VI ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1966

К ВОПРОСУ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ ЭЙЛЕРА $\varphi(n)$

М. М. ТЯН

Работа посвящается 50-летию академика Ю. В. Линника

Настоящая статья трактует вопрос о сумматорных формулах для сложных функций от $\frac{\varphi(n)}{n}$, а также задачу о распределении значений функции $\frac{\varphi(n)}{n}$ на отрезке [0, 1]. Интересно, что для теории чисел имеют значение даже некоторые численные подсчеты, относящиеся к последнему вопросу (см. работу 1).

Обозначим через $P_N\left(\frac{\varphi(n)}{n}<\lambda\right)$ количество натуральных чисел n $1\leqslant n\leqslant N$, для которых $\frac{\varphi(n)}{n}$ меньше данного вещественного числа λ и через

$$\nu_N\left(\frac{\varphi(n)}{n}<\lambda\right)=\frac{P_N\left(\frac{\varphi(n)}{n}<\lambda\right)}{N}.$$

Шёнберг доказал, что при $N\to\infty$ при каждом λ существует предел

$$\lim_{N\to\infty}\nu_N\left(\frac{\varphi(n)}{n}<\lambda\right)=v(\lambda), \tag{1}$$

причем предельная функция непрерывна. Доказательство теоремы Шёнберга можно найти в книге [2], гл. 4. Очевидно, что $v(\lambda)$ есть функция распределения.

По второй теореме Хелли (см. [3], стр. 220) для любой непрерывной на отрезке [0, 1] функции $F(x)$ существует предел

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}F\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)=\int_0^1 F(x)\,dv(x) \tag{2}$$

(этот предел мы будем также обозначать $A(F)$).

Остаточный член в соотношении (2) мы будем исследовать двумя методами. Первый метод состоит в исследовании остаточного члена в случае, когда $F(x)$ есть многочлен с дальнейшим применением оценок конструктивной теории функций. Необходимым элементом такой программы является следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть s — фиксированное натуральное число, k — фиксированное натуральное число. Обозначим*

$$T_s(N,k)=\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N\\ n\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,k)}}\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^s.$$

При $N\to\infty$

$$T_s(N,\ k)=\frac{1}{k}\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{s-1}\right)\prod_{p|k}\frac{\left(1-\frac{1}{p}\right)^{s-1}}{1+\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{s-1}}+$$

$$+O\left(\frac{s\ln^s N}{N}\right).$$

Постоянная в символе „O“ не зависит от s.

Лемму доказываем индукцией по s. Рассмотрим сначала случай $s=1$.

$$T_1(N,\ k)=\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N\\ n\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,k)}}\frac{\varphi(n)}{n}=\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N\\ n\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,k)}}\sum_{d\,|\,n}\frac{\mu(d)}{d}=\frac{1}{N}\sum_{d\leqslant n}\frac{\mu(d)}{d}\sum_{\substack{x\leqslant\left[\frac{N}{d}\right]\\ dx\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,k)}}1=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{\tau\,|\,k}\sum_{\substack{d\leqslant N\\ (d,\ k)=\tau}}\frac{\mu(d)}{d}\sum_{\substack{x\leqslant\left[\frac{N}{d}\right]\\ \frac{k}{d}\,|\,x}}1=\frac{1}{N}\sum_{\tau\,|\,k}\sum_{\substack{d\leqslant N\\ (d,\ k)=\tau}}\frac{\mu(d)}{d}\left[\frac{N\tau}{dk}\right]=$$

$$=\frac{1}{k}\sum_{\tau\,|\,k}\tau\sum_{\substack{d\leqslant N\\ (d,\ k)=\tau}}\frac{\mu(d)}{d^2}+O\left(\frac{1}{N}\sum_{\tau\,|\,k}\sum_{\substack{d\leqslant N\\ (d,\ k)=\tau}}\frac{1}{d}\right).$$

В сумме, стоящей под знаком „O“, каждое d не превосходящее N, встретится не более одного раза

$$T_1(N,\ k)=\frac{1}{k}\sum_{\tau\,|\,k}\tau\sum_{\substack{d\leqslant N\\ (d,\ k)=\tau}}\frac{\mu(d)}{d^2}+O\left(\frac{\ln N}{N}\right)=$$

$$=\frac{1}{k}\sum_{\tau\,|\,k}\frac{\tau}{\tau^2}\sum_{\substack{\left(l,\ \frac{k}{\tau}\right)=1\\ l\leqslant\frac{N}{\tau}}}\frac{\mu(l\tau)}{l^2}+O\left(\frac{\ln N}{N}\right).$$

Если $(l,\ \tau)>1$, то $\mu(l\tau)=0$, и поэтому

$$T_1(N,\ k)=\frac{1}{k}\sum_{\tau\,|\,k}\frac{\tau\mu(\tau)}{\tau^2}\sum_{\substack{(l,\ \tau)=1\\ \left(l,\ \frac{k}{\tau}\right)=1\\ l\leqslant\frac{N}{\tau}}}\frac{\mu(l)}{l^2}+O\left(\frac{\ln N}{N}\right).$$

Два условия, $(l,\ \tau)=1$ и $\left(l,\ \frac{k}{\tau}\right)=1$, можно заменить одним $(l,\ k)=1$

$$T_1(N,\ k)=\frac{1}{k}\sum_{\tau\,|\,k}\frac{\mu(\tau)}{\tau}\sum_{\substack{(l,\ k)=1\\ l\leqslant\frac{N}{\tau}}}\frac{\mu(l)}{l^2}+O\left(\frac{\ln N}{N}\right)=$$

$$=\frac{1}{k}\sum_{\tau\,|\,k}\frac{\mu(\tau)}{\tau}\left(\sum_{\substack{l=1\\ (l,\ k)=1}}^{\infty}\frac{\mu(l)}{l^2}+O\left(\frac{\tau}{N}\right)\right)+O\left(\frac{\ln N}{N}\right)=$$

$$=\frac{1}{k}\sum_{\tau\,|\,k}\frac{\mu(\tau)}{\tau}\sum_{\substack{l=1\\ (l,\ k)=1}}^{\infty}\frac{\mu(l)}{l^2}+O\left(\frac{1}{Nk}\sum_{\tau\,|\,k}|\mu(\tau)|\right)+O\left(\frac{\ln N}{N}\right)=$$

$$=\frac{1}{k}\sum_{\tau\,|\,k}\frac{\mu(\tau)}{\tau}\,\frac{\prod_p\left(1-\frac{1}{p^2}\right)}{\prod_{p|k}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)}+O\left(\frac{1}{Nk}\,2^{\nu(k)}\right)+O\left(\frac{\ln N}{N}\right),$$

где $\nu(k)$ количество различных простых делителей числа k. Но $2^{\nu(k)} \leqslant k$.

Поэтому

$$T_1(N, k) = \frac{1}{k} \prod_{p|k} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)}{\prod_{p|k}\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)} + O\left(\frac{\ln N}{N}\right) = \frac{\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)}{k \prod_{p|k}\left(1 + \frac{1}{p}\right)} + O\left(\frac{\ln N}{N}\right).$$

Для $s = 1$ лемма доказана.

Пусть $s > 1$ и лемма доказана для $1, 2, \ldots, s-1$

$$T_s(N, k) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{n \leqslant N \\ n \equiv 0 \pmod k}} \left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^s = \frac{1}{N} \sum_{\substack{n \leqslant N \\ n \equiv 0 \pmod k}} \left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^{s-1} \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{d \leqslant N} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{\substack{n \leqslant N \\ n \equiv 0 \pmod k \\ n \equiv 0 \pmod d}} \left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^{s-1}.$$

Обозначим общее наименьшее кратное чисел d и k через $[d, k]$, а общий наибольший делитель этих чисел — через (d, k)

$$[d, k] = \frac{dk}{(d, k)},$$

$$T_s(N, k) = \sum_{d \leqslant N} \frac{\mu(d)}{d} T_{s-1}(N, [d, k]).$$

По индуктивному предположению

$$T_{s-1}(N, [d, k]) = \frac{C_{s-1}}{[k, d]} \prod_{p | [k, d]} F_{s-1}(p) + O\left(\frac{(s-1)\ln^{s-1} N}{N}\right),$$

где обозначено

$$C_{s-1} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{s-2}\right) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{s-1}\right),$$

$$F_{s-1}(p) = \frac{\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{s-2}}{1 + \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{s-2}}.$$

Итак,

$$T_s(N, k) = \sum_{d \leqslant N} \frac{\mu(d)}{d} \left(\frac{C_{s-1}}{[k, d]} \prod_{p | [k, d]} F_{s-1}(p) + O\left(\frac{(s-1)\ln^{s-1} N}{N}\right)\right) =$$

$$= C_{s-1} \sum_{d \leqslant N} \frac{\mu(d)}{d[k, d]} \prod_{p | [k, d]} F_{s-1}(p) + O\left(\frac{(s-1)\ln^{s-1} N}{N} \sum_{d \leqslant N} \frac{1}{d}\right) =$$

$$= C_{s-1} \sum_{d \leqslant N} \frac{\mu(d)}{d \cdot [k, d]} \prod_{p | [k, d]} F_{s-1}(p) + O\left(\frac{(s-1)\ln^s N}{N}\right).$$

Из того, что

$$0 < F_{s-1}(p) < 1, \quad 0 < \prod_{p | [k, d]} F_{s-1}(p) < 1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{[k, d]} \leqslant \frac{1}{d}$$

следует, что

$$T_s(N, k) = C_{s-1} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d[k, d]} \prod_{p | [k, d]} F_{s-1}(p) + O\left(C_{s-1} \sum_{d \geqslant N+1} \frac{1}{d^2}\right) +$$

$$+ O\left(\frac{(s-1)\ln^{s-1} N}{N}\right).$$

Так как при $s>1$

$$C_{s-1}=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{s-2}\right)\leqslant\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{p}\right)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^2}\right)<1,$$

то

$$T_s(N,\ k)=C_{s-1}\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d[k,\ d]}\prod_{p\mid[k,\ d]}F_{s-1}(p)+O\left(\frac{(s-1)\ln^{s-1}N}{N}\right)+O\left(\frac{1}{N}\right)=$$

$$=\frac{C_{s-1}}{k}\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)(k,\ d)}{d^2}\prod_{p\mid[k,\ d]}F_{s-1}(p)+O\left(\frac{s\ln^s N}{N}\right)=$$

$$=\frac{C_{s-1}}{k}\sum_{\tau\mid k}\tau\sum_{\substack{d=1\\(k,\ d)=\tau}}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}\prod_{p\mid\frac{k,\ d}{\tau}}F_{s-1}(p)+O\left(\frac{s\ln^s N}{N}\right).$$

Обозначив $d=l\tau$, получаем

$$T_s(N,\ k)=\frac{C_{s-1}}{k}\sum_{\tau\mid k}\frac{1}{\tau}\sum_{\substack{l=1\\\left(l,\ \frac{k}{\tau}\right)=1}}^{\infty}\frac{\mu(l\tau)}{l^2}\prod_{p\mid lk}F_{s-1}(p)+O\left(\frac{s\ln^s N}{N}\right).$$

Но в сумме по l можно оставить лишь член с $(l,\ \tau)=1$, ибо при $(l,\ \tau)>1$ $\mu(l\tau)=0$

$$T_s(N,\ k)=\frac{C_{s-1}}{k}\sum_{\tau\mid k}\frac{1}{\tau}\sum_{\substack{l=1\\(l,\ \tau)=1\\\left(l,\ \frac{k}{\tau}\right)=1}}^{\infty}\frac{\mu(l)\mu(\tau)}{l^2}\prod_{p\mid lk}F_{s-1}(p)+O\left(\frac{s\ln^s N}{N}\right).$$

Два условия $(l,\ \tau)=1$ и $\left(l,\ \frac{k}{\tau}\right)=1$ равносильны одному $(l,\ k)=1$. Но если $(l,\ k)=1$, то

$$\prod_{p\mid lk}F_{s-1}(p)=\prod_{p\mid l}F_{s-1}(p)\prod_{p\mid k}F_{s-1}(p).$$

Итак,

$$T_s(N,\ k)=\frac{C_{s-1}}{k}\prod_{p\mid k}F_{s-1}(p)\sum_{\tau\mid k}\frac{\mu(\tau)}{\tau}\sum_{\substack{l=1\\(l,\ k)=1}}^{\infty}\frac{\mu(l)\prod\limits_{p\mid l}F_{s-1}(p)}{l^2}+O\left(\frac{s\ln^s N}{N}\right).$$

Поскольку $f(l)=\dfrac{\mu(l)\prod\limits_{p\mid l}F_{s-1}(p)}{l^2}$ есть мультипликативная функция, то-есть

$$f(l_1\ l_2)=f(l_1)\ f(l_2)$$

при $(l_1,\ l_2)=1$, то для

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,\ k)=1}}\frac{\mu(l)\prod\limits_{p\mid l}F_{s-1}(p)}{l^2}$$

есть Эйлерово произведение

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,\ k)=1}}^{\infty}\frac{\mu(l)\prod\limits_{p\mid l}F_{s-1}(p)}{l^2}=\prod_{\substack{p\\(p,\ k)=1}}\left(1-\frac{F_{s-1}(p)}{p^2}\right)=\frac{\prod\limits_{p}\left(1-\frac{F_{s-1}(p)}{p^2}\right)}{\prod\limits_{p\mid k}\left(1-\frac{F_{s-1}(p)}{p^2}\right)}.$$

Наконец

$$\sum_{\tau \mid k} \frac{\mu(\tau)}{\tau} = \prod_{p \mid k} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

$$T_s(N, k) = \frac{1}{k} C_{s-1} \prod \left(1 - \frac{F_{s-1}(p)}{p^2}\right) \frac{\prod\limits_{p \mid k} \left(1 - \frac{1}{p}\right)}{\prod\limits_{p \mid k} \left(1 - \frac{F_{s-1}(p)}{p^2}\right)} \cdot \prod_{p \mid k} F_{s-1}(p) + O\left(\frac{s \ln^s N}{N}\right).$$

Но,

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{p}\right) F_{s-1}(p)}{1 - \frac{F_{s-1}(p)}{p^2}} = \frac{\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{s-2}}{\left(1 - \frac{\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{s-2}}{p^2\left(1 + \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{s-2}\right)}\right)\left(1 + \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{s-2}\right)} =$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{s-1}}{1 + \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{s-2} - \frac{1}{p^2}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{s-2}} = \frac{\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{s-1}}{1 + \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{s-1}}.$$

Далее:

$$C_{s-1} \prod_p \left(1 - \frac{F_{s-1}(p)}{p^2}\right) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{s-2}\right)\left(1 - \frac{\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{s-2}}{p^2\left(1 + \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{s-2}\right)}\right) =$$

$$= \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{s-2}\right) \frac{1 + \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{s-2} - \frac{1}{p^2}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{s-2}}{1 + \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{s-2}} =$$

$$= \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{s-1}\right).$$

Таким образом,

$$T_s(N, k) = \frac{1}{k} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{s-1}\right) \prod_{p \mid k} \frac{\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{s-1}}{1 + \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{s-1}} + O\left(\frac{s \ln^s N}{N}\right),$$

что и требуется доказать.

Следствие. При любом натуральном s

$$\frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} \left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^s = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^s\right) + O\left(\frac{s \ln^s N}{N}\right).$$

Обозначим $\mu_0 = 1$

$$\mu_s = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^s\right) \quad s \geqslant 1.$$

Лемма 2. *Пусть* $P(x)$ *полином* $P(x) = \sum_{j=0}^{s} A_j x^j$. *Обозначим через*

$$k = \max_{0 \leqslant j \leqslant s} |A_j|.$$

Тогда

$$\frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} P\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right) = \sum_{j=0}^{s} A_j \mu_j + O\left(\frac{ks(\ln N)^s}{N}\right).$$

Доказательство:

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leq N} P\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)=\sum_{j=0}^{s} A_j\mu_j+O\left(\frac{k\sum\limits_{j=0}^{s} j\ln^j N}{N}\right)=$$

$$=\sum_{j=0}^{s} A_j\mu_j+O\left(\frac{sk}{N}\ \frac{\ln^{s+1}N-1}{\ln N-1}\right)=\sum_{j=0}^{s} A_j\mu_j+O\left(\frac{ks\ln^s N}{N}\right).$$

Лемма доказана.

Заметим, что для многочлена степени s $P(x)$

$$A(P)=\int_0^1 P(x)\ dv(x)=\sum_{j=0}^{s} A_j\mu_j.$$

Лемма 3. *Пусть многочлен*

$$P_s(x)=\sum_{j=0}^{s} A_j x^j$$

на отрезке $[0,\ 1]$ *удовлетворяет неравенству*

$$|P_s(x)|\leq 2M.$$

Для его коэффициентов справедлива оценка

$$\max|A_j|=O\left(\frac{(4e)^s}{s}M\right)$$

$(e=2{,}718\ldots)$ с обсолютной постоянной в символе „O“.

Доказательство. Возьмем на отрезке $[0,1]$ $s+1$ точку $i=0, 1, \ldots, s$. Так как многочлен s-ой степени определяется по своим значениям в $s+1$-ой точке, то по интерполяционной формуле Лагранжа мы имеем

$$P_s(x)=\sum_{i=0}^{s} P_s(x_i)\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_s)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_s)}.$$

Обозначим k-ую симметрическую функцию величин

$$x_0,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_s \text{ через } \Phi_i^{(k)}$$

$$A_k=\sum_{i=0}^{s}(-1)^k\Phi_i^{(k)}\frac{P_s(x_i)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_s)}.$$

Так как все x_i меньше или равны 1, то

$$|\Phi_i^{(k)}|\leq C_s^k\leq C_s^{\left[\frac{s}{2}\right]}.$$

По формуле Стирлинга

$$C_s^{\left[\frac{s}{2}\right]}=O\left(\frac{2^s}{\sqrt{s}}\right),$$

$$|A_k|=O\left(\sum_{i=0}^{s}\frac{2^s}{\sqrt{s}}\ \frac{|P_s(x_i)|}{\frac{i!\,(s-i)!}{s^s}}\right)=O\left(\frac{2^s}{\sqrt{s}}\ M\cdot\frac{s^s}{s!}\sum_{i=0}^{s}\frac{s!}{i!\,(s-i)!}\right)=$$

$$=O\left(\frac{4^s}{\sqrt{s}}\ \frac{s^s}{s!}\ M\right)=O\left(\frac{(4e)^s M}{s}\right).$$

Таким образом,

$$\max_{0\leqslant j\leqslant s}|A_j|=O\left(\frac{(4e)^s}{s}M\right),$$

что и требуется доказать.

Теорема 1. *Пусть* $P(x)$ *полином степени* s, *который на отрезке* $[0, 1]$ *удовлетворяет неравенству* $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|P(x)|\leqslant M$. *Тогда*

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}P\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)=\int_0^1 P(x)\,dv(x)+O\left(\frac{(4e)^s M(\ln N)^s}{N}\right)$$

с абсолютной постоянной в символе „O".

Эта теорема — непосредственное следствие лемм 2 и 3.

Теорема 2. *Дана целая функция порядка* $\rho F(x)$.

Обозначим $M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|F(x)|$. *При любом* $\varepsilon>0$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}F\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)=\int_0^1 F(x)\,dv(x)+O\left(\frac{M+1}{N^{\frac{1}{1+\rho}-\varepsilon}}\right).$$

Доказательство. Обозначим через $P_s(x)$ многочлен степени s, наименее уклоняющийся от $F(x)$ на отрезке $[0, 1]$. Обозначим

$$E_s=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|F(x)-P_s(x)|.$$

Очевидно, что при $s\geqslant 0$ $E_s\leqslant M$. Отсюда

$$|P_s(x)|\leqslant 2M.$$

Оценим максимум модуля коэффициентов многочлена $P_s(x)$. По лемме 3 этот максимум k оценивается как

$$k=O\left(\frac{(4e)^s}{s}M\right)=O(12^s M).$$

Рассмотрим

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}F\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)=\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}P_s\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)+\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}\left(F\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)-P_s\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)\right)=$$

$$=\int_0^1 P_s(x)\,dv(x)+\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}\left(F\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)-P_s\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)\right)+O\left(\frac{M\,12^s(\ln N)^s}{N}\right)=$$

$$=\int_0^1 F(x)\,dv(x)+\int_0^1\left(P_s(x)-F(x)\right)dv(x)+\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}\left(F\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)-P_s\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)\right)+$$

$$+O\left(M\frac{12^s(\ln N)^s}{N}\right).$$

Мы используем известную оценку для наилучших приближений аналитических функций (см. [4], стр. 395, формула (4))

$$E_s(F)\leqslant\frac{2M(r)}{r-1}\cdot\frac{1}{r^s}.$$

$M(r)$ — максимум модуля функции $F(x)$ на круге $|x|=r$.

Здесь мы можем брать любое r, поскольку функция целая. При достаточно больших r при любом $\varepsilon > 0$

$$E_s(F) \leqslant \frac{M(r)}{r^s} \leqslant \frac{e^{r^{\rho+\varepsilon}}}{r^s}.$$

Выберем r в зависимости от s

$$E_s(F) \leqslant \frac{e^s}{s^{\frac{s}{\rho+\varepsilon}}} \leqslant \frac{1}{s^{\frac{s}{\rho+2\varepsilon}}}$$

при достаточно больших s.

Итак, мы будем иметь

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N} F\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right) = \int_0^1 F(x)\,dv(x) + O\left(M\,\frac{(12\ln N)^s}{N}\right) + O\left(\frac{1}{s^{\frac{s}{\rho+2\varepsilon}}}\right) =$$

$$= \int_0^1 F(x)\,dv(x) + O\left((M+1)\,\frac{(12\ln N)^s}{N}\right) + O\left(\frac{M+1}{s^{\frac{s}{\rho+2\varepsilon}}}\right).$$

Возьмем

$$s = \left[\frac{\ln N}{\ln\ln N}\,\frac{\rho+2\varepsilon}{1+\rho}\right] + 1,$$

$$O\left(\frac{M+1}{s^{\frac{s}{\rho+2\varepsilon}}}\right) = O\left(\frac{M+1}{e^{\ln s\,\frac{s}{\rho+2\varepsilon}}}\right) = O\left(\frac{M+1}{e^{\ln s\,\frac{1}{1+\rho}\,\frac{\ln N}{\ln\ln N}}}\right),$$

$$\ln s \geqslant \ln\ln N - \ln\ln\ln N + \ln\frac{\rho+2\varepsilon}{1+\rho}.$$

(Последнее слагаемое — отрицательное число.) Поэтому

$$\ln s \geqslant \ln\ln N,$$

$$O\left(\frac{M+1}{s^{\frac{s}{\rho+2\varepsilon}}}\right) = O\left(\frac{M+1}{e^{\frac{\ln N}{1+\rho}}}\right) = O\left(\frac{M+1}{N^{\frac{1}{1+\rho}}}\right).$$

Далее

$$O\left((M+1)\,\frac{(12\ln N)^s}{N}\right) = O\left((M+1)\frac{e^{\frac{\ln N}{\ln\ln N}\,\frac{\rho+2\varepsilon}{1+\rho}\,(\ln 12+\ln\ln N)}}{N}\right).$$

Ясно, что при достаточно больших N

$$\ln 12 + \ln\ln N \leqslant \left(1 + \frac{2\varepsilon}{\rho+2\varepsilon}\right)\ln\ln N,$$

$$O\left((M+1)\frac{(12\ln N)^s}{N}\right) = O\left((M+1)\,\frac{e^{\ln N\left(\frac{\rho+2\varepsilon}{1+\rho}+\frac{2\varepsilon}{1+\rho}\right)}}{N}\right) =$$

$$= O\left((M+1)\,\frac{1}{N^{1-\frac{\rho+4\varepsilon}{1+\rho}}}\right) = O\left(\frac{M+1}{N^{\frac{1}{1+\rho}-\varepsilon'}}\right),$$

что и требуется доказать.

Теорема 3. *Пусть $F(x)$ функция, заданная на отрезке* $[0, 1]$. *Предположим, что эта функция аналитична внутри эллипса с фокусами в точках* 0 *и* 1 *и с суммой полуосей равной* R $\left(R>\frac{1}{2}\right)$. *Для такой функции*

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N} F\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)=\int_0^1 F(x)\,dv(x)+O\left(e^{-\ln(2R-\varepsilon)\left(\frac{\ln\frac{N}{M}}{\ln\ln N+\ln 12(2R-\varepsilon)}-1\right)}\right),$$

где $\varepsilon>0$ — *сколь угодно малая величина.*

Доказательство. Также как и при доказательстве теоремы 2 имеем:

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N} F\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)=\int_0^1 F(x)\,dv(x)-\int_0^1\Big(P_s(x)-F(x)\Big)\,dv(x)+$$

$$+\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}\left(F\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)-P_s\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)\right)+O\left(M\frac{12^s(\ln N)^s}{N}\right).$$

По теореме о приближении функций из класса $A_R(0, 1)$ (см. [4], стр. 295) при любом $\varepsilon>0$

$$|F(x)-P_s(x)|\leqslant\frac{1}{(2R-\varepsilon)^s}$$

при достаточно больших s

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N} F\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)=\int_0^1 F(x)\,dv(x)+O\left(\left(\frac{1}{2R-\varepsilon}\right)^s\right)+O\left(\frac{M\cdot 12^s(\ln N)^s}{N}\right),$$

s надо выбрать так, чтобы оба остаточных члена были равны. Это дает

$$\ln\frac{N}{M}=s\Big(\ln\ln N+\ln 12(2R-\varepsilon)\Big),$$

$$s=\left[\frac{\ln\frac{N}{M}}{\ln\ln N+\ln 12(2R-\varepsilon)}\right].$$

Итак,

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N} F\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)=\int_0^1 F(x)\,dv(x)+O\left(e^{-\ln(2R-\varepsilon)\left(\frac{\ln\frac{N}{M}}{\ln\ln N+\ln 12(2R-\varepsilon)}-1\right)}\right),$$

что и требуется доказать.

Теорема 4. *Предположим, что функция $F(x)$, заданная на отрезке* $[0, 1]$, *имеет r-ую производную, удовлетворяющую условию Липшица первого порядка.*

$$|F^{(r)}(x_1)-F^{(r)}(x_2)|<C\,|x_1-x_2|$$

(если $r=0$, то будем считать, что сама функция удовлетворяет условию Липшица первого порядка).

При этих условиях

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N} F\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)=\int_0^1 F(x)\,dv(x)+O\left(\frac{C(\ln\ln N)^{r+1}}{\left(\ln\frac{CN}{M}\right)^{r+1}}\right),$$

где константа в символе „O“ зависит лишь от r, а

$$M=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|F(x)|.$$

Доказательство. Также, как при доказательстве теоремы 1, имеем

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leq N} F\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)=\int_0^1 F(x)\,dv(x)+\int_0^1 \Big(P_s(x)-F(x)\Big)\,dv(x)+$$

$$+\frac{1}{N}\sum_{n\leq N}\left(F\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)-P_s\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)\right)+O\left(M\,\frac{12^s(\ln N)^s}{N}\right).$$

По теореме Джексона [4], стр. 275, при $s>r$

$$|F(x)-P_s(x)|=O\left(\frac{1}{s^r}\;\omega_r\left(\frac{1}{s}\right)\right),$$

где $\omega_r(\lambda)$ — модуль непрерывности функции $F^{(r)}(x)$; постоянная в символе „O" зависит лишь от r. По условиям теоремы

$$\omega_r\left(\frac{1}{s}\right)\leq C\,\frac{1}{s}.$$

Поэтому (а также используя $\int_0^1 dv(x)=1$), получаем:

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leq N} F\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)=\int_0^1 F(x)\,dv(x)+O\left(\frac{C}{s^{r+1}}\right)+O\left(M\frac{12^s(\ln N)^s}{N}\right).$$

Положим

$$s=\left[\frac{\ln\frac{CN}{M}-\ln\left((r+1)\ln\frac{CN}{M}\right)}{\ln(12\ln N)}\right],$$

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leq N} F\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)=\int_0^1 F(x)\,dv(x)+O\left(\frac{C\left(\ln(12\ln N)\right)^{r+1}}{\left(\ln\frac{CN}{M}\right)^{r+1}}\right)+$$

$$+O\left(\frac{C}{\left(\ln\frac{CN}{M}\right)^{r+1}}\right)=\int_0^1 F(x)\,dv(x)+O\left(\frac{C(\ln\ln N)^{r+1}}{\left(\ln\frac{CN}{M}\right)^{r+1}}\right),$$

что и требуется доказать.

Если на функцию наложено лишь ограничение, что она удовлетворяет условию Липшица $r=0$, то мы можем получить более сильный результат другим методом. Этот метод состоит в приближении $\frac{\varphi(n)}{n}$ периодическими функциями.

Формулировку и доказательство следующей теоремы мне сообщил Е. В. Новоселов.

Теорема 5. *Пусть функция $F(x)$ удовлетворяет на отрезке $[0, 1]$ условию Липшица первого порядка*

$$|F(x_1)-F(x_2)|<|C\,x_1-x_2|.$$

Обозначим $M=\max\limits_{0\leq x\leq 1}|F(x)|$. Фиксируем число β $0<\beta<1$. При $N\to\infty$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} F\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)=A(F)+O\left(\frac{C}{\ln N}+\frac{M}{N^{\beta+o(1)}}\right),$$

где постоянная в символе „O" зависит лишь от β.

Обозначим через T_N общее наименьшее кратное чисел 1, 2, ..., $[(1-\beta)\ln N]$. Поскольку

$$\ln T_N = \sum_{n=1}^{[(1-\beta)\ln N]} \Lambda(n),$$

то по асимптотическому закону распределения простых чисел

$$T_N \leqslant N^{(1-\beta)\left(1+\overline{o}(1)\right)}.$$

Разделим N на T_N (с остатком)

$$N = R_N + \Theta T_N.$$

Далее обозначим через $R_N(m)$ положительный остаток от деления натурального числа m на R_N (т.е. $R_N(m)$ может равняться R_N).

Полагая $f(m) = F\left(\frac{\varphi(m)}{m}\right)$, будем иметь:

$$\left|\frac{1}{R_N}\sum_{m=1}^{R_N} f(m) - \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} f(m)\right| = \left|\left(1-\frac{R_N}{N}\right)\frac{1}{R_N}\sum_{m=1}^{R_N} f(m) - \frac{1}{N}\sum_{m=R_N+1}^{N} f(m)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|1-\frac{R_N}{N}\right| M + \frac{1}{N}\left|N-R_N\right| M \leqslant MN^{-\beta\left(1+o(1)\right)}.$$

Поскольку функция $f\left(R_N(m)\right)$ периодическая с периодом R_N, то

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{m=1}^{T} f\left(R_N(m)\right) = \frac{1}{R_N}\sum_{m=1}^{R_N} f(m).$$

Мы имеем

$$\left|\frac{1}{R_N}\sum_{m=1}^{R_N} f(m) - \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{m=1}^{T} f(m)\right| = \left|\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{m=1}^{T}\left(f\left(R_N(m)\right) - f(m)\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{C}{T}\sum_{m=1}^{T}\left|\frac{\varphi\left(R_N(m)\right)}{R_N(m)} - \frac{\varphi(m)}{m}\right| = \overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{C}{T}\sum_{m=1}^{T}\left|\sum_{d\mid R_N(m)}\frac{\mu(d)}{d} - \sum_{d\mid m}\frac{\mu(d)}{d}\right|.$$

Поскольку R_N делится на T_N, которое в свою очередь делится на все натуральные числа $1 \leqslant n \leqslant (1-\beta)\ln N$, то делители, не превосходящие $(1-\beta)\ln N$, у m и у $R_N(m)$ — одинаковые

$$\left|\frac{1}{R_N}\sum_{m=1}^{R_N} f(m) - \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{m=1}^{T} f(m)\right| \leqslant \overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{C}{T}\sum_{m=1}^{T}\left|\sum_{d\mid R_N(m)}\frac{\mu(d)}{d} - \sum_{d\mid m}\frac{\mu(d)}{d}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{C}{T}\sum_{m=1}^{T}\left|\sum_{\substack{d\mid R_N(m)\\ d>(1-\beta)\ln N}}\frac{\mu(d)}{d} - \sum_{\substack{d\mid m\\ d>(1-\beta)\ln N}}\frac{\mu(d)}{d}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{C}{T}\sum_{m=1}^{T}\sum_{\substack{d\mid R_N(m)\\ d>(1-\beta)\ln N}}\frac{1}{d} + \overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{C}{T}\sum_{m=1}^{T}\sum_{\substack{d\mid m\\ d>(1-\beta)\ln N}}\frac{1}{d} \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{C}{T} \sum_{\substack{d=1\\ d>(1-\beta)\ln N}}^{T} \frac{1}{d} \sum_{\substack{1\leqslant m\leqslant T\\ m=dx+R_N y\\ 1\leqslant dx\leqslant R_N}} 1 + \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{C}{T} \sum_{\substack{d=1\\ d>(1-\beta)\ln N}}^{T} \frac{1}{d}\left[\frac{T}{d}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{C}{T} \sum_{\substack{d=1\\ d>(1-\beta)\ln N}}^{T} \frac{1}{d} \sum_{x=1}^{\left[\frac{R_N}{d}\right]} \left(\left[\frac{T-dx}{R_N}\right]+1\right) + C \sum_{d>(1-\beta)\ln N}^{\infty} \frac{1}{d^2} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{T\to\infty} C \sum_{\substack{d=1\\ d>(1-\beta)\ln N}}^{T} \frac{1}{d^2} - \underline{\lim_{T\to\infty}} \frac{C}{TR_N} \sum_{\substack{d=1\\ d>(1-\beta)\ln N}}^{T} \sum_{x=1}^{\left[\frac{R_N}{d}\right]} x + \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{CR_N}{T} \sum_{\substack{d=1\\ d>(1-\beta)\ln N}}^{T} \frac{1}{d^2} +$$

$$+ O\left(\frac{C}{(1-\beta)\ln N}\right) = O\left(\frac{C}{(1-\beta)\ln N}\right) - \lim_{T\to\infty} \frac{CR_N}{3T} \sum_{d=1}^{T} \frac{1}{d^2} = O\left(\frac{C}{(1-\beta)\ln N}\right).$$

Итак, мы получаем:

$$\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} f(m) - \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_{m=1}^{T} f(m) = O\left(\frac{C}{(1-\beta)\ln N}\right) + O\left(\frac{M}{N^{\beta+o(1)}}\right).$$

Теорема доказана.

Теорема 6*. *Пусть* λ, $0<\lambda<1$.

Справедлива оценка

$$\nu_N\left(\frac{\varphi(n)}{n}<\lambda\right) = v(\lambda) + O\left(\frac{1}{\lambda\ln\ln N}\right) + O\left(\frac{1}{\ln\ln\ln N}\right).$$

Доказательство. Зафиксируем N. Обозначим через

$$P_T\left(\left|\frac{\varphi(m)}{m} - \frac{\varphi(R_N(m))}{R_N(m)}\right| \geqslant \sigma\right),$$

где $\lambda>\sigma>0$ — фиксированное вещественное число, количество натуральных m $1\leqslant m\leqslant T$, для которых

$$\left|\frac{\varphi(m)}{m} - \frac{\varphi(R_N(m))}{R_N(m)}\right| \geqslant \sigma.$$

Через

$$\bar{\pi}\left(\left|\frac{\varphi(m)}{m} - \frac{\varphi(R_N(m))}{R_N(m)}\right| \geqslant \sigma\right)$$

обозначим

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} P_T\left(\left|\frac{\varphi(m)}{m} - \frac{\varphi(R_N(m))}{R_N(m)}\right| \geqslant \sigma\right).$$

---

* Доказательство этой теоремы мы проведем в форме, которую сообщил мне Е. В. Новоселов. Эта форма яснее и короче моего первоначального доказательства.

Очевидно (закон больших чисел)

$$\bar{\pi}\left(\left|\frac{\varphi(m)}{m}-\frac{\varphi(R_N(m))}{R_N(m)}\right| \geqslant \sigma\right)=\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{P_T\left(\frac{1}{\sigma}\left|\frac{\varphi(m)}{m}-\frac{\varphi(R_N(m))}{R_N(m)}\right|\geqslant 1\right)}{T}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\sigma}\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{T}\sum_{m=1}^{T}\left|\frac{\varphi(m)}{m}-\frac{\varphi(R_N(m))}{R_N(m)}\right|.$$

При доказательстве теоремы 5 мы оценивали выражение, которое стоит в правой части неравенства. Взяв $\beta=\frac{1}{2}$, получаем

$$\bar{\pi}\left(\left|\frac{\varphi(m)}{m}-\frac{\varphi(R_N(m))}{R_N(m)}\right|\geqslant\sigma\right)\leqslant\frac{C_1}{\sigma\ln N},$$

где C_1 — абсолютная постоянная.

Мы имеем

$$P_T\left(\frac{\varphi(R_N(m))}{R_N(m)}<\lambda\right)\leqslant P_T\left(\frac{\varphi(m)}{m}<\lambda+\sigma\right)+P_T\left(\left|\frac{\varphi(m)}{m}-\frac{\varphi(R_N(m))}{R_N(m)}\right|\geqslant\sigma\right)$$

и

$$P_T\left(\frac{\varphi(m)}{m}<\lambda\right)\leqslant P_T\left(\left|\frac{\varphi(m)}{m}-\frac{\varphi(R_N(m))}{R_N(m)}\right|\geqslant\sigma\right)+P_T\left(\frac{\varphi(R_N(m))}{R_N(m)}\right).$$

Поскольку $\frac{\varphi(R_N(m))}{R_N(m)}$ периодическая функция с периодом R_N, то

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}P_T\left(\frac{\varphi(R_N(m))}{R_N(m)}<\lambda\right)=\nu_{R_N}\left(\frac{\varphi(m)}{m}<\lambda\right).$$

Отсюда следует, что

$$\left|\nu_{R_N}\left(\frac{\varphi(m)}{m}<\lambda\right)-v(\lambda)\right|\leqslant\frac{C_1}{\sigma\ln N}+\max\left(v(\lambda+\sigma)-v(\lambda),\, v(\lambda)-v(\lambda-\sigma)\right).$$

Далее также, как в начале доказательства теоремы 5 с $\beta=\frac{1}{2}$, обозначая через $\chi_\lambda(x)$ характеристическую функцию (индикатор) интервала $(o\ \lambda)$, получаем:

$$\left|\nu_{R_N}\left(\frac{\varphi(m)}{m}<\lambda\right)-\nu_N\left(\frac{\varphi(m)}{m}<\lambda\right)\right|=\left|\frac{1}{R_N}\sum_{m=1}^{R_N}\chi_\lambda\left(\frac{\varphi(m)}{m}\right)-\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}\chi_\lambda\left(\frac{\varphi(m)}{m}\right)\right|\geqslant\frac{1}{N^{1/_3}}.$$

Мы получим:

$$\left|\nu_N\left(\frac{\varphi(m)}{m}<\lambda\right)-v(\lambda)\right|\leqslant\frac{C_1}{\sigma\ln N}+\frac{1}{N^{1/_3}}+v(\lambda+\sigma)-v(\lambda-\sigma).$$

Положим

$$F(u)=v(e^u),\quad v(\lambda)=F(\ln\lambda).$$

$F(u)$ есть также функция распределения. Для каждого простого числа p определим случайную величину ξ_p с законом распределения

значение	$\ln\frac{p-1}{p}$	0
вероятность	$\frac{1}{p}$	$1-\frac{1}{p}$

Шёнберг установил (см. также [2], гл. 4), что функция распределения бесконечной суммы независимых случайных величин

$$\xi_2+\xi_3+\xi_5+\ldots+\xi_p+\ldots$$

совпадает с $F(u)$. Пусть P — растущее число. Обозначим через $F_p(u)$ функцию распределения, которая имеет скачки в точках

$$\ln\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)\quad p_i\leqslant P$$

величины

$$\frac{1}{p_1\ldots p_r}\prod_{\substack{p\neq p_i\\ p_i\leqslant P}}\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

$F_P(u)$ входит в качестве независимого слагаемого в $F(u)$. По лемме о концентрации П. Леви (см., напр., [5], стр. 12) при любом $\tau>0$

$$\bar{Q}(\tau)=\sup_u\Big(F(u+\tau)-F(u)\Big)\leqslant\sup_u\Big(F_P(u+\tau)-F_P(u)\Big).$$

Обозначим через $v_p(x)=F_p(\ln x)$. Далее обозначим через $Q(l)$ концентрацию функции $v(\lambda)$

$$Q(l)=\sup_x\Big(v(lx)-v(x)\Big).$$

Мы получаем при любом $l>1$

$$Q(l)\leqslant\sup_x\Big(v_P(lx)-v_P(x)\Big)=Q_P(l).$$

Максимальный скачок функции $v_P(x)$ имеет место при $x=1$, и он равен $\prod\limits_{p\leqslant P}\left(1-\frac{1}{p}\right)$; минимальное расстояние между точками скачка больше или равно $\frac{1}{\prod\limits_{p\leqslant P}p}$. Поэтому, если взять $l=1+\frac{1}{\prod\limits_{p\leqslant P}p}$, то

$$Q_P(l)\leqslant\prod_{p\leqslant P}\left(1-\frac{1}{p}\right),\quad Q(l)\leqslant\frac{C_3}{\ln P}.$$

Возьмем $\sigma=\frac{l-1}{l+1}\lambda$. Тогда

$$\lambda+\sigma=l(\lambda-\sigma)$$

и мы получим

$$\left|\nu_N\left(\frac{\varphi(m)}{m}<\lambda\right)-v(\lambda)\right|\leqslant\frac{C_3\prod\limits_{p\leqslant P}p}{\lambda\ln N}+\frac{1}{N^{1/3}}+\frac{C_3}{\ln P}\leqslant\frac{C_4e^{2P}}{\lambda\ln N}+\frac{1}{N^{1/3}}+\frac{C_1}{\ln R}.$$

Возьмем $P=\frac{\ln\ln N}{2}-\ln\ln\ln N$, мы получаем утверждение теоремы.

Проведенное исследование указывает на зависимость оценки разности

$$\nu_N\left(\frac{\varphi(n)}{n}<\lambda\right)-v(\lambda)$$

от дифференциальных свойств функции $v(\lambda)$. Поскольку $v(\lambda)$ непрерывная монотонная функция, то у нее почти для всех λ существует производная (см. [6], стр. 230). Эрдёш (см. [7]) доказал, что эта производная почти всюду равна нулю. Отсюда вытекает, что для почти всех λ

$$\nu_N\left(\frac{\varphi(n)}{n}<\lambda\right)=v(\lambda)+o\left(\frac{1}{\sqrt{\ln N}}\right).$$

Я выражаю благодарность Е. В. Новоселову за ценную консультацию.

Горький

Поступило в редакцию
25.VIII.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Ward, The intrinsic divisors of Lehmer numbers, Annals of Mathematics, **62**, N 2 (1955), 230–236.
2. М. Кац, Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел, М., 1963.
3. Б. В. Гнеденко, Курс теории вероятностей, М., 1954.
4. А. Ф. Тиман, Теория приближений, Т., 1960.
5. Ю. В. Линник, Разложения вероятностных законов, Издательство ЛГУ, 1960.
6. И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, 1957.
7. P. Erdös, On the smoothess of the asymptotic distribution of additive arithmetical functions, Amer. Journ. Math., **61** (1939), 722–725.

EULERIO FUNKCIJOS $\varphi(n)$ REIKŠMIŲ PASISKIRSTYMO KLAUSIMU

M. TIAN

(*Reziumė*)

Įrodoma keletas teoremų apie funkcijos $\varphi(n)/n$ pasiskirstymą. Čia $\varphi(n)$ yra Eulerio funkcija. Įvertinamas liekamasis narys formulėje

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}F\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)-A(F),$$

kur $F(u)$ yra tolydinė arba analizinė funkcija segmente [0, 1].

SUR LA DISTRIBUTION DES VALEURS DE LA FONCTION D'EULER

M. TJAN

(*Résumé*)

Nous démontrons ici les théorèmes relatifs à la répartition de la fonction $\frac{\varphi(n)}{n}$, où $\varphi(n)$ est la fonction d'Euler. Nous donnons aussi l'estimation de la reste dans la formule suivante

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}F\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)-A(F),$$

où $F(u)$ est la fonction continue ou analytique dans le segment [0, 1].