VI ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1

1966

ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ И СЕМИИНВАРИАНТОВ ЧИСЛА ВОССТАНОВЛЕНИЙ В СЛУЧАЕ ДИСКРЕТНОГО ПРОЦЕССА ВОССТАНОВЛЕНИЯ

В. ЛЮТИКАС

Пусть $\{X(t),\ t=0,\ 1,\ 2,\ \dots\}$ — дискретный процесс восстановления типа $F(x)$, т. е. $X(t)$ равно максимальному значению n, для которого $\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \leqslant t$, где $\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \dots$ — последовательность независимых неотрицательных одинаково распределенных случайных величин с общей функцией распределения $F(x)$, принимающих только целочисленные значения с вероятностями $p_k = P\{\xi_i = k\}$, $i=1,\ 2,\ 3,\ \dots$.

В. Л. Смитом доказано (см. 1), что в случае абсолютно непрерывного распределения $F(x)$, при условии $\mathbf{M}\,|\xi_i|^{m+l+1} < \infty$ семиинвариант m-того порядка случайной величины $X(t)$ выражается формулой

$$\Gamma_m(t) = \gamma_m t + \delta_m + \frac{\lambda(t)}{(1+t)^l},$$

где γ_m — рациональное выражение от $\mu_1,\ \mu_2,\ \dots,\ \mu_m$, $(\mu_i = \mathbf{M}\,|\xi_j|^i)$,

δ_m — рациональное выражение от $\mu_1,\ \mu_2,\ \dots,\ \mu_{m+1}$, $\lambda(t) - \lambda(t-\alpha) \to 0$, когда $t \to \infty$ при любом $\alpha > 0$.

Для решения подобной задачи в случае дискретного процесса восстановления принципиальный путь, использованный В. Л. Смитом, неприменим, поэтому мы будем исходить из формулы производящей функции (см. 3) моментов m-того порядка числа восстановлений $X(t)$:

$$G_m(z) = \sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{M}\,X^m(t)\,z^t = \frac{\sum\limits_{n=0}^{m-1} a_n^{(m)} P^{m-n}(z)}{(1-z)\,[1-P(z)]^m}, \tag{1}$$

где $|z| < 1$, $P(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k z^k$ и $a_n^{(m)}$ — постоянные, вычисляемые при помощи рекуррентного соотношения $a_n^{(m)} = (n+1)\ a_n^{(m-1)} + (m-n)\ a_{n-1}^{(m-1)}$, когда $a_1^{(2)} = 1$, $a_1^{(2)} = 1$ и $a_n^{(m)} = 0$ для всех $n \geqslant m$.

Лемма 1. *Пусть* $Q(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} T_k z^k$, *где* $T_k = \sum\limits_{i \geqslant k+1} p_i$, *тогда для* $|z| < 1$

$$G_m(z) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \frac{\sum\limits_{n=0}^{m-j} C_{m-n}^{j} a_n^{(m)}}{(1-z)^{m-j+1}\,Q^{m-j}(z)}. \tag{2}$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что $(1-z)\,Q(z)=1-P(z)$. Тогда из (1)

$$G_m(z)=\frac{\sum\limits_{n=0}^{m-1} Q_n^{(m)} \sum\limits_{j=0}^{m-n} (-1)^j C_{m-n}^j (1-z)^j Q^j(z)}{(1-z)^{m+1} Q^m(z)}. \tag{3}$$

Группируя числитель по степеням $(1-z)\,Q(z)$, непосредственно получаем (2).

Определим следующую последовательность вспомогательных функций

$$r_j(z)=\sum_{k=j}^{\infty} T_k\left(\sum_{i=0}^{k-j} \frac{(k-i-1)\,(k-i-2)\cdots(k-i-j+1)}{(j-1)!}\,z^i\right), \tag{4}$$

где $j=0,\ 1,\ \ldots,\ m+1$.

Пусть $\mathbf{M}\,|\xi_i|^s=\mu_s$. Верна следующая

Лемма 2. *Если* $\mu_{j+1}<\infty$, *то:*

1) $r_j(1)=\frac{1}{(j+1)!}\sum\limits_{l=1}^{j+1} S_{j+1}^{(l)}\,\mu_l$ *и* $Q^{(j)}(1)=\frac{1}{j+1}\sum\limits_{l=1}^{j+1} S_{j+1}^{(l)}\,\mu_l$, *где* $S_{j+1}^{(l)}$ *— числа Стирлинга первого рода;*

2) $r_j(1)-r_j(z)=(1-z)\,r_{j+1}(z)$.

Доказательство.

$$\left.\begin{aligned} r_j(1)&=\sum_{k=j}^{\infty} T_k\left(\sum_{i=0}^{k-j}\frac{(k-i-1)\,(k-i-2)\cdots(k-i-j+1)}{(j-1)!}\right)=\\ &=\frac{1}{(j-1)!}\sum_{k=j}^{\infty} T_k\left(\sum_{i=0}^{k-j}(k-i-1)\,(k-i-2)\cdots(k-i-j+1)\right)=\\ &=\frac{1}{j!}\sum_{k=j}^{\infty} k\,(k-1)\cdots(k-j+1)\,T_k. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Но $T_k=\sum\limits_{i\geqslant k+1} p_i$. Вставляя последние в (5), после несложных элементарных преобразований получаем $r_j(1)=\frac{1}{(j+1)!}\sum\limits_{l=1}^{j+1} S_{j+1}^{(l)}\,\mu_l$.

Так как $Q(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} T_k z^k$, то

$$Q^{(j)}(1)=\sum_{l=1}^{j} S_j^{(l)}\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^l\,T_k\right)=\frac{1}{j+1}\sum_{l=1}^{j+1} S_{j+1}^{(l)}\,\mu_l.$$

Из условия $\mu_{j+1}<\infty$ следует существование конечных моментов μ_s, где $s=1,\ 2,\ \ldots,\ j+1$. Тогда из вышедоказанного следует $r_j(1)<\infty$. Последнее дает право на тождественные преобразования разности $r_j(1)-r_j(z)$, что легко приводит к $r_j(1)-r_j(z)=(1-z)\,r_{j+1}(z)$.

Лемма 3. *Если* $\mu_{j+1}<\infty$, *то для любых целых положительных* j, m и n *существует соотношение*

$$\frac{r_j(z)}{(1-z)^m Q^n(z)}=\frac{r_j(1)}{(1-z)^m \mu_1^n}+R_{mnj}(z), \tag{6}$$

где

$$R_{mnj}(z)=\frac{r_j(1)\,r_1(z)\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_1^i\,Q^{n-1-i}(z)-\mu_1^n r_{j+1}(z)}{(1-z)^{m-1}\,Q^n(z)\,\mu_1^n}. \qquad (7)$$

Доказательство. Из условия $\mu_{j+1}<\infty$ следует $r_j(1)<\infty$.

Пусть
$$\frac{r_j(z)}{(1-z)^m\,Q^n(z)}=\frac{r_j(1)}{(1-z)^m\,\mu_1^n}+R_{mnj}(z).$$
Отсюда

$$R_{mnj}(z)=\frac{r_j(z)\,\mu_1^n-r_j(1)\,Q^n(z)}{(1-z)^m\,Q^n(z)\,\mu_1^n}=\frac{r_j(z)\,\mu_1^n-r_j(1)\,\mu_1^n+r_j(1)\,\mu_1^n-r_j(1)\,Q^n(z)}{(1-z)^m\,Q^n(z)\,\mu_1^n}=$$

$$=\frac{\mu_1^n\,[r_j(z)-r_j(1)]+r_j(1)\,[\mu_1-Q(z)]\sum\limits_{i=0}^{n-1}\mu_1^i\,Q^{n-1-i}(z)}{(1-z)^m\,Q^n(z)\,\mu_1^n}.$$

Но на основании леммы (2) имеем

$$r_j(z)-r_j(1)=(z-1)\,r_{j+1}(z)$$

и

$$\mu_1-Q(z)=r_0(1)-r_0(z)=(1-z)\,r_1(z).$$

Подстановкой этих результатов в предыдущую формулу получаем (7).

Пусть теперь

$$Q_t(z)=\sum_{k=0}^{t}T_k\,z^k \quad \text{и} \quad r_{jt}(z)=\sum_{k=j}^{t}T_k\left(\sum_{i=0}^{k-j}\frac{(k-i-1)\,(k-i-2)\cdots(k-i-j+1)}{(j-1)!}\,z^i\right).$$

Тогда верна следующая

Теорема 1. *Если* $\mu_{m+1}<\infty$, *то момент* m-того *порядка числа восстановлений* $X(t)$

$$\mathbf{M}X^m(t)=\gamma_{1m}\,t^m+\gamma_{2m}\,t^{m-1}+\cdots+\gamma_{mm}\,t+\gamma_{m+1,m}+R_m(t), \qquad (8)$$

где γ_{im} — *рациональное выражение от* $\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_i$, *а*

$$R_m(t)=\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\sum_{n=0}^{m-j}C_{m-n}^j\,a_n^{(m)}\left(\frac{1}{2\pi i\,\mu_1^{2(m-j)}}\int\limits_{|z|=\rho<1}\frac{W_{m-j+1,t}(z)}{Q_t^{m-j}(z)z^{t+1}}\,dz\right),$$

где $W_{kt}(z)$ — *целая рациональная функция от*

$$r_{1t}(z),\ r_{2t}(z),\ \ldots,\ r_{kt}(z).$$

Доказательство. Важность леммы (3) состоит в том, что она позволяет в разложении (6) получить остаток (7), который опять выражается через сумму рациональных дробей, подобных (6).∎

Таким образом на основании леммы (3) можно последовательно продолжать соответствующее разложение получаемых остатков.

Для частного случая (6) имеем

$$\frac{1}{(1-z)^{m-j+1}\,Q^{m-j}(z)}=\frac{1}{(1-z)^{m-j+1}\,\mu_1^{m-j}}+\frac{(m-j)\,r_1(1)}{(1-z)^{m-j}\,\mu_1^{m-j+1}}+$$

$$+\frac{\frac{(m-j+1)\,(m-j)}{2!}\,r_1^2(1)-(m-j)\,\mu_1\,r_2(1)}{(1-z)^{m-j-1}\,\mu_1^{m-j+2}}+\cdots+\frac{W_{m-j+1}(z)}{\mu_1^{2(m-j)}Q^{m-j}(z)}, \qquad (9)$$

где $W_{m-j+1}(z)$ — целая рациональная функция от

$$r_1(z),\ r_2(z),\ \ldots,\ r_{m-j+1}(z).$$

На основании леммы (2) ясно, что $r_j(1)=\frac{Q^{(j)}(1)}{j!}$. Тогда (9) можно записать в такой форме:

$$\frac{1}{(1-z)^{m-j+1}Q^{m-j}(z)}=\sum_{k=0}^{m-j}\frac{(-1)^k\left[\frac{1}{Q^{m-j}(z)}\right]_{z=1}^{(k)}}{k!\,(1-z)^{m-j-k+1}}+\frac{W_{m-j+1}(z)}{\mu_1^{2(m-j)}Q^{m-j}(z)}.$$

Вставляем последнее в (2) и получаем

$$\left.\begin{aligned}G_m(z)=\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\left\{\sum_{n=0}^{m-j}C^j_{m-n}\,a_n^{(m)}\sum_{k=0}^{m-j}\frac{(-1)^k\left[\frac{1}{Q^{m-j}(z)}\right]_{z=1}^{(k)}}{k!\,(1-z)^{m-j-k+1}}\right.+\\+\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\sum_{n=0}^{m-j}C^j_{m-n}\,a_n^{(m)}\cdot\frac{W_{m-j+1}(z)}{\mu_1^{2(m-j)}Q^{m-j}(z)}.\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

Так как $\mathbf{M}X^m(t)$ является коэффициентом при z^t в разложении $G_m(z)$, то из (10) следует

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{M}X^m(t)=\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\left\{\sum_{n=0}^{m-j}C^j_{m-n}\,a_n^{(m)}\sum_{k=0}^{m-j}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\left[\frac{1}{Q^{m-j}(z)}\right]_{z=1}^{(k)}\cdot\right.\\\left.\cdot\frac{(t+1)(t+2)\cdots(t+m-j-k)}{(m-j-k)!}\right\}+\\+\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\sum_{n=0}^{m-j}C^j_{m-n}\,a_n^{(m)}\left\{\frac{1}{\mu_1^{2(m-j)}t!}\cdot\left[\frac{W_{m-j+1}(z)}{Q^{m-j}(z)}\right]_{z=0}^{(t)}\right\}.\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

Но из определения $Q_t(z)$ и $W_{m-j+1,t}(z)$ следует, что

$$\left(\frac{W_{m-j+1}(z)}{Q^{m-j}(z)}\right)_{z=0}^{(t)}=\left(\frac{W_{m-j+1,t}(z)}{Q_t^{m-j}(z)}\right)_{z=0}^{(t)}.\quad(12)$$

Вставляя (12) в (11), получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{M}X^m(t)=\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\left\{\sum_{n=0}^{m-j}C^j_{m-n}\,a_n^{(m)}\sum_{k=0}^{m-j}\frac{(-1)^k}{k!}\left[\frac{1}{Q^{m-j}(z)}\right]_{z=1}^{(k)}\cdot\right.\\\left.\cdot\frac{(t+1)(t+2)\cdots(t+m-j-k)}{(m-j-k)!}\right\}+\\+\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\sum_{n=0}^{m-j}C^j_{m-n}\,a_n^{(m)}\left\{\frac{1}{\mu_1^{2(m-j)}t!}\left[\frac{W_{m-j+1,t}(z)}{Q_t^{m-j}(z)}\right]_{z=0}^{(t)}\right..\end{aligned}$$

Разлагая первую сумму по степеням t и применяя формулу Коши для вычисления производной, получаем (8).

Теперь важно получить оценку остатка $R_m(t)$.

Пусть нами изучается непериодический процесс восстановления. Последнее условие в терминах функции $P(z)$ равносильно требованию

$$P\left(ze^{2\pi i\cdot\frac{m}{n}}\right)\neq P(z),\quad |z|\leqslant 1,\quad(13)$$

для всех взаимно простых чисел $m\geqslant 1$ и $n\geqslant 2$. Но (13) равносильно

$$Q(e^{i\alpha})\neq O.$$

Теорема 2. *Если в случае непериодического процесса восстановления* $\mu_{m+l+1} < \infty$, *где* $m > 0$ *и* $l \geqslant 0$, *тогда*

$$R_m(t) = O\left(\frac{\ln t}{t^l}\right). \tag{14}$$

Доказательство. Теорему докажем методом А. О. Гельфонда [2].

Так как $Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k z^k$, где $T_k = \sum_{l \geqslant k+1} p_l > 0$, то все нули полинома $Q_t(z)$ находятся в области $|z| \geqslant 1 + \frac{p_t}{T_t}$. В силу (13) условия непериодичности процесса восстановления $Q(e^{i\alpha}) \neq 0$, поэтому $Q_t(z)$ в круге $|z| \leqslant 1$ при любом t в нуль не обращается. Тогда в интеграле

$\int\limits_{|z|=\rho<1} \frac{W_{m-j+1,t}(z)}{Q_t^{m-j}(z)\, z^{t+1}}\, dz$ контур $|z| = \rho < 1$ можно заменить на $|z| = 1$.

Проведем s-кратное интегрирование по частям

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{W_{m-j+1,t}(z)\, dz}{Q_t^{m-j}(z)\, z^{t+1}} = \frac{(t-s)!}{t!} \int\limits_{|z|=1} \left(\frac{W_{m-j+1,t}(z)}{Q_t^{m-j}(z)}\right)^{(s)} \cdot \frac{dz}{z^{t-s+1}}, \tag{15}$$

где в качестве s выбираем такое число, для которого удается эффективно оценить подинтегральную функцию.

Так как $W_{m-j+1,t}(z)$ — целая рациональная функция от

$$r_{1t}(z),\ r_{2t}(z),\ \ldots,\ r_{m-j+1,t}(z),$$

то

$$\left(\frac{W_{m-j+1,t}(z)}{Q_t^{m-j}(z)}\right)^{(s)} = \frac{U_{m-j+1,t}(z)}{Q_t^{m-j+s}(z)}, \tag{16}$$

где $U_{m-j+1,t}(z)$ — целая рациональная функция от производных $r_{jt}^{(i)}(z)$, где $i = 0, 1, 2, \ldots, s$, а $j = 0, 1, 2, \ldots, m-j+1$. Применяя (15) и (16) к результатам теоремы (1), находим

$$\left.\begin{aligned} R_m(t) &= \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \sum_{n=0}^{m-j} C_{m-n}^{j}\, a_n^{(m)} \left\{ \frac{(t-s)!}{2\pi i\, \mu_1^{s(m-j)}(t)!} \int\limits_{|z|=1} \frac{U_{m-j+1,t}(z)}{Q_t^{m-j+s}(z)} \cdot \frac{dz}{z^{t-s+1}} \right\} = \\ &= \frac{(t-s)!}{t!} \sum_{j=0}^{m} A_{mj} \int\limits_{|z|=1} \frac{U_{m-j+1,t}(z)}{Q_t^{m-j+s}(z)} \cdot \frac{dz}{z^{t-s+1}}, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

где A_{mj} $(j = 0, 1, 2, \ldots, m)$ — постоянные, равномерно ограниченные относительно t.

Нетрудно заметить, что в силу леммы (2) равномерная ограниченность интеграла

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{U_{m+1,t}(z)}{Q_t^{m+s}(z)} \cdot \frac{dz}{z^{t-s+1}} \tag{18}$$

относительно t и z влечет за собой равномерную ограниченность относительно тех же параметров и остальных интегралов из (17). Поэтому нам достаточно установить условия равномерной ограниченности толко (18) интеграла.

Пусть $s=l$. Тогда $U_{m+1,t}(z)$ представляет собой целую рациональную функцию от $r_{jt}^{(i)}(z)$, где $j=0, 1, 2, \ldots, m+1$, а $i=0, 1, 2, \ldots, l$. Условие $\mu_{m+l+1}<\infty$ эквивалентно сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} k^{m+l} T_k$. Поэтому в силу леммы (2)

$$|r_{m+1,t}^{(i)}(z)| \leqslant c_1 \quad \text{при} \quad |z| \leqslant 1, \quad i=0, 1, \ldots, l-1, \tag{19}$$

где c_1 — постоянное, независящее от t и z.

Но, также в силу леммы (2), равномерная ограниченность $r_{m+1,t}^{(i)}(z)$ где $i=0, 1, 2, \ldots, l-1$, относительно t и z, влечет за собой равномерную ограниченность всех $r_{jt}^{(i)}(z)$, где $i=0, 1, 2, \ldots, l$, а $j=0, 1, \ldots, m$.

Таким образом

$$|r_{jt}^{(i)}(z)| \leqslant c_1, \quad i=0, 1, 2, \ldots, l; \quad j=0, 1, 2, \ldots, m. \tag{20}$$

Ряд $Q(z)=\sum_{k=0}^{\infty} T_k z^k$ сходится абсолютно в круге $|z| \leqslant 1$, поэтому мы всегда сможем указать такое t_0, что

$\inf\limits_{|z| \leqslant 1} |Q_t(z)| \geqslant c_3$ для $t \geqslant t_0$, где c_3 постоянное, независящее от t и z.

Последний вывод, а также (19) и (20) позволяет из (18) получить

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{U_{m+1,t}(z)\,dz}{Q_t^{m+l}(z)\, z^{t-l+1}} = c_4 \int\limits_{|z|=1} r_{m+1,t}^{(l)}(z) \cdot \frac{dz}{z^{t-l+1}} + c_5, \tag{21}$$

где c_4 и c_5 — постоянные, независящие от t и z.

Формально применяя результаты А. О. Гельфонда (см. 2) для оценки интеграла в правой части (21) равенства, получаем

$$\int\limits_{|z|=1} r_{m+1,t}^{(l)}(z) \cdot \frac{dz}{z^{t-l+1}} = O(\ln t). \tag{22}$$

Из (19) и (20) ясно, что все интегралы кроме (21) в сумме (17) равномерно ограничены относительно t и z. Таким образом окончательно

$$R_m(t) = O\left(\frac{\ln t}{t^l}\right). \tag{23}$$

На основании теорем (1) и (2) получаем следующее общее

Следствие. Если $\mu_{m+l+1}<\infty$, где $m>0$ и $l \geqslant 0$, то в случае непериодического процесса восстановления момент m-того порядка числа восстановления

$$\mathbf{M} X^m(t) = \gamma_{1m} t^m + \gamma_{2m} t^{m-1} + \cdots + \gamma_{mm} t + \gamma_{(m+1)m} + O\left(\frac{\ln t}{t^l}\right), \tag{24}$$

где γ_{im} $(i=1, 2, \ldots, m+1)$ — рациональные выражения от $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l$.

Вычисление конкретных} моментов осуществляется путем, аналогичным доказательству теорем (1) и (2).

Теорема 3. *Если $\mu_{m+l+1}<\infty$, где $m>0$ и $l\geqslant 0$, то в случае непериодического процесса восстановления семиинвариант m-того порядка числа восстановления*

$$\Gamma_m(t)=\gamma_m(t)+\delta_m+O\left(\frac{\ln t}{t^l}\right), \tag{25}$$

где γ_m — рациональное выражение от $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$, а
δ_m — рациональное выражение от $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{m+1}$.

Доказательство. Основой доказательства вышеизложенной теоремы мы возмем любопытное комбинаторное тождество, доказанное В. Л. Смитом (см. 1) при вычислении семиинвариантов в случае непрерывного процесса восстановления.

Пусть расчлененное число

$$S\equiv(p_1^{r_1}, p_2^{r_2}, \ldots, p_k^{r_k}) \tag{26}$$

существует, если его степень d не меньше его веса w, где под степенью понимается сумма $d=r_1+r_2+\cdots+r_k$, а под весом — сумма $w=1\cdot r_1+ +2\cdot r_2+\cdots+k\cdot r_k$. Определим для такого числа коэффициент:

$$A(S)=\frac{d!}{(d-w)!\,(p_1!)^{r_1}(p_2!)^{r_2}\cdots(p_k!)^{r_k}}. \tag{27}$$

Пусть существует набор чисел (26) типа $S_1^{q_1} S_2^{q_2}\cdots S_m^{q_m}$, если существует каждое из чисел S_i $(i=1, 2, \ldots, m)$.

Определим для такого набора коэффициент

$$B(S_1^{q_1}\cdots S_m^{q_m})=\frac{(-1)^{q-1}(q-1)!\,[A(S_1)]^{q_1}\cdots[A(S_m)]^{q_m}}{q_1!\,q_2!\cdots q_m!}, \tag{28}$$

где $q=q_1+\cdots+q_m$.

Тогда верно следующее соотношение:

$$\sum{}^{*} B(S_1^{q_1} S_2^{q_2}\cdots S_m^{q_m})=0, \tag{29}$$

где суммирование проводится по всем существующим наборам чисел S_i $(i=1, 2, \ldots, m)$, степень которых d, вес w и $d>w+1$.

Мы покажем, что непосредственное алгебраическое вычисление семиинвариантов приводит нас к закономерностям, которые позволяют формально воспользоваться (29) тождеством В. Л. Смита.

Известно следующее соотношение между моментами и семиинвариантами случайной величины:

$$\frac{\Gamma_m(t)}{m!}=\sum_{d=1}^{m}\left\{\sum_{\substack{d_1+d_2+\cdots+d_s=d\\ m_1d_1+\cdots+m_sd_s=m}}\frac{(-1)^{d-1}(d-1)!}{d_1!\,d_2!\cdots d_s!}\prod_{\nu=1}^{s}\left(\frac{\mathrm{M}\,X^{m_\nu}(t)}{m_\nu!}\right)^{d_\nu}\right\}, \tag{30}$$

где d_ν и m_ν — положительны.

Пусть, соответственно (24),

$$\mathrm{M}\,X^{m_\nu}(t)=\gamma_{1m_\nu}t^{m_\nu}+\gamma_{2m_\nu}t^{m_\nu-1}+\cdots+\gamma_{m_\nu m_\nu}t+\gamma_{m_\nu+1,\,m_\nu}+O\left(\frac{\ln t}{t^{l+m-m_\nu}}\right).$$

Тогда из (30)

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_m(t)=m!\sum_{d=1}^{m}\Bigg\{ &\sum_{\substack{d_1+\cdots+d_s=d\\ m_1d_1+\cdots+m_sd_s=m}} \frac{(-1)^{d-1}(d-1)!}{d_1!\,d_2!\cdots d_s!}\prod_{\nu=1}^{s}\Bigg[\frac{1}{(m_\nu!)^{d_\nu}}\times \\ &\times(\gamma_{1m_\nu}t^{m_\nu}+\gamma_{2m_\nu}t^{m_\nu-1}+\cdots+\gamma_{m_\nu m_\nu}t+\gamma_{m_\nu+1,m_\nu})^{d_\nu}\Bigg]\Bigg\}+O\left(\frac{\ln t}{t^l}\right). \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Отсюда коэффициент при t^r в (31)

$$\left.\begin{aligned} N_r=m!\sum_{d=1}^{m}\Bigg\{ &\sum_{\substack{d_1+\cdots+d_s=d\\ m_1d_1+\cdots+m_sd_s=m}} \frac{(-1)^{d-1}(d-1)!}{(m_1!)^{d_1}(m_2!)^{d_2}\cdots(m_s!)^{d_s}}\times \\ &\times\prod_{\nu=1}^{s}\left(\sum_{\substack{k_{1m_\nu}+\cdots+k_{m_\nu+1,m_\nu}=d_\nu\\ k_{1m_\nu}m_\nu+k_{2m_\nu}(m_\nu-1)+\cdots+k_{m_\nu,m_\nu}=r}} \frac{\gamma_{1m_\nu}^{k_{1m_\nu}}\gamma_{2m_\nu}^{k_{2m_\nu}}\cdots\gamma_{m_\nu+1,m_\nu}^{k_{m_\nu+1,m_\nu}}}{k_{1m_\nu}!\,k_{2m_\nu}!\cdots k_{m_\nu+1,m_\nu}!}\right)\Bigg\}. \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Но из (11) находим, что

$$\gamma_{im_\nu}=\sum_{j=0}^{m_\nu}(-1)^j\Bigg\{\sum_{n=0}^{m_\nu-j}C_{m-n}^{j}\,a_1^{(m_\nu)}\cdot\sum_{k=0}^{m_\nu-j}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot$$

$$\left[\sum_{i_1+\cdots+i_{m_\nu-j}=k}\frac{k!}{i_1!\,i_2!\ldots i_{m_\nu-j}!}\prod_{v=1}^{m_\nu-j}\left[\frac{1}{Q(z)}\right]_{z=1}^{(i_v)}\cdot\frac{\left|S_{m_\nu-j-k+1}^{(i+1)}\right|}{(m_\nu-j-k)!}\right]\Bigg\}, \quad (33)$$

где $S_{m_\nu-j-k+1}$ — числа Стирлинга первого рода. Но так как $\left[\frac{1}{Q(z)}\right]_{z=1}^{(i_v)}$ является суммой наборов от $r_1(1)$, $r_2(1)$, $\ldots$, $r_{i_v}(1)$ типа (26), то N_r, соответственно доказательству В. Л. Смита (см. 1), является суммой коэффициентов типа (28). Поэтому при $r=2, 3, \ldots, m$ $N_r=0$, ибо при этих значениях r исполняется условие $d>w+1$. Таким образом $\Gamma_m(t)=N_1t+N_0+O\left(\frac{\ln t}{t^l}\right)$, что соответствует (25).

Конкретное вычисление N_1 и N_0 возможно при помощи (32) и (33).

Пользуюсь случаем выразить искреннюю благодарность канд. физ. мат. наук В. Статулявичюсу и канд. физ. мат. наук А. Аляшкявичене за ценные советы по поводу данной статьи.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
6.VI.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. W. L. Smith, On the cumulants of renewal processes, Biometrika, 1:2 (1959), 1–29.
2. А. О. Гельфонд, Оценка остаточного члена в предельной теореме для рекуррентных событий, Теория вероятностей и ее применения, 2, (1964), 327–331.
3. В. С. Лютикас, О производящей функции моментов числа восстановлений в случае дискретного процесса восстановления, Лит. мат. сб., V № 3, 1965.

ATSTATYMŲ SKAIČIAUS MOMENTŲ IR SEMIINVARIANTŲ SKAIČIAVIMAS DISKRETINIO ATSTATYMO PROCESO ATVEJU

V. LIUTIKAS

(*Reziumė*)

Remiantis autoriaus sukonstruota atstatymų skaičiaus momentų generuojančia funkcija nurodytas būdas atstatymų skaičiaus momentams ir semiinvariantams apskaičiuoti.

DIE RECHNUNG DER MOMENTE UND DER KOMULANTEN DES ZAHLES DER WIEDERSTELLUNGEN IM FALLE DES DISKRETEN WIEDERSTELLUNGPROZESSES

W. LIUTIKAS

(*Zusammenfassung*)

Mit Hilfe der erzeugenden Funktion der Momenten des Zahles der Wiederstellungen wird man die Formeln der Momente und der Komulanten des Zahles der Wiederstellungen abgeleitet.