VI ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК I
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1966

ВСЕСОЮЗНАЯ ШКОЛА ПО МЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ В ПАЛАНГЕ

С 5 по 17 сентября 1965 г. в гор. Паланга (Литовская ССР) Математическим институтом им. В. А. Стеклова АН СССР, Вильнюсским Государственным университетом им. В. Капсукаса и Институтом физики и математики АН Литовской ССР была организована Всесоюзная школа по метрической теории чисел. Бюро Отделения математики АН СССР одобрило организацию этой школы и создало Оргкомитет в следующем составе: председатель — академик АН Литовской ССР проф. И. П. Кубилюс, члены — академик АН СССР проф. Ю. В. Линник, доктор физ.-мат. наук А. Г. Постников, ученый секретарь — К. Ю. Булота.

Организованная школа явилась первым такого рода мероприятием по теории чисел и вызвала значительный интерес как со стороны специалистов, так и со стороны молодых научных работников, для которых и была организована. В занятиях участвовало свыше 60 человек из 23 городов Советского Союза. К сожалению часть из приглашенных докладчиков, изъявивших свое согласие участвовать в работе школы, не смогла приехать. Участники школы прослушали 23 доклада. В программу был включен ряд основных докладов-лекций по метрической и вероятностной теории чисел (их читали М. Б. Барбан, Н. М. Коробов, И. П. Кубилюс, А. Г. Постников, Б. Ф. Скубенко, В. Г. Спринджук), а также несколько обзорных докладов и кратких сообщений.

Участники школы имели довольно напряженный распорядок дня. С утра, как правило, заседания проходили с 10 до 14 часов, а во второй половине дня — с 17 до 19 часов. Часто на заседаниях возникали оживленные дискуссии.

Ниже публикуется программа работы школы и резюме некоторых докладов.

IX.5, воскресенье

$11—11^{30}$	Открытие.
$11^{30}—14^{30}$	А. Г. ПОСТНИКОВ, Распределение дробных долей.

IX.6, понедельник

10—12	А. Г. ПОСТНИКОВ, Распределение дробных долей.
12—14	Г. А. ФРЕЙМАН, Общие закономерности в аддитивной теории чисел.
17—19	А. Г. ПОСТНИКОВ, Распределение дробных долей.

IX. 7, вторник

10—12	Н. М. КОРОБОВ, О некоторых задачах теории чисел, возникающих в вопросах приближенного анализа.
12—14	А. Г. ПОСТНИКОВ, Задачи спектральной теории дифференциальных операторов.
17—19	Н. М. КОРОБОВ, О некоторых задачах теории чисел, возникающих в вопросах приближенного анализа.

IX.8, среда

10—12	И. П. КУБИЛЮС, Вероятностные методы в теории чисел.
12—14	Б. В. ЛЕВИН, А. С. ФАЙНЛЕЙБ, Поведение сумм мультипликативных функций и приложение к вероятностной теории чисел.
17—18	И. П. КУБИЛЮС. Вероятностные методы в теории чисел.

IX.9, четверг

10—12	В. Г. СПРИНДЖУК, Метрические задачи теории диофантовых приближений.
12—14	Л. А. КОГАН, Точные формулы в арифметике квадратичных форм.
17—19	Семинар.

IX.10, пятница

10—12	П. Г. КОГОНИЯ. Некоторые вопросы рациональной аппроксимации.
12—14	Б. Ф. СКУБЕНКО, Асимптотическое распределение целых точек на детерминантной поверхности и эргодические теоремы поворотов.
17—19	В. Г. СПРИНДЖУК, Метрические задачи теории диофантовых приближений.

IX.11, суббота

Экскурсия.

IX.12, воскресенье

Экскурсия.

IX.13, понедельник

10—12	А. А. БУХШТАБ, Комбинаторное усиление метода эратосфенова решета.
12—14	М. Б. БАРБАН, Теория L-рядов Дирихле.
17—19	Е. В. НОВОСЕЛОВ, Полиадический анализ.

IX.14, вторник

10—12	М. Б. БАРБАН, Аддитивные функции на редких множествах.
12—14	Б. Ф. СКУБЕНКО, Асимптотическое распределение целых точек на детерминантной поверхности и эргодические теоремы поворотов.
17—17^{30}	М. И. ТУЛЯГАНОВА, Решето Сельберга для алгебраических числовых полей.
17^{30}—18	Х. М. АНДРУХАЕВ, «Большое решето» и плотностные теоремы в алгебраических числовых полях.
18—19	Н. М. КОРОБОВ (читал В. М. СОЛОДОВ). О некоторых задачах теории чисел, возникающих в вопросах приближенного анализа.

IX.15, среда

10—12	А. Б. ШИДЛОВСКИЙ, Трансцендентность значений некоторых классов целых функций.
12—14	Н. И. ФЕЛЬДМАН, Методы А. О. Гельфонда в теории трансцендентных чисел.
17—19	Г. Б. БАБАЕВ, Распределение целых точек и трансцендентные числа.

IX.16, четверг

10—10^{30}	А. Ф. ЛАВРИК (читал Б. В. ЛЕВИН), Укороченные функциональные уравнения для функций Дирихле.
10^{30}—11	А. А. ПОЛЯНСКИЙ, Решение проблемы Харди и Литтльвуда и его неопределенного аналога в секторах и контурах.
11—12	Р. В. УЖДАВИНИС, Аддитивные функции со сходящимся средним.

IX.17, пятница

10—12	Н. Г. ЧУДАКОВ, Новые методы в алгебраической геометрии и их значение для теории чисел.
12—13^{30}	К. Ю. БУЛОТА, Обзор результатов по теории дзета-функций
13^{30}—14	Закрытие школы.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕЛЫХ ТОЧЕК НА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ЧИСЛА

БАБАЕВ ГАФУР

Рассматривается вопрос о распределении точек на поверхности

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=m, \qquad (1)$$

где $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ целочисленная разложимая степень n и от n пременных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, m — целое число.

В случае, когда поле коэффициентов одной из линейных форм, на произведение которых распадается форма, имеет не более одной основной единицы, получаются асимптотические формулы для количества целых точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на (1) в частях фундаментальной области. Если основных единиц больше, чем 1, то получаются оценки снизу, конечно, при некоторых условиях на m.

В случае, когда m состоит из произведения степеней фиксированного числа фиксированных простых чисел, применением теорем из теории трансцендентных чисел получаются лучшие остаточные члены.

Применение теорем теории трансцендентных чисел дает возможность доказать теоремы, смысл которых заключается в том, что вообще говоря, целые точки на плоских кривых $f(x, y)=m$, где $f(x, y)$ — целочисленная форма от двух переменных степени n, а m состоит из произведения степеней фиксированного числа фиксированных простых чисел, «боятся» рациональных направлений.

ТОЧНЫЕ ФОРМУЛЫ В АРИФМЕТИКЕ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

Л. А. КОГАН

В докладе сообщается об основных результатах, полученных при отыскании точных формул на основе следующих методов:

1. Методы Лиувилля—Успенского (Лиувилль, Я. В. Успенский, Б. А. Бенков);

2. Методы, основанные на теории эллиптических функций (Якоби, Кронекер, П. С. Назимов, В. Булыгин и другие);

3. Элементарный метод Якоби—Рамануджана—Харди—Райта—Вальфиша (Якоби, Рамануджан, Харди, Райт, А. З. Вальфиш, Л. А. Коган);

4. Методы, основанные на теории модулярных функций (Клейн, Фрике, Морделл, Харди, Клостэрман, Бейтман и другие);

5. Методы, основанные на арифметике кватернионов (Б. А. Венков, Ю. В. Линник);

6. Методы, основанные на теории модулярных форм (Масс, Г. А. Ломадзе и другие).

В скобках указаны авторы, которые занимались получением точных формул для числа представлений чисел квадратичными формами соответствующим методом.

В докладе особенно подробно было рассказано о третьем методе, на основе которого в настоящее время найден ряд новых результатов и выведены в основном все результаты, относящиеся к квадратичным формам с тремя, четырьмя, шестью и восемью переменными (по точным формулам), полученные ранее различными методами Гауссом, Якоби, Лиувиллем, Кронекером, Дирихле, Эйзенштейном, Клейном, Фрике, Назимовым, Пепином, Успенским.

Особое внимание в докладе было уделено как известным, так и новым путям получения точных формул для числа представлений чисел квадратичными формами в случае, когда сингулярный ряд Харди не дает точного значения для числа представлений чисел соответствующей формой. Было подробно рассказано о работах Клостэрмана, Г. А. Ломадзе и Л. А. Когана, посвященных этому вопросу.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ РАЦИОНАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

П. Г. КОГОНИЯ

Определения и обозначения

$\Theta=[0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,\ \ldots]$ — произвольное иррациональное число,

$$N=H(\Theta)=\overline{\lim_{k\to\infty}}\, a_k,\quad s_k(\Theta)=s_k=[0;\ a_1,\ \ldots,\ a_k]=\frac{p_k}{q_k},$$

$$r_k(\Theta)=r_k=[a_k,\ a_{k+1},\ a_{k+2},\ \ldots],\quad k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

$\mathfrak{M}_N=\{\Theta : H(\Theta)-N\}$, $\mathfrak{M}=\bigcup\limits_{N=1}^{\infty}\mathfrak{M}_N$ — множество всех иррациональных чисел интервала $(0,1)$ с ограниченной последовательностью неполных частных. Пусть, далее, $\lambda(\Theta)$ — точная верхняя грань множества всех действительных чисел $c>0$, для которых неравенство $|\Theta-p/q|<1/cq^2$ имеет бесконечное число решений в целых числах $p,\ q$ $(q>0)$. Как известно [2],

$$\lambda(\Theta)=\overline{\lim}\,\lambda_k(\Theta)=\overline{\lim}\,([0;\ a_{k-1},\ a_{k-2},\ \ldots,\ a_1]+a_k+[0;\ a_{k+1},\ a_{k+2},\ \ldots]). \tag{1}$$

Пусть

$$\{\lambda(\Theta)\}_N=\{\lambda(\Theta):\Theta\in\mathfrak{M}_N\},\quad N=1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \tag{2}$$

тогда множество

$$\{\lambda(\Theta)\}=\bigcup_{N=1}^{\infty}\{\lambda(\Theta)\}_N$$

называется спектром Лагранжа [3]. Пусть, далее, $T_m=(1,\ N,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ N,\ 1)$ обозначает систему из чередующихся чисел 1 и N, в которой число „изолированных" N равно m; $\mathfrak{M}_{N,m}$ — множество всех чисел множества $\mathfrak{M}_N$, в разложении которых система T_m встречается бесконечное число раз, тогда как любая такая система с большим числом изолированных N в этом же разложении встречается не более чем конечное число раз; тогда очевидно

$$\mathfrak{M}_N=\bigcup_{m=0}^{\infty}\mathfrak{M}_{N,m}\bigcup\mathfrak{M}_{N,\infty},\qquad N=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

$$\mathfrak{M}=\bigcup_{N=1}^{\infty}\left(\bigcup_{m=0}^{\infty}\mathfrak{M}_{N,m}\bigcup\mathfrak{M}_{N,\infty}\right).$$

Отсюда следует, что, если

$$\{\lambda(\Theta)\}_{N,m}=\{\lambda(\Theta):\Theta\in\mathfrak{M}_{N,m}\},$$

то

$$\{\lambda(\Theta)\}_N=\bigcup_{m=0}^{\infty}\{\lambda(\Theta)\}_{N,m}\bigcup\{\lambda(\Theta)\}_{N,\infty},$$

$$\{\lambda(\Theta)\}=\bigcup_{N=1}^{\infty}\left(\bigcup_{m=0}^{\infty}\{\lambda(\Theta)\}_{N,m}\bigcup\{\lambda(\Theta)\}_{N,\infty}\right).$$

Пусть

$$M=\{\ldots,\ a_{-2},\ a_{-1},\ a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\}$$

обозначает бесконечную в обе стороны последовательность натуральных чисел - двояко бесконечную последовательность (коротко — д.б.п.):

$$H(M) = N = \max_{-\infty<k<\infty} a_k;$$

$$\left.\begin{aligned} &\mu_k(M) = [0;\ a_{k-1},\ a_{k-2},\ \dots,\ a_1] + a_k + [0;\ a_{k+1},\ a_{k+2},\ \dots];\\ &\mu(M) = \sup \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k(M);\\ &\mathfrak{N}_N = \{M : H(M) = N\},\quad \mathfrak{N} = \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathfrak{N}_N; \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$\mathfrak{N}_{N,m}$ — множество всех д.б.п. M из $\mathfrak{N}_N$, в которых система T_m встречается хотя бы один раз и никакая такая система большей длины не встречается ни разу; тогда, как и выше

$$\mathfrak{N}_N = \bigcup_{m=0}^{\infty} \mathfrak{N}_{N,m} \bigcup \mathfrak{N}_{N,\infty}.$$

Пусть, далее,

$$\{\mu(M)\}_{N,m} = \{\mu(M) : M \in \mathfrak{N}_{N,m}\},$$
$$\{\mu(M)\}_N = \{\mu(M) : M \in \mathfrak{N}_N\},$$

тогда

$$\{\mu(M)\}_N = \bigcup_{m=0}^{\infty} \{\mu(M)\}_{N,m} \bigcup \{\mu(M)\}_{N,\infty}.$$

Множество

$$\{\mu(M)\} = \bigcup_{N=1}^{\infty} \{\mu(M)\}_N$$

называется спектром Маркова. Как известно [4], имеют место соотношения

$$\{\lambda(\Theta)\}_N \subset \{\mu(M)\}_N,\quad \{\lambda(\Theta)\} \subset \{\mu(M)\}. \tag{4}$$

Пусть

$$A = \{a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_k,\ \dots\} \quad \text{и} \quad B = \{b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_k,\ \dots\}$$

обозначают две бесконечные последовательности натуральных чисел, не превосходящих N $(1 \leqslant a_k,\ b_k \leqslant N)$: упорядоченную систему $(c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_m)$ назовем общей частью последовательностей A и B, если в каждой из них эта система встречается бесконечное число раз; две последовательности A и B назовем близкими между собой с порядком близости m, если максимальная длина общих систем равна m; порядок близости обозначим через $P(A, B)$. Пусть, далее,

$$\delta(M) = \mu(M) - \sup \bigcup_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{\infty} \mu_k(M). \tag{5}$$

$$\mu_k(M;\ m,\ n) = [0;\ a_{k-1},\ a_{k-2},\ \dots,\ a_{k-m},\ a'_{k-m-1},\ \dots] +$$
$$+\ a_k + [0;\ a_{k+1},\ a_{k+2},\ \dots,\ a_{k+n},\ a'_{k+n+1},\ \dots],\qquad 1 \leqslant a'_i \leqslant N.$$

Тогда в силу известных свойств непрерывных дробей существует натуральное число $T(\delta) = T(M)$, такое, что при $m,\ n > T(M)$

$$|\mu^*_k(M;\ m,\ n) - \mu_k(M)| < \delta(M). \tag{6}$$

Исходя из соотношений (1) — (6), получим справедливость следующих предложений:

$$\min\{\mu(M)\}_{N,m} = \begin{cases} N + 2\cdot[0;\ (1,\ N)_s,\ 1,\ (T_m)_\infty] & \text{при}\quad m = 2s+1,\\ N + [0;\ (1,\ N)_s,\ 1,\ T_m)_\infty] + [0;\ (1,\ N)_{s-1},\ 1,\ (T_m)_\infty] & \text{при}\quad m = 2s; \end{cases}$$

$$\max\{\mu(M)\}_{N,m} = \begin{cases} N + 2\cdot[0;\ (1,\ N)_{s+1},\ 2,\ N,\ (T_m)_\infty] & \text{при}\quad m = 2s+1,\\ N + [0;\ (1,\ N)_{s+1},\ 2,\ N,\ (T_m)_\infty] + [0;\ (1,\ N)_s,\ 2,\ N,\ (T_m)_\infty] & \text{при}\quad m = 2s. \end{cases}$$

Теорема 1. *Интервал* $(4\sqrt{30}/7,\ \sqrt{10})$ *является смежным интервалом к спектрам Лагранжа и Маркова.*

Теорема 2. *Класс* $K_{M'_m}$ *Маркова* [3], *соответствующий числу* $\gamma_{2,m}=\min\{\mu(M)\}_{N,m}$ *состоит из одной единственной д.б.п.* $M'_m=\{(T_m)_{-\infty},\ (T_m)_{\infty}\}$; *класс Маркова* $K_{M''_m}$, *соответствующий числу* $\delta_{2,m}=\max\{\mu(M)\}_{N,m}$, *имеет мощность континуума.*

Теорема 3. $\gamma_{2,m}=\min\{\mu(M)\}_{2,m}$ *является изолированной точкой этого множества;* $\delta_{2,m}=\max\{\mu(M)\}_{2,m}$ *— точкой конденсации этого же множества.*

Теорема 4. *Интервал* $(\sqrt{10},\ 7\sqrt{10}+4\sqrt{30}+2/14)$ *является смежным интервалом к спектрам Лагранжа и Маркова.*

Теорема 5. *Если*

$$M=\{\ldots,a_{-2},a_{-1},a_0,a_1,a_2,\ldots\},\quad 1\leqslant a_k\leqslant N,\quad M^-=\{a_{-1},a_{-2},\ldots\},$$

$M^+=\{a_1,a_2,\ldots\}$ *и для них выполняется условие* $P(M^-,M^+)>T(M)$, *то для д.б.п.* M *имеет тесто обратное включение.*

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Я. Хинчин, Цепные дроби, М.—Л., 1949.
2. J. F. Koksma, Diophantische Approximationen, Berlin, 1936.
3. П. Г. Когония, О связи между спектрами Лагранжа и Маркова (IV), Труды Тбилисского математического института, т. XXIX, стр. 15—35, 1963.
4. П. Г. Когония, О связи между множеством чисел Маркова и марковским спектром, Труды ТГУ, т. 76, стр. 161—172, 1959.

УКОРОЧЕННЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ДИРИХЛЕ

А. Ф. ЛАВРИК

В докладе приводятся нового типа функциональные уравнения для функций представимых рядами Дирихле, удовлетворяющих обычному функциональному уравнению типа Римана. Особенность таких уравнений в том, что из них следуют приближенные функциональные уравнения с равномерными оценками по основным переменным. Например, для функций $L(s,\chi)$ порождаемых L-рядами Гекке над произвольным алгебраическим полем оценка равномерна относительно $\mathrm{Im}\,s$, нормы модуля характера χ и дискриминанта поля d.

Пусть $k\geqslant 1$ — целое, $\alpha_1>0,\ \ldots,\ \alpha_k>0$, $\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_k$, $\beta_1,\ \ldots,\ \beta_k$ — комплексные с $\mathrm{Re}\,\beta_\nu\geqslant 0$, $\beta=\beta_1+\cdots+\beta_k$. Для заданного комплексного ω $\Delta>0$ такое, что $\Delta+\alpha\,\mathrm{Re}\,\omega>0$, x — комплексное с условием $|\arg x|<\pi/2$;

$$\Gamma_k(z)=\prod_{\nu=1}^{k}\Gamma(\alpha_\nu z+\beta_\nu),$$

$$\Gamma_k^*(\omega,\ x)=\Gamma_k(\omega,\ x)\ \Gamma_k^{-1}(\omega),$$

$$\Gamma_k(\omega,\ x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Delta-i\infty}^{\Delta+i\infty}\Gamma_k\left(\frac{z}{\alpha}+\omega\right)x^{-z}\,\frac{dz}{z};$$

Теорема 1. *Пусть функции* $\varphi(s)$, $\psi(s)$, *определяемые абсолютно сходящимися в каких-либо плоскостях рядами Дирихле*

$$\varphi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\lambda_n^{-s},\qquad \psi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\xi_n^{-s},$$

удовлетворяют функциональному уравнению

$$\Gamma_k(s)\,\varphi(s)=\Gamma_k(\delta-s)\,\psi(\delta-s)\tag{1}$$

с $\delta>0$ *всюду в комплексной плоскости, кроме, быть может, конечного числа полюсов, расположенных в ограниченной области.* Вне полюсов $\Gamma_k(s)\,\varphi(s)$ — регулярная функция,

$\varphi(s)$ функция конечного порядка (в смысле рядов Дирихле). Тогда для любого z такого, что $|\arg z| \leqslant \tau < \pi/2$ там, где имеет место уравнение (1), справедливо и следующее функциональное уравнение

$$\Gamma_k(s)\,\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^s}\,\Gamma_k\left(s,\ \lambda_n^{\frac{1}{\alpha}} z\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\xi_n^{\delta-s}}\,\Gamma_k\left(\delta-s,\ \xi_n^{\frac{1}{\alpha}} z^{-1}\right) +$$

$$+ \sum_{\omega \neq s} \operatorname{res}\left\{\frac{\Gamma_k(\omega)\,\varphi(\omega)}{\omega - s}\, z^{\alpha(s-\omega)}\right\},$$

где последняя сумма распространяется на все вычеты (если они есть), кроме вычета в точке $\omega = s$.

Приведенно уравнение обладает свойством, что для любого z с $|\arg z| < \pi/2$ ряды в правой части его абсолютно сходятся, левая же часть не зависит от z. Если $|\arg z| > \pi/2$ эти ряды расходятся. Там, где $\Gamma_k(s)\,\varphi(s)$ — целая функция, (1) можно записать в виде

$$\varphi(s) = \sum_{n=1} \frac{a_n}{\lambda_n^s}\,\Gamma^*\left(s,\ \lambda_n^{\frac{1}{\alpha}} z\right) + \frac{\Gamma_k(\delta-s)}{\Gamma_k(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\xi_n^{\delta-s}}\,\Gamma_k^*\left(\delta-s,\ \xi_n^{\frac{1}{\alpha}} z^{-1}\right). \qquad (2)$$

Теорема 2. *Пусть* $0 < \operatorname{Re} s < \delta$, x — *любое с условием*

$$\arg x = \begin{cases} \left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{|\operatorname{Im} s|}\right) \operatorname{sign} \operatorname{Im} s, & \textit{при} \quad |\operatorname{Im} s| \geqslant 1, \\ 0, & \textit{при} \quad |\operatorname{Im} s| < 1. \end{cases}$$

Тогда для ω равного s и $\delta - s$, $|\operatorname{Im} s| \geqslant 0$, $|x| > 0$, $\gamma < 1$,

$$\Gamma_k^*(\omega,\ x) \ll \exp\left(-\gamma\,\frac{|x|}{1 + |\operatorname{Im} s|}\right).$$

Эта оценка в виду (2) и дает приближенное уравнение для $\varphi(s)$ с оценками равномерности по основным аргументам. Наличие сомножителей в начальных отрезках рядов приближенного уравнения не существенно, ибо начальные отрезки рядов в нем приходится оценивать тривиально. Этот недостаток, по-видимому, можно ликвидировать путем более глубокого изучения поведения $\Gamma_k(\omega,\ x)$. Трудность представляют случаи, когда $|\omega|$ и $|x|$ одного и того же порядка роста.

ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТЬ ЗНАЧЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

А. Б. ШИДЛОВСКИЙ

В начале доклада дается исторический обзор развития основных аналитических методов теории трансцендентных чисел. Затем излагается без доказательства сущность метода Эрмита—Линдемана—Зигеля о трансцендентности алгебраической независимости значений в алгебраических точках E-функций, являющихся решениями линейных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами, а также перечисляются основные конкретные результаты, полученные этим методом.

В докладе сформулирован ряд результатов, полученных разными авторами за последние годы, из которых некоторые еще не опубликованы. В частности, следующие:

1. Метод доказательства алгебраической независимости над полем рациональных функций решений линейных дифференциальных уравнений 3-го порядка, предложенный В. А. Олейниковым, который позволяет применять к таким E-функциям общие теоремы о трансцендентности и алгебраической независимости значений, и тем самым полностью исследовать арифметическую природу их значений в алгебраических точках.

2. Результаты автора об уточнении оценки в основной лемме метода Зигеля о ранге совокупности значений E-функций, который, в частности, позволяет утверждать отсутствие алгебраических уравнений над полем рациональных чисел, степени не превосходящей некоторого числа k, у значений рассматриваемых E-функций в рациональных точках, если только сами эти функции не связаны алгебраическим уравнением над полем рациональных функций степени, не превосходящей k.

3. Результат полученный автором об иррациональности значений функций

$$\varphi_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(\lambda+1)\cdots(\lambda+n)}, \quad \lambda \neq -1, -2, \ldots,$$

и

$$K_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(\lambda+1)\cdots(\lambda+n)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}, \quad \lambda \neq 1, -2, \ldots,$$

имеющих алгебраическое иррациональное значение параметра λ: если λ принадлежит алгебраическому полю K конечной степени над полем рациональных чисел, то все значения функций $\varphi_\lambda(z)$, $K_\lambda(z)$, $K'_\lambda(z)$ в точках поля K иррациональны, за исключением быть может конечного числа значений.

О МЕТОДЕ А. О. ГЕЛЬФОНДА В ТЕОРИИ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ЧИСЕЛ

Н. И. ФЕЛЬДМАН

В докладе изложены основные черты метода А. О. Гельфонда и приведены формулировки ряда теорем, доказываемых этим методом. В частности, приведены некоторые результаты, полученные в последнее время докладчиком, например,

Теорема. *Если $\wp(z)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса с алгебраическими инвариантами g_2 и g_3, $\wp(\alpha)$ и $\wp(\beta)$ — алгебраические числа, причем α/β — иррационально, то существует такая положительная постоянная величина $\Lambda = \Lambda(g_2, g_3, \alpha, \beta)$, что для любых целых рациональных чисел $q > O$ и p справедливо неравенство*

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} - \frac{p}{q} \right| > e^{-\exp\left(\Lambda \sqrt{\ln(q+1)}\right)}.$$

Величина Λ может быть вычислена.

Более точная оценка может быть получена в случае, когда α и β являются полупериодами функции $\wp(z)$.

В докладе рассматривались также некоторые связи теории трансцендентных чисел с другими разделами теории чисел.

ОБ ОБЩИХ ЗАКОНОМЕРНОСТЯХ АДДИТИВНОЙ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Г. А. ФРЕЙМАН

Определение. Подмножества B', C' множеств B, C с алгебраическими операциями называются изоморфными, если существует взаимо-однозначное отображение $B' \to C'$ такое, что естественным образом индуцируемое им отображение $2B' \to 2C'$ существует и взаимо-однозначно.

Настоящее определение специально приспособлено для изучения аддитивных свойств множеств для случая удвоения.

Если $B' = B$, $C' = C$ и отображения $B' \to C'$, $2B'$ $2C'$ согласуются, то получается обычное определение изоморфизма множеств с алгебраической операцией.

Можно сформулировать и более общее определение изоморфизма для случая сложения нескольких различных множеств.

Теперь можно высказать общую точку зрения на аддитивную теорию чисел, подсказанную взглядами Ф. Клейна, сформулированными им в Эрлангенской программе.

Именно, аддитивную теорию чисел можно рассматривать как науку, изучающую свойства числовых множеств, остающихся инвариантными при изоморфных преобразованиях.

Пусть $K = \{a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}\}$ — множество, состоящее из k целых чисел, $T(M)$ — число элементов некоторого конечного множества M, $T = T(2K)$. T является инвариантом изоморфного преобразования.

Теорема. Если $T<C_k$, $C\geqslant 2$, то существуют такие $c(C)>0$, $k_0(C)>0$, $n\leqslant[C-1]$, что при $k>k_0$ множество $K\subset K_0$, K_0 изоморфно множеству целых точек некоторого выпуклого множества $D<E_n$, E_n — евклидово пространство, причем $T(K_0)<k$.

Пусть $\alpha(A)$ $(\alpha(2A))$ — асмптотические плотности последовательностей $A(2A)$, $C\geqslant 1$.

Сформулированная теорема позволяет показать, что для $\alpha<\alpha_0(C)$, за исключением A, конструкция которых описывается.

Плотностная теория дает $C=2$. (Аналог Кнезера теоремы Манна.)