VI ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1966

ОБ ОЦЕНКЕ БЫСТРОТЫ СХОДИМОСТИ В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ В СЛУЧАЕ УСТОЙЧИВОГО ПРЕДЕЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

А. А. МИТАЛАУСКАС

Рассмотрим последовательность независимых случайных величин

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n,\ \ldots \tag{1}$$

с функциями распределения $F_1(x),\ F_2(x),\ \ldots,\ F_n(x),\ \ldots$ и характеристическими функциями $f_1(t),\ f_2(t),\ \ldots,\ f_n(t),\ \ldots$. Пусть $g_\alpha(t,\ \lambda)$ – характеристическая функция устойчивого закона $G_\alpha(x,\ \lambda)$:

$$g_\alpha(t,\ \lambda)=\begin{cases}\exp\left\{-\lambda|t|^\alpha\exp\left[-i\frac{\pi}{2}\beta(1-|1-\alpha|)\operatorname{sgn}t\right]\right\}, & \alpha\neq 1,\\ \exp\left\{-\lambda|t|\left[\frac{\pi}{2}+i\beta\ln|t|\operatorname{sgn}t\right]\right\}, & \alpha=1,\end{cases}$$

где

$$0<\alpha\leqslant 2,\ |\beta|\leqslant 1,\ \lambda>0.$$

Обозначим

$$S_n=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k-A_n}{B_n},$$

где A_n и $B_n>0$ – некоторые нормирующие коэффициенты. Пусть $\bar{F}_n(x)$ и $\bar{f}_n(t)$ – соответственно, функция распределения и характеристическая функция нормированной суммы S_n. Пусть далее

$$\Omega_k(x)=F_k(x)-G_\alpha(x,\ \lambda_k),$$

$$\omega_k(t)=f_k(t)-g_\alpha(t,\ \lambda_k),$$

$$\nu_k(r)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|x|^r\,|d\Omega_k(x)|,$$

$$L_{rn}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\nu_k(r)}{B_n^r}.$$

В статье автора [1] приведены условия, при выполнении которых функция распределения $\bar{F}_n(x)$ сходится к функции распределения устойчивого закона. При выборе

$$B_n=\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

$$A_n=\begin{cases}0, & \alpha\neq 1,\\ \beta B_n\ln B_n, & \alpha=1,\end{cases}$$

доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть случайные величины последовательности* (1) *удовлетворяют условиям:*

1) *существует последовательность положительных чисел* λ_k, $k=1, 2, \ldots$, *таких, что* $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k=\infty$, *и* $\nu_k(\alpha)$ *конечны для всех* k;

2) *для любого* $\tau>0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^\alpha}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|>\tau B_n}|x|^\alpha|d\Omega_k(x)|=0;$$

3) *с ростом* n

$$\sum_{k=1}^{n}\nu_k(\alpha)=O(B_n^\alpha).$$

Тогда при $n\to\infty$ *равномерно по* x

$$\bar{F}_n(x)\to G_\alpha(x,\ 1).$$

В случае $\alpha=2$ условия теоремы равносильны условию Линдеберга, так что теорема 1 обобщает интегральную теорему Линдеберга—Феллера на случай любого устойчивого предельного закона.

Естественно попытаться оценить быстроту сходимости в теореме 1. В случае нормального предельного закона такие оценки получены при некоторых дополнительных требованиях на случайные величины (1). Для нашей цели требования теоремы 1 также приходится усилить. А именно, мы докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть существуют абсолютные моменты* $\nu_k(\varkappa)$ *порядка* $\varkappa=1+[\alpha]$ ($[\alpha]$ — *целая часть* α). *Если*

$$\nu_k(\alpha)\asymp\lambda_k, \tag{2}$$

т. е. существуют такие положительные постоянные c_1 *и* c_2, *что для всех* k

$$c_1\leqslant\frac{\lambda_k}{\nu_k(\alpha)}\leqslant c_2,$$

то

$$\sup_x|\bar{F}_n(x)-G_\alpha(x,\ 1)|\leqslant cL_{\varkappa n},$$

где c — *некоторая положительная постоянная.*

Ясно, что утверждение теоремы не тривиально при $L_{\varkappa n}\to 0$, а тогда все условия теоремы 1 выполняются, $\bar{F}_n(x)$ сходится к $G_\alpha(x,\ 1)$, и теорема 2 дает оценку быстроты этой сходимости.

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится следующая лемма.

Лемма. *В условиях теоремы 2 в интервале*

$$|t|\leqslant\varepsilon L_{\varkappa n}^{-\frac{1}{\varkappa-\alpha}}$$

(ε — *некоторое положительное число*) *имеет место оценка*

$$|\bar{f}_n(t)|\leqslant e^{-\frac{1}{4}|t|^\alpha}.$$

Доказательство леммы. Пусть

$$N_n=NB_nL_{\varkappa n}^{\frac{1}{\varkappa-\alpha}},$$

где N – достаточно большое число. Обозначим через $\mathfrak{M}_1$ множество тех k, $1 \leqslant k \leqslant n$, для которых $\lambda_k \leqslant KN_n^\alpha$, а через $\mathfrak{M}_2$ – множество тех k, $1 \leqslant k \leqslant n$, для которых $\lambda_k > KN_n^\alpha$ (величину K определим позднее). Преобразуем $|\bar{f}_n(t)|$ таким образом:

$$|\bar{f}_n(t)| = \prod_{k=1}^{n} \left| f_k\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| \leqslant \prod_{k \in \mathfrak{M}_1} \left| f_k\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| =$$

$$= \prod_{k \in \mathfrak{M}_1} \left| g_\alpha\left(\frac{t}{B_n}, \lambda_k\right)\right| \cdot \left| \prod_{k \in \mathfrak{M}_1} \left(1 + \frac{\omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right)}{g_\alpha\left(\frac{t}{B_n}, \lambda_k\right)}\right)\right| =$$

$$= \exp\left\{-\frac{\sum\limits_{k \in \mathfrak{M}_1} \lambda_k}{B_n^\alpha} |t|^\alpha + \left| \sum_{k \in \mathfrak{M}_1} \ln\left(1 + \frac{\omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right)}{g_\alpha\left(\frac{t}{B_n}, \lambda_k\right)}\right)\right|\right\}.$$

Покажем, что при достаточно большом N

$$\frac{\sum\limits_{k \in \mathfrak{M}_1} \lambda_k}{B_n^\alpha} > \frac{1}{2}, \tag{3}$$

или, что равносильно,

$$\sum_{k \in \mathfrak{M}_2} \lambda_k < \frac{1}{2} B_n^\alpha.$$

Действительно,

$$\sum_{k \in \mathfrak{M}_2} \lambda_k < c_2 \sum_{k \in \mathfrak{M}_2} \nu_k(\alpha) = c_2 \sum_{k \in \mathfrak{M}_2} \int_{|x| \leqslant N_n} |x|^\alpha |d\Omega_k(x)| +$$

$$+ c_2 \sum_{k \in \mathfrak{M}_2} \int_{|x| > N_n} |x|^\alpha |d\Omega_k(x)|.$$

Исследуем оба слагаемые отдельно. Первое из них дает

$$c_2 \sum_{k \in \mathfrak{M}_2} \int_{|x| \leqslant N_n} |x|^\alpha |d\Omega_k(x)| \leqslant c_2 \sum_{k \in \mathfrak{M}_2} N_n^\alpha \leqslant \frac{c_2}{K} \sum_{k \in \mathfrak{M}_2} \lambda_k \leqslant \frac{c_2}{K} B_n^\alpha < \frac{1}{4} B_n^\alpha$$

при достаточно большом K, а именно, при $K > 4c_2$.

Займемся теперь вторым слагаемым. Для него получаем

$$c_2 \sum_{k \in \mathfrak{M}_2} \int_{|x| > N_n} |x|^\alpha |d\Omega_k(x)| \leqslant \frac{c_2}{N_n^{\varkappa-\alpha}} \sum_{k \in \mathfrak{M}_2} \int_{|x| > N_n} |x|^\varkappa |d\Omega_k(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_2}{N_n^{\varkappa-\alpha}} \sum_{k=1}^{n} \nu_k(\varkappa) = \frac{c_2}{N^{\varkappa-\alpha}} B_n^\alpha < \frac{1}{4} B_n^\alpha$$

при достаточно большом N $\left(\text{при } N > (4c_2)^{\frac{1}{\varkappa-\alpha}}\right)$. Это и доказывает (3).

Воспользовавшись известным неравенством

$$\left| e^{iu} - \sum_{k=0}^{s} \frac{(iu)^k}{k!} \right| \leqslant \min\left(2\frac{|u|^s}{s!}, \frac{|u|^{s+1}}{(s+1)!}\right),$$

получаем

$$\left|\omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{i\frac{t}{B_n}x} - \sum_{j=0}^{\varkappa-1} \frac{1}{j!}\left(\frac{itx}{B_n}\right)^j \right| |d\Omega_k(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varkappa!} \int_{\left|\frac{tx}{B_n}\right| \leqslant 1} \left|\frac{tx}{B_n}\right|^{\varkappa} |d\Omega_k(x)| + \frac{2}{(\varkappa-1)!} \int_{\left|\frac{tx}{B_n}\right| > 1} \left|\frac{tx}{B_n}\right|^{\varkappa-1} |d\Omega_k(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varkappa!} \frac{|t|^{\alpha}}{B_n^{\alpha}} \int_{\left|\frac{tx}{B_n}\right| \leqslant 1} |x|^{\alpha} |d\Omega_k(x)| +$$

$$+ \frac{2}{(\varkappa-1)!} \frac{|t|^{\alpha}}{B_n^{\alpha}} \int_{\left|\frac{tx}{B_n}\right| > 1} |x|^{\alpha} |d\Omega_k(x)| \leqslant \frac{2}{(\varkappa-1)!} \frac{|t|^{\alpha}}{B_n^{\alpha}} \nu_k(\alpha), \tag{4}$$

что в интервале $|t| \leqslant \varepsilon L_{\varkappa n}^{-\frac{1}{\varkappa-\alpha}}$ ввиду (2) дает при $k \in \mathfrak{M}_1$:

$$\left|\omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| \leqslant \frac{2}{(\varkappa-1)!} \frac{\varepsilon^{\alpha}\lambda_k}{c_1 L_{\varkappa n}^{\frac{\alpha}{\varkappa-\alpha}} B_n^{\alpha}} \leqslant \frac{2\varepsilon^{\alpha} N^{\alpha} K}{(\varkappa-1)!\, c_1} = \varepsilon_1,$$

где $\varepsilon_1 > 0$ сколь угодно мало, если только ε достаточно мало. Так как в тех же предположениях

$$\left|g_{\alpha}\left(\frac{t}{B_n}, \lambda_k\right)\right|^{-1} = \exp\left\{\frac{\lambda_k |t|^{\alpha}}{B_n^{\alpha}}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{\frac{N_n^{\alpha} \varepsilon^{\alpha} L_{\varkappa n}^{-\frac{\alpha}{\varkappa-\alpha}}}{B_n^{\alpha}}\right\} = \exp\{(\varepsilon N)^{\alpha}\},$$

то и

$$\left|\frac{\omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right)}{g_{\alpha}\left(\frac{t}{B_n}, \lambda\right)}\right| < \varepsilon_2$$

при достаточно малом ε. Следовательно, справедливо такое разложение:

$$\sum_{k \in \mathfrak{M}_1} \ln\left(1 + \frac{\omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right)}{g_{\alpha}\left(\frac{t}{B_n}, \lambda_k\right)}\right) = \sum_{k \in \mathfrak{M}_1} \frac{\omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right)}{g_{\alpha}\left(\frac{t}{B_n}, \lambda_k\right)} + R_n,$$

где

$$R_n = \sum_{k \in \mathfrak{M}_1} \sum_{s=2}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s} \left[\frac{\omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right)}{g_{\alpha}\left(\frac{t}{B_n}, \lambda_k\right)}\right]^s.$$

Ясно, что

$$|R_n| \leqslant \sum_{k \in \mathfrak{M}_1} \sum_{s=2}^{\infty} \frac{1}{2} \left|\frac{\omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right)}{g_{\alpha}\left(\frac{t}{B_n}, \lambda_k\right)}\right|^s \leqslant \varepsilon_3 \sum_{k \in \mathfrak{M}_1} \left|\frac{\omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right)}{g_{\alpha}\left(\frac{t}{B_n}, \lambda_k\right)}\right|,$$

где $\varepsilon_3 > 0$ сколь угодно мало при достаточно малом ε.

Тем же путем, что и в (4), получается оценка:

$$\left|\omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| \leqslant \frac{2}{(\varkappa-1)!} \frac{|t|^{\varkappa}}{B_n^{\varkappa}} \nu_k(\varkappa).$$

Поэтому

$$\left|\sum_{k\in\mathfrak{M}_1}\ln\left(1+\frac{\omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right)}{g_\alpha\left(\frac{t}{B_n},\lambda_k\right)}\right)\right|\leqslant 2\,\frac{1+\varepsilon_3}{(\varkappa-1)!}\,e^{(\varepsilon N)^\alpha}\,\frac{|t|^\varkappa}{B_n^\varkappa}\sum_{k\in\mathfrak{M}_1}\nu_k(\varkappa)\leqslant$$

$$\leqslant 2\,\frac{1+\varepsilon_3}{(\varkappa-1)!}\,e^{(\varepsilon N)^\alpha}\,|t|^\varkappa L_{\varkappa n}. \tag{5}$$

Итак, для $|\bar{f}_n(t)|$ ввиду (3) и (5) имеем

$$|\bar{f}_n(t)|\leqslant\exp\left\{-\frac{1}{2}\,|t|^\alpha+2\,\frac{1+\varepsilon_3}{(\varkappa-1)!}\,e^{(\varepsilon N)^\alpha}|t|^\varkappa L_{\varkappa n}\right\}=$$

$$=\exp\left\{-\frac{1}{2}\,|t|^\alpha\left(1-\frac{4\,(1+\varepsilon_3)}{(\varkappa-1)!}\,e^{(\varepsilon N)^\alpha}|t|^{\varkappa-\alpha}L_{\varkappa n}\right)\right\}.$$

Так как $|t|^{\varkappa-\alpha}\leqslant\varepsilon^{\varkappa-\alpha}L_{\varkappa n}^{-1}$, то выражение в круглых скобках не меньше, чем

$$1-\frac{4\,(1+\varepsilon_3)}{(\varkappa-1)!}\,e^{(\varepsilon N)^\alpha}\varepsilon^{\varkappa-\alpha}>\frac{1}{2},$$

если ε достаточно мало. Отсюда уже следует утверждение леммы.

Для дальнейшего нам еще потребуется частный случай теоремы из работы [2], все требования которой здесь, очевидно, выполнены. При $r=\varkappa$ и $\lambda=1$ она дает $(\alpha\neq 1)$:

$$|\bar{f}_n(t)-g_\alpha(t,\,1)|\leqslant\Theta_\varkappa|t|^\varkappa e^{-|t|^\alpha}L_{\varkappa n}, \tag{6}$$

если только $|t|\leqslant L_{\varkappa n}^{-\frac{1}{\varkappa}}$. Как нетрудно убедиться, (6) имеет место и при $\alpha=1$.

Теперь мы уже в состоянии доказать нашу теорему 2.

По известной лемме Эссеена ([3], стр. 32, теорема 2 а) имеем

$$\sup_x|\bar{F}_n(x)-G_\alpha(x,\,1)|\leqslant c_3\int\limits_{|t|\leqslant\varepsilon L_{\varkappa n}^{-\frac{1}{\varkappa-\alpha}}}\left|\frac{\bar{f}_n(t)-g_\alpha(t,\,1)}{t}\right|dt+$$

$$+c_4\,\frac{\max|G'_\alpha(x,\,1)|}{\varepsilon}\,L_{\varkappa n}^{\frac{1}{\varkappa-\alpha}}.$$

Далее,

$$\int\limits_{|t|\leqslant\varepsilon L_{\varkappa n}^{-\frac{1}{\varkappa-\alpha}}}\left|\frac{\bar{f}_n(t)-g_\alpha(t,\,1)}{t}\right|dt\leqslant\int\limits_{|t|\leqslant L_{\varkappa n}^{-\frac{1}{\varkappa}}}\left|\frac{\bar{f}_n(t)-g_\alpha(t,\,1)}{t}\right|dt+$$

$$+\int\limits_{L_{\varkappa n}^{-\frac{1}{\varkappa}}\leqslant|t|\leqslant\varepsilon L_{\varkappa n}^{-\frac{1}{\varkappa-\alpha}}}\left|\frac{\bar{f}_n(t)}{t}\right|dt+\int\limits_{L_{\varkappa n}^{-\frac{1}{\varkappa}}\leqslant|t|\leqslant\varepsilon L_{\varkappa n}^{-\frac{1}{\varkappa-\alpha}}}\left|\frac{g_\alpha(t,\,1)}{t}\right|dt=I_1+I_2+I_3.$$

По (6) имеем

$$I_1\leqslant c_5 L_{\varkappa n}\int\limits_{|t|\leqslant L_{\varkappa n}^{-\frac{1}{\varkappa}}}|t|^{\varkappa-1}e^{-|t|^\alpha}dt\leqslant c_6 L_{\varkappa n}.$$

Далее, по только что доказанной нами лемме

$$I_2\leqslant L_{\varkappa n}\int\limits_{L_{\varkappa n}^{-\frac{1}{\varkappa}}\leqslant|t|\leqslant\varepsilon L_{\varkappa n}^{-\frac{1}{\varkappa-\alpha}}}|t|^{\varkappa-1}|\bar{f}_n(t)|\,dt\leqslant L_{\varkappa n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|t|^{\varkappa-1}e^{-\frac{1}{4}|t|^\alpha}dt=c_7 L_{\varkappa n}.$$

Совершенно аналогично

$$I_3 \leqslant c_8 L_{\varkappa n}.$$

Поэтому

$$\sup_x |\overline{F}_n(x) - G_\alpha(x,\ 1)| \leqslant c_3(c_6 + c_7 + c_8) L_{\varkappa n} + \frac{c_4}{\varepsilon} \max |G'_\alpha(x,\ 1)| L_{\varkappa n}^{\frac{1}{\varkappa - \alpha}} \leqslant c L_{\varkappa n},$$

что и требовалось доказать.

В заключение автор благодарит В. А. Статулявичюса, оказавшего существенную помощь в работе.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
18.IX.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Миталаускас, Об интегральной предельной теореме для сходимости к устойчивому предельному закону, Лит. мат. сб., 4, 2 (1964), 235–240.
2. А. Миталаускас, Асимптотическое разложение для независимых случайных величин в случае устойчивого предельного распределения, Лит. мат. сб., III, 1 (1963), 189–193.
3. C. G. Esseen, Fourier analysis of distribution functions, A mathematical study of Laplace-Gaussian law, Acta math., 77 (1945), 1–125.

KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERTINIMAS INTEGRALINĖJE RIBINĖJE TEOREMOJE STABILAUS RIBINIO DĖSNIO ATVEJU

A. MITALAUSKAS

(*Reziumė*)

Nagrinėjama nepriklausomų atsitiktinių dydžių normuotos sumos pasiskirstymo funkcija, konverguojanti į stabilią ribinę pasiskirstymo funkciją. Darbe duodamas šio konvergavimo greičio įvertinimas.

ÜBER DIE ABSCHÄTZUNG DER KONVERGENZSCHNELLIGKEIT IM INTEGRALEN GRENZWERTSATZ IM FALLE DES STABILEN GRENZGESETZES

A. MITALAUSKAS

(*Zusammenfassung*)

Wir betrachten eine Verteilungsfunktion der normierten Summe von unabhängiger Zufallsgrössen, die gegen eine stabile Grenzverteilungsfunktion strebt. In dieser Note ist eine Abschätzung der Schnelligkeit dieser Konvergenz gegeben.