{p}\le u}\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\frac{du}{u^s}+O(x^{1-s}\log\log x).$$

Согласно лемме 2 (см. (5)), получаем

$$g(s,x)=r(s-1)\int_2^x\log\log u\,\frac{du}{u^s}+\sum_{\nu=1}^r E(d_\nu)(s-1)\int_2^x\int_2^u\frac{v^{\rho_\nu-2}}{\log v}\,dv\,\frac{du}{u^s}+$$

$$+(s-1)A(\rho)\int_2^x\frac{du}{u^s}+O(s-1)+O(x^{1-s}\log\log x).$$

При $s>1$ и $x\to\infty$

$$g(s,x)\to g(s)=r(s-1)\int_2^\infty\log\log u\,\frac{du}{u^s}+\sum_{\nu=1}^r E(d_\nu)(s-1)\int_2^\infty\int_2^u\frac{v^{\rho_\nu-2}}{\log v}\,dv\,\frac{du}{u^s}-$$

$$-\frac{A(\rho)}{2^{s-1}}+O(s-1).$$

При $s>1$ второе слагаемое является сходящим интегралом, так как $g(s)$ — сходящий ряд при $s>1$. После подстановки

$$u^{s-1}=e^y,\ y=(s-1)\ln u,\ \frac{dy}{s-1}=\frac{du}{u},\ \ln\ln u=\ln\frac{y}{s-1},$$

получаем

$$g(s)=r\int_0^\infty e^{-y}\log\frac{y}{s-1}\,dy+A(\rho)+\sum_{\nu=1}^r E(d_\nu)(s-1)\int_2^\infty\int_2^u\frac{v^{\rho_\nu-2}}{\log v}\,dv\,\frac{du}{u^s}+$$

$$+O(s-1)-r\int_0^{(s-1)\ln 2}e^{-y}\log\frac{y}{s-1}\,dy=r\int_0^\infty e^{-y}\log\frac{y}{s-1}\,dy+A(\rho)+$$

$$+\sum_{\nu=1}^r E(d_\nu)(s-1)\int_2^\infty\int_2^u\frac{v^{\rho_\nu-2}}{\log v}\,dv\,\frac{du}{u^s}+O(1)=$$

$$=rc-r\ln(s-1)+A(\rho)+\sum_{\nu=1}^r E(d_\nu)(s-1)\int_2^\infty\int_2^u\frac{v^{\rho_\nu-2}}{\log v}\,dv\,\frac{du}{u^s}+O(1).$$

Отсюда

$$g(s)+r\ln(s-1)=-rc+A(\rho)+\sum_{\nu=1}^r E(d_\nu)(s-1)\int_2^\infty\int_2^u\frac{v^{\rho_\nu-2}}{\log v}\,dv\,\frac{du}{u^s}+O(1). \tag{18}$$

Сравнивая формулы (18) и (17), получаем

$$-cr+A(\rho)+\lim_{s\to 1+0}\sum_{\nu=1}^{r}E(d_\nu)(s-1)\int_2^\infty\int_2^u\frac{v^{\rho_\nu-2}}{\log v}\,dv\,\frac{du}{u^s}+O(1)=$$

$$=\log A_K^r B_r+\sum_{\mathfrak p}\left[\log\left(1-\frac{\omega(\mathfrak p)}{N\mathfrak p}\right)+\frac{\omega(\mathfrak p)}{N\mathfrak p}\right].$$

Отсюда

$$B(\rho)=\sum_{\mathfrak p}\left[\log\left(1-\frac{\omega(\mathfrak p)}{N\mathfrak p}\right)+\frac{\omega(\mathfrak p)}{N\mathfrak p}\right]-A(\rho)=-cr+\lim_{s\to 1+0}\sum_{\nu=1}^{r}E(d_\nu)\times$$

$$\times(s-1)\int_2^\infty\int_2^u\frac{v^{\rho_\nu-2}}{\log v}\,dv\,\frac{du}{u^s}-\log A_K^r B_r. \qquad (19)$$

Подставляя (19) в (15), находим

$$\prod_{N\mathfrak p\leqslant x}\left(1-\frac{\omega(\mathfrak p)}{N\mathfrak p}\right)=\frac{e^{-cr+\sum_{\nu=1}^{r}E(d_\nu)\left\{\lim_{s\to 1+0}(s-1)\int_2^\infty\int_2^u\frac{v^{\rho_\nu-2}}{\log v}\,dv\,\frac{du}{u^s}-\int_2^x\frac{v^{\rho_\nu-2}}{\log v}\,dv\right.}}{B_r A_K^r\log^r x}\times$$

$$\times\left(1+O\left(e^{-a\sqrt{\log x}}\right)\right). \qquad (20)$$

Придадим другой вид формуле (20)

$$\lim_{s\to 1+0}(s-1)\int_2^\infty\int_2^u\frac{v^{\rho-2}}{\log v}\,dv\,\frac{du}{u^s}-\int_2^x\frac{v^{\rho-2}}{\log v}\,dv=$$

$$=\lim_{s\to 1+0}(s-1)\int_2^\infty\frac{v^{\rho-2}}{\log v}\,dv\int_v^u\frac{du}{u^s}-\int_2^x\frac{v^{\rho-2}}{\log v}\,dv=$$

$$=\lim_{s\to 1+0}\frac{(s-1)}{s-1}\int_v^\infty\frac{v^{\rho-2-s+1}}{\log v}\,dv-\int_2^x\frac{v^{\rho-2}}{\log v}\,dv=$$

$$=\lim_{s\to 1+0}\int_2^x\frac{v^{\rho-2}(v^{1-s}-1)}{\log v}\,dv+\lim_{s\to 1+0}\int_x^\infty\frac{v^{\rho-2-s+1}}{\log v}\,dv=\int_x^\infty\frac{v^{\rho-2}}{\log v}\,dv.$$

Таким образом

$$\prod_{N\mathfrak p\leqslant x}\left(1-\frac{\omega(\mathfrak p)}{N\mathfrak p}\right)=\frac{e^{-rc+\sum_{\nu=1}^{r}E(d_\nu)\int_x^\infty\frac{v^{\rho_\nu-2}}{\log v}\,dv}}{B_r A_K^r\log^r r}\left(1+O\left(e^{-a\sqrt{\log x}}\right)\right)=$$

$$=\frac{|d|^{r/2}W^r e^{-rc+\sum_{\nu=1}^{r}E(d_\nu)\int_x^\infty\frac{v^{\rho_\nu-2}}{\log v}\,dv}}{B_r\log^r x\,(2\tilde\omega)^{\frac{nr}{2}}H^r R^r}\left(1+O\left(e^{-a\sqrt{\log x}}\right)\right). \qquad (21)$$

Так как

$$\int_x^\infty\frac{v^{\rho-2}}{\log v}\,dv=O\left(\frac{x^{\rho-1}}{(\rho-1)\log x}\right),$$

то, подставляя в (21), получаем

$$e^{\sum\limits_{\nu=1}^{r} E(d_\nu)\int\limits_x^\infty \frac{v^{\rho_\nu-2}}{\log v}dv} = e^{O\left(\sum\limits_{\nu=1}^{r}\frac{x^{\rho_\nu-1}}{(\rho_\nu-1)\log x}\right)} = 1+O\left(\sum_{\nu=1}^{r}\frac{x^{\rho_\nu-1}}{(\rho_\nu-1)\log x}\right),$$

если

$$\max_{1\le\nu\le r}\frac{x^{\rho_\nu-1}}{|\rho_\nu-1|\log x}<1.$$

Если

$$\max_{1\le\nu\le r}\frac{x^{\rho_\nu-1}}{(\rho_\nu-1)\log x}<e^{-a\sqrt{\log x}},\quad \text{т. е.}\quad \max_{1\le\nu\le r}\rho_\nu<1-\frac{a}{\sqrt{\log x}}$$

и

$$x>x_0\, e^{\left(\frac{a}{1-\rho_\nu}\right)^2},$$

то

$$\prod_{N\mathfrak{p}\le x}\left(1-\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right)=\frac{e^{-cr}}{B_r A_K^r \log^r x}\left(1+O(e^{-a\sqrt{\log x}})\right).$$

Если $\zeta_{K_\nu}(s)$ имеет зигелевский нуль, или

$$\max_{1\le\nu\le r}\rho_\nu>1-\frac{a}{\sqrt{\log x}},$$

то имеет место (21). Можно переписать формулу (21) и так

$$\prod_{N\mathfrak{p}\le x}\left(1-\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right)=\frac{e^{\omega_1(x)}}{B_r A_K^r\prod\limits_{\nu=1}^{r}(1-\rho_\nu)^{E(d_\nu)}}\left(1+O(e^{-a\sqrt{\log x}})\right),$$

где

$$\omega_1(x)=-cr+\sum_{\nu=1}^{r}E(d_\nu)\int\limits_0^{\rho_\nu}\frac{x^{u-1}-1}{1-u}\,du-r\log\log x.$$

Следствие. Пусть $\omega(\mathfrak{p})\equiv 1$; зигелевский нуль ρ_ν удовлетворяет условию $\max\limits_{1\le\nu\le r}\rho_\nu<1-\frac{a}{\sqrt{\log x}}$. Тогда при $d\to\infty$

$$\log RH=\log\sqrt{|d|}+O(\log\log|d|). \tag{22}$$

Доказательство. Логарифмируем (21):

$$\log RH=\log\sqrt{|d|}+\frac{1}{r}\log\prod_{N\mathfrak{p}\le x}\left(1-\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right)^{-1}-c+\frac{1}{r}\sum_{\nu=1}^{r}E(d_\nu)\times$$

$$\times\int\limits_x^\infty\frac{v^{\rho_\nu-2}}{\log v}\,dv-\frac{n}{2}\log(2\tilde{\omega})-\frac{1}{r}\log B_r+\log W-\log\log x+O(e^{-a\sqrt{\log x}}).$$

Воспользовавшись условием $\max\limits_{\nu=\overline{1,r}}\rho_\nu<1-\frac{a}{\sqrt{\log x}}$, получаем (22).

§ 3. Оценки сверху

Пусть $I_k(V,T)$ — число членов последовательности $\{f(m)\}$, $|m|<T$, делящихся на k, но не делящихся ни на какой простой идеал с нормой меньшей V и отличный от простых делителей k.

Применим метод решета А. Сельберга для оценок сверху. Пусть $\lambda_{d,n}$ — произвольные вещественные числа с условием

$$\lambda_{0,n}=1 \text{ и } \lambda_{d,n}=O, \text{ если } Nd>W_K.$$

Пусть, далее, π_v — произведение всех простых идеалов поля $\varkappa$ с нормой, не превосходящей V. Тогда

$$I_k(V,T)\leqslant \sum_{\substack{|m|\leqslant T\\ f(m)\equiv 0 \pmod k}} \Bigg(\sum_{\substack{d\mid\left(f(m),\,\frac{\pi_v}{k}\right)\\ Nd\leqslant W_k}} \lambda_{d,n}\Bigg)^2=$$

$$=\sum_{\substack{d\mid\frac{\pi_v}{k}\\ Nd\leqslant W_k}} \lambda_{d,k} \sum_{\substack{\delta\mid\frac{\pi_v}{k}\\ N\delta\leqslant W_k}} \lambda_{\delta,k} \sum_{\substack{|m|\leqslant T\\ f(m)\equiv 0 \pmod k\\ f(m)\equiv 0 \pmod{[d,\delta]}}} 1=$$

$$=\sum_{\substack{d\mid\frac{\pi_v}{k}\\ Nd\leqslant W_k}} \lambda_{d,k} \sum_{\substack{\delta\mid\frac{\pi_v}{k}\\ N\delta\leqslant W_k}} \lambda_{\delta,k} \sum_{\nu=1}^{\omega(k[d,\delta])} \sum_{\substack{|m|\leqslant T\\ m\equiv\beta_j \pmod{k[d,\delta]}}} 1.$$

Так как

$$\sum_{\substack{|m|\leqslant T\\ m\equiv\beta_j \pmod{k[d,\delta]}}} 1=2^{r_1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{r_2}\sqrt{|d|}\left(\frac{T}{N(k[d,\delta])}+O\left(1+\left|\frac{T}{N(k[d,\delta])}\right|^{1-\frac{1}{n}}\right)\right)$$

(см. [1]), то

$$I_k(V,T)\leqslant\frac{2^{r_1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{r_2}\sqrt{|d|}\,T\omega(k)}{NK}\sum_{\substack{d\mid\frac{\pi_v}{k}\\ Nd\leqslant W_k}}\frac{\lambda_{d,k}\,\omega(d)}{Nd}\sum_{\substack{\delta\mid\frac{\pi_v}{k}\\ Nd\leqslant W_k}}\frac{\lambda_{\delta,k}\,\omega(\delta)}{N\delta}\cdot\frac{N(d,\delta)}{\omega((d,\delta))}+R_k.$$

Выбирая

$$\lambda_{d,k}=\frac{\mu(d)}{\prod\limits_{\mathfrak{p}\mid d}\left(1-\frac{\omega(d)}{Nd}\right)}\cdot\frac{\sum\limits_{\substack{m\mid\frac{\pi_v}{dk}\\ dm\leqslant W_k}}\frac{\mu^2(m)\,\omega(m)}{Nm\left(1-\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right)}}{\sum\limits_{\substack{m\mid\frac{\pi_v}{k}\\ Nm\leqslant W_k}}\frac{\mu^2(m)\,\omega(m)}{Nm\prod\limits_{\mathfrak{p}\mid m}\left(1-\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right)}},$$

получаем

$$I_k(V,T)\leqslant\frac{2^{r_1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{r_2}\sqrt{|d|}\,T\cdot\omega(k)}{Nk\sum\limits_{\substack{m\mid\frac{\pi_v}{k}\\ Nm\leqslant W_k}}\frac{\mu^2(m)\,\omega(m)}{Nm\prod\limits_{\mathfrak{p}\mid m}\left(1-\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right)}}+R_k.$$

Очевидно также, что

$$R_k = O\left(W_k^2 \sqrt{|d|}\log^A W_k\right) + O\left(\frac{W_k^{\frac{2}{n}} T^{1-\frac{1}{n}} \sqrt{|d|}\log^A W_k}{Nk}\right).$$

В частности, если $k = \mathfrak{o}$, то

$$I_1(V,T) \leqslant \frac{2^{r_1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{r_2}\sqrt{|d|}\,T}{\sum\limits_{\substack{m \mid \pi_v \\ Nm \leqslant W}} \frac{1}{\omega_1(m)}} + O\left(W^2\sqrt{|d|}\log^A W\right) + O\left(W^{\frac{2}{n}} T^{1-\frac{1}{n}}\sqrt{|d|}\log^A W\right).$$

Пусть $W^2 = \frac{T}{\log^B T}$, где B — достаточно большая постоянная. Тогда

$$I_1(V,T) \leqslant \frac{2^{r_1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{r_2}\sqrt{|d|}\,T}{\sum\limits_{\substack{m \mid \pi_v \\ Nm \leqslant W}} \frac{1}{\omega_1(m)}} + O\left(\frac{T\sqrt{|d|}}{\log^{B_0} T}\right),$$

где B_0 — достаточно большая постоянная.

Предположим теперь, что $V > W$, тогда на основании теоремы 1 получаем

$$I_1(V,T) \leqslant \frac{2^r 2^{r_1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{r_2}\sqrt{|d|}\,T}{B_r \log^r T} + O\left(\frac{T\sqrt{|d|}}{\log^{B_0} T}\right)$$

для всех $V \geqslant \frac{\sqrt{T}}{\log^{B/2} T}$.

Таким образом доказана

Теорема 3. *Пусть $f(m)$ полином из поля $\varkappa$, степени n, $2r_2 + r_1 = n$. Число членов последовательности $\{f(m)\}$, $|m| < T$, неделящихся ни на какой простой идеал с нормой меньшей V, не превосходит*

$$\frac{2^r 2^{r_1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{r_2}\sqrt{|d|}\,T}{B_r \log^r T} + O\left(\frac{T\sqrt{|d|}}{\log^{B_0} T}\right)$$

для всех $V \geqslant \frac{\sqrt{T}}{\log^{B/2} T}$, где B, B_0 — достаточно большие постоянные.

§ 4. Оценки снизу

Для получения оценок снизу воспользуемся леммой 1 из работы [5], которая очевидным образом обобщается на случай произвольного алгебраического числового поля. Это обобщение выглядит следующим образом:

Лемма 3. *Пусть $J_Q(T, V, y)$ — число членов последовательности $\{f(m)\}$, $|m| \leqslant T$, не делящихся ни на какой простой идеал с нормой меньшей V, имеющих не более Q простых делителей с нормой большей или равной V, но меньшей y, тогда*

$$J_Q(T, V, y) \geqslant I_1(T, V) - \frac{1}{Q+1} \sum_{V < N\mathfrak{p} < y} I_{\mathfrak{p}}(T, V).$$

Кроме этой леммы используем также очевидное равенство, получающееся из комбинаторных соображений

$$I_1(T, V) = \sum_{n|\pi_v} I_n(T, V) - \sum_{N\mathfrak{p}<V} I_{\mathfrak{p}}(T, N\mathfrak{p}) =$$

$$= \sum_{\substack{|m|\leqslant T \\ f(m)\equiv O\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{D})}} 1 - \sum_{N\mathfrak{p}<v} I_{\mathfrak{p}}(T, N\mathfrak{p}) = 2^{r_1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{r_2} \sqrt{|d|}\, T +$$

$$+ O(\sqrt{|d|}) + O\left(T^{1-\frac{1}{n}} \cdot (\sqrt{|d|}\right) - \sum_{N\mathfrak{p}<v} I_{\mathfrak{p}}(T, N\mathfrak{p}).$$

Таким образом

$$J_Q(T, V, y) \geqslant 2^{r_1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{r_2} \sqrt{|d|}\, T - \sum_{N\mathfrak{p}<V} I_{\mathfrak{p}}(T, N\mathfrak{p}) -$$

$$-\frac{1}{Q+1} \sum_{V<N\mathfrak{p}<y} I_{\mathfrak{p}}(T, V) + O(\sqrt{|d|}) + O\left(T^{1-\frac{1}{n}} \sqrt{|d|}\right).$$

Воспользуемся оценкой сверху для $I_{\mathfrak{p}}(T, N\mathfrak{p})$ и $I_{\mathfrak{p}}(T, V)$, полученной в предыдущем параграфе

$$J_Q(T, V, y) \geqslant 2^{r_1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{r_2} \sqrt{|d|}\, T \Biggl\{1 - \sum_{N\mathfrak{p}<V} \frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p} \sum\limits_{\substack{m \mid \frac{\pi_{N\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p}} \\ Nm\leqslant W_{\mathfrak{p}}}} \frac{1}{\omega_1(m)}} -$$

$$-\frac{1}{Q+1} \sum_{V<N\mathfrak{p}<y} \frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p} \sum\limits_{\substack{m \mid \frac{\pi_v}{\mathfrak{p}} \\ Nm\leqslant W^*_{\mathfrak{p}}}} \frac{1}{\omega_1(m)}} \Biggr\} + O(\sqrt{|d|}) + O\left(T^{1-\frac{1}{n}} \sqrt{|d|}\right) +$$

$$+ O\Bigl(\sum_{N\mathfrak{p}<V} W_{\mathfrak{p}}^2 \sqrt{|d|} \log^A W_{\mathfrak{p}}\Bigr) + O\Bigl(\sum_{V<N\mathfrak{p}<y} W_{\mathfrak{p}}^{*2} \sqrt{|d|} \log^A W_{\mathfrak{p}}\Bigr) +$$

$$+ O\Biggl(\sum_{N\mathfrak{p}<V} \frac{W_{\mathfrak{p}}^{\frac{2}{n}}\, T^{1-\frac{1}{n}} \sqrt{|d|} \log^A W_{\mathfrak{p}}}{N\mathfrak{p}}\Biggr) + O\Biggl(\sum_{V<N\mathfrak{p}<y} \frac{W_{\mathfrak{p}}^{*\frac{2}{n}}\, T^{1-\frac{1}{n}} \sqrt{|d|} \log^A W_{\mathfrak{p}}}{N\mathfrak{p}}\Biggr).$$

Для подсчета сумм вида $\sum\limits_{\substack{m|\pi_x \\ Nm<x^t}} \frac{1}{\omega_1(m)}$ сформулируем без доказательства теорему 4.

Доказательство этой теоремы здесь не приводится в связи с тем, что она получается дословным повторением соответствующей теоремы из [9].

Теорема 4. *Пусть π_x — произведение простых идеалов $\mathfrak{p}$ поля $\varkappa$ с нормой, не превосходящей x.*

Тогда

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leqslant x^t \\ \mathfrak{a}|\pi_x}} \frac{\omega(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a} \prod\limits_{\mathfrak{p}|\mathfrak{a}} \left(1 - \frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right)} = B_r y(t) \log^r x \left(1 + 0\left(\frac{t^r}{\log x}\right)\right),$$

где $y(t)$ — решение уравнения

$$y(t)=t^r-rt^r\int\limits_0^{t-1}\frac{y(u)}{(u+1)^{r+1}}\,du$$

с начальным условием $y(t)=t^2$ при $0\leqslant t\leqslant 1$; B_r — постоянная, зависящая только от ω.

Можно показать, что

$$B_r=\sum_{\mathfrak{p}}\frac{\left(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}}\right)^r}{1-\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}}.$$

Выбирая в (23),

$$V=T^{\gamma/\beta},\quad y=T^{\gamma/\delta},\quad W_{\mathfrak{p}}=W_{\mathfrak{p}}\doteq\sqrt{\frac{T^\gamma}{N\mathfrak{p}}},$$

воспользовавшись теоремой 4 и переходя от сумм к интегралам, после оценки остаточного члена, получаем:

$$J_Q(T,T^{\gamma/\beta},T^{\gamma/\delta})\geqslant\frac{2^{r_1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{r_2}\sqrt{|d|}\,T}{\gamma^r B^r\log^r T}\left\{e^{-rC}\delta^r-\right.$$

$$-2r\int\limits_{\frac{\delta-1}{2}}^{\infty}\frac{r!\,e^{rC}-y(u)}{y(u)}(2u+1)^{r-1}du-\frac{2r\beta^r\cdot r!}{Q+1}\int\limits_{\frac{\beta}{2}\left(1-\frac{1}{\delta}\right)}^{\frac{\beta-1}{2}}\left.\frac{dx}{y(x)(\beta-2x)}\right\}+$$

$$+O\left(\sqrt{|d|}\,T^\gamma\log^A T\right)+O\left(\sqrt{|d|}\,T^{1-\frac{1-\gamma}{n}}\log^A T\right).$$

Поступая аналогично тому, как это делалось в работе [10], получаем следующие теоремы.

Теорема 5. *Пусть $f(x)$ — неприводимый, целочисленный, примитивный полином степени m с коэффициентами из поля $\varkappa$ — расширения основного поля рациональных чисел k. Тогда имеется больше чем*

$$0{,}05\,\frac{2^{r_1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{r_2}\sqrt{|d|}}{\gamma}\prod_{\mathfrak{p}}\frac{1-\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}}{1-\frac{1}{N\mathfrak{p}}}\cdot\frac{T}{\log T}$$

таких $|x|<T$, для которых $f(x)$ имеет не более k простых идеальных множителей, где

$$k=m+1,\ \text{если}\ 1\leqslant m\leqslant 7;$$

$$k=m+2,\ \text{если}\ 8\leqslant m\leqslant 336;$$

$$k=m+3+\left[\frac{m-336}{1450}\right],\ \text{если}\ m>336.$$

Теорема 6. *Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — целочисленные, неприводимые, примитивные многочлены с коэффициентами из поля $\varkappa$; $f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$ полином степени m с коэффициентами из поля $\varkappa$. Тогда существует больше чем*

$$0{,}05\,\frac{2^{r_1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{r_2}\sqrt{|d|}}{\gamma^2}\prod_{\mathfrak{p}}\frac{1-\frac{\omega(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}}{\left(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}}\right)^2}\cdot\frac{T}{\log^2 T}$$

таких $|x|<T$, что $f(x)$ имеет не более k простых идеальных множителей.

Зависимость k от m:

$$k=m+3, \text{ если } m=2; \; k=m+7, \text{ если } 12\leqslant m\leqslant 14,$$
$$k=m+4, \text{ если } 3\leqslant m\leqslant 5; \; k=m+8, \text{ если } 15\leqslant m\leqslant 16,$$
$$k=m+5, \text{ если } 6\leqslant m\leqslant 7, \; k=m+9+[0{,}145\,(m-16)],$$
$$k=m+6, \text{ если } 8\leqslant m\leqslant 11, \text{ если } m>16.$$

Можно доказать аналогичную теорему для случая целозначного примитивного полинома $f(x)$, разлагающегося на r неприводимых множителей, причем число простых множителей в определении почти простоты равно $[2{,}6358\ rm-\alpha m]$, где m – степень полинома, $\alpha>0$.

Институт математики им. В. И. Романовского
Академии наук Узбекской ССР

Поступило в редакцию
I.X.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Виноградов, Метод решета в алгебраических полях. Оценки снизу, Мат. сб., **64** (106): 1 (1964), 52—78.
2. Н. Г. Заикина, О разложении четных чисел мнимого квадратического поля на сумму двух «полупростых слагаемых», Калининградский пединститут, Ученые зап., вып. 5 (1958).
3. М. И. Туляганова, О проблеме Гольдбаха—Эйлера для мнимого квадратичного поля, Изв. АН УзССР, № 1 (1963), 11—17.
4. А. И. Виноградов, Применение ζ (s) к решету Эратосфена. Мат. сб., **41** (83) : 1 (1957), 49—80.
5. Б. В. Левин, Распределение «почти» простых чисел в полиномиальных последовательностях, Мат. сб. 61 (103) (1963), 389—408.
6. А. И. Виноградов, О нулях Зигеля, Доклады АН СССР, **151**, № 3 (1963).
7. Г. Вейль, Алгебраическая теория чисел, М. (1947).
8. E. Landau, Einführung in die elementare und analitische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale, Leipzig und Berlin (1927).
9. Б. В. Левин, Оценка специальных сумм и произведений, связанных с методом решета, Научные труды ТашГУ, вып. 228 (1963).
10. Б. В. Левин, Одномерное решето, Acta arithmetica, **10** (1964), 387–397.

A. SELBERGO RĖTIS ALGEBRINIŲ SKAIČIŲ KŪNUOSE

B. LEVINAS ir M. TULIAGANOVA

(*Reziumė*)

Straipsnyje nagrinėjama algebrinių skaičių kūnų (beveik pirminių idealų pasiskirstymas to kūno polinomuose. Naudojant vieno iš autorių ankščiau taikytą metodą [5], apeinami kai kurie sunkumai, kylantieji įrodinėjant tokio tipo dėsnius A. Vinogradovo metodu, ir gaunama eilė įvertinimų bet kurio polinomo atžvilgiu. Drauge gaunamas paprastesnis Brauerio–A. Vinogradovo formulės idealų klasių skaičiui įrodymas.

SIEVE OF A. SELBERG IN THE ALGEBRAIC NUMBER FIELDS

B. LEVIN and M. TULIAGANOVA

(*Summary*)

In this article we consider the distribution of almost prime ideals of algebraic number fields in the polynoms of the same fields. By using method of the article [5] we were able avoid the difficulties connected with the using A. Vinogradovs method ([1], [4]) by analogous questions. On one's way we received more simple proof of Brower–A. Vinogradovs theorem for the ideal class' number.