VI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1966

НЕГОЛОНОМНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ЛИ И ЛИНЕЙНЫЕ СВЯЗНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ ОПОРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В. И. БЛИЗНИКАС

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Б. Л. Лаптев ввел понятие пространства опорных элементов $V^{(p)}_{n,N}$, являющегося локальным топологическим произведением дифференцируемого многообразия V_n и пространства значений дифференциального-геометрического объекта (опорного объекта класса p). Точка пространства $V^{(p)}_{n,N}$ называется опорным элементом. Частным случаем таких пространств является пространство тензорных опорных элементов [13], которое является естественным обобщением пространств Финслера, Картана, Бервальда, пространств K-протяжений Дугласа и др. В работах Б. Л. Лаптева [13], [15], [16] построена операция ковариантного дифференцирования в пространстве тензорных опорных элементов. Операции ковариантного дифференцирования соответствует аффинная связность (Γ, C). Б. Л. Лаптев построил теорию кривизны связности (Γ, C) и соответствующую ей теорию инвариантов. Кроме того, он построил операцию дифференцирования Ли в общем пространстве опорных элементов. Для частных случаев пространств опорных элементов понятие инвариантного дифференциала введено в работах [2], [3] и [4], а для общего случая – в работе [5].

Первая глава этой статьи посвящена теории связностей и инвариантным операциям на дифференцируемом многообразии. Результаты § 1 – 6 имеют реферативный характер, но излагаются методом Г. Ф. Лаптева. В § 7 построена операция неголономного дифференцирования Ли, причем схема построения этой операции отличается от схемы, предложенной Л. Е. Евтушиком [6]. Следует заметить, что теория тензорных связностей (§ 3) методом Г. Ф. Лаптева излагается впервые.

Во второй главе пространство тензорных опорных элементов рассматривается как пространство представления нормальной псевдогруппы.

Рассмотрены линейные связности пространства линейных элементов, почти комплексные структуры в пространстве линейных элементов, различные линейные связности в пространстве тензорных опорных элементов, картановые тензоры кривизны линейной тензорной связности. Кроме того, методом Г. Ф. Лаптева рассмотрены частные случаи пространств тензорных опорных элементов, т. е. пространство путей и пространство K-протяжений.

Третья глава посвящена общим вопросам пространств опорных элементов, в частности, дается новая схема построения неголономного дифференцирования Ли, а также вертикального неголономного дифференцирования Ли.

Четвертая глава посвящена теории различных связностей пространства опорных элементов.

Часть результатов этой статьи была доложена автором на Второй Прибалтийской геометрической конференции по вопросам дифференциальной геометрии (Тарту, 1965 г.).

ГЛАВА ПЕРВАЯ

СВЯЗНОСТИ И ИНВАРИАНТНЫЕ ОПЕРАЦИИ НА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОМ МНОГООБРАЗИИ

§ 1. Нормальная псевдогруппа и контравариантное касательное составное многообразие высшего порядка

Рассмотрим n-мерное дифференцируемое многообразие V_n, локальные координаты $x^1, x^2, \ldots, x^n$ которого являются независимыми первыми интегралами вполне интегрируемой системы линейно независимых пфаффовых форм $\omega^1, \ldots, \omega^n$, имеющих следующую структуру:

$$D\omega^i = [\omega^k, \omega^i_k] \tag{I.1}$$

$$(i, j, k = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, N;\ I, J, K = 1, 2, \ldots, M).$$

Допустимые преобразования локальных координат дифференцируемого многообразия V_n определяют псевдогруппу $G: x^{i'} = x^{i'}(x^i)$ всех возможных аналитических точечных преобразований в n-мерном координатном пространстве R^n. Эти преобразования являются решением вполне интегрируемой системы $\bar{\omega}^i = \omega^i$, где $\omega^{i'} = \delta^{i'}_i \bar{\omega}^i$, а x^i (соответственно $x^{i'}$) — первые интегралы системы $\omega^i = 0$ (соответственно $\omega^{i'} = 0$). Пусть $G^{(m)}$ нормальная расслоенная псевдогруппа, определенная инвариантными формами ω^i, $\omega^i_{j_1 \ldots j_a}$ $(a = 1, 2, \ldots, m)$, псевдогруппы G. Псевдогруппа $G^{(m)}$ является нормальным m-кратным продолжением группы G. Формы $\omega^i_{j_1 \ldots j_a}$ имеют следующую структуру [18]:

$$D\omega^i_{j_1 \ldots j_a} = \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!\,(a-s)!} [\omega^k_{(j \ldots j_s}, \omega^i_{j_{s+1} \ldots j_a) k}] + [\omega^k, \omega^i_{j_1 \ldots j_a k}] \tag{I.2}$$

$$(a = 1, 2, \ldots, m).$$

Все пфаффовые формы предполагаются симметричными по любой паре нижних индексов. Конечные преобразования нормальной расслоенной псевдогруппы $G^{(m)}$ являются решениями вполне интегрируемой системы:

$$\bar{\omega}^i = \omega^i, \quad \bar{\omega}^i_{j_1} = \omega^i_{j_1}, \quad \ldots, \quad \bar{\omega}^i_{j_1 \ldots j_m} = \omega^i_{j_1 \ldots j_m}.$$

Пфаффовые формы $\Theta^i_{j_1 \ldots j_a}$:

$$\Theta^i_{j_1 \ldots j_a} = \omega^i_{j_1 \ldots j_a}\Big|_{\omega^i=0} \qquad (a=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

являются инвариантными формами дифференциальной группы $D^{(m,\,n)}$ порядка m, причем $\dim D^{(m,\,n)} = n\left\{\binom{n+m}{n} - 1\right\}$. Дифференциальная группа $D^{(m,\,n)}$ является фундаментальной группой контравариантного касательного пространства T_{mn} порядка m дифференцируемого многообразия V_n ($\dim T_{mn} = nm$), а ее структурные уравнения имеют вид:

$$D\Theta^i_{j_1 \ldots j_a} = \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!\,(a-s)!}\,[\Theta^k_{(j_1 \ldots j_s},\ \Theta^i_{j_{s+1} \ldots j_a)\,k}]. \tag{I.3}$$

Конечные преобразования первой параметрической группы, группы $D^{(m,\,n)}$ определяются вполне интегрируемой системой

$$\overline{\Theta}^i_{j_1 \ldots j_a} = \Theta^i_{j_1 \ldots j_a}$$
$$(a=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

и имеют вид

$$\overline{A}^i_{j_1 \ldots j_a} = a! \sum_{s=1}^{a} \frac{1}{s!}\, A^i_{k_1 \ldots k_s} \sum_{(a_1+\ldots+a_s=a)} \frac{1}{a_1! \ldots a_s!}\, \times$$
$$\times\, C^{k_1}_{(j_1 \ldots j_{a_1}} \ldots C^{k_s}_{j_{a_1+\ldots+a_{s-1}+1} \ldots j_a)}, \tag{I.4}$$

где $C^i_{j_1 \ldots j_a}$ ($a=1,\ 2,\ \ldots,\ m$) константы интегрирования и $\det \| A^i_j \| \neq 0$, $\det \| C^i_j \| \neq 0$. Тождественное преобразование группы $D^{(m,\,n)}$ соответствует следующим значениям этих констант:

$$C^i_{j_1 \ldots j_a} = \delta^i_{j_1 \ldots j_a},$$

где $\delta^i_{j_1 \ldots j_a}$ — символы Кронекера (при $a > 1$ все равны нулю).

Представление группы $D^{(m,\,n)}$ в пространстве T_{mn} имеют вид [11]:

$$\overline{x}^{(a)\,i} = a! \sum_{s=1}^{a} \frac{1}{s!}\, A^i_{j_1 \ldots j_s} \sum_{(a_1+\ldots+a_s=a)} \frac{1}{a_1! \ldots a_s!}\, x^{(a_1)\,j_1},\ \ldots,\ x^{(a_s)\,j_s}, \tag{I.5}$$

где $x^{(a)\,i}$ — координаты точек пространства T_{mn} (в частности, $x^{(a)\,i}$ можно рассматривать как дифференциалы переменных x^i, т. е. можно положить $x^{(a)\,i} = d^a x^i$). Представление той же группы в пространстве реперов ковариантного касательного пространства $W_{(m,\,n)}$, где $\dim W_{(m,\,n)} = \binom{m+n}{n} - 1$, можно определить вполне интегрируемой системой [19]:

$$d\mathbf{E}_{j_1 \ldots j_a} = \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!\,(a-s)!}\, \Theta^i_{(j_1 \ldots j_s}\, \mathbf{E}_{j_{s+1} \ldots j_a)\,i}, \tag{I.6}$$

где $\{\mathbf{E}_{j_1},\ \ldots,\ \mathbf{E}_{j_1 \ldots j_m}\}$ — репер пространства $W_{(m,\,n)}$, соответствующего точке (x^i) дифференцируемого многообразия V_n, и векторы $\mathbf{E}_{j_1 \ldots j_a}$ по всем индексам симметричны. Общее решение системы (I.6) имеет вид

$$\mathbf{E}_{j_1 \ldots j_a} = a! \sum_{s=1}^{a} \frac{1}{s!}\, \mathbf{e}_{i_1 \ldots i_s} \sum_{(a_1+\ldots+a_s=a)} \frac{1}{a_1! \ldots a_s!}\, \times$$
$$\times\, A^{i_1}_{(j_1 \ldots j_{a_1}} \ldots A^{i_s}_{j_{a_1+\ldots+a_{s-1}+1} \ldots j_a)}, \tag{I.7}$$

где $A^i_{j_1 \ldots j_a}$ $(a=1, 2, \ldots, m)$ первые интегралы системы $\Theta^{i'}_{j_1 \ldots j_a}=0$ и $\mathbf{e}_{i_1 \ldots i_a}$ $(a=1, 2, \ldots, m)$ – векторные константы интегрирования.

Если $X_i^{i_1 \ldots i_a}$ $(a=1, 2, \ldots, m)$ – базисные операторы алгебры Ли $\hat{D}^{(m, n)}$ группы $D^{(m, n)}$, соответствующие инвариантным формам $\Theta^i_{j_1}$, $\Theta^i_{j_1 \ldots j_m}$ группы $D^{(m, n)}$, то структурные уравнения Маурера – Ли этой алгебры имеют вид [11]:

$$(X_i^{i_1 \ldots i_a}, X_j^{j_1 \ldots j_b}) = \binom{a+b-1}{a} X_i^{i_1 \ldots i_a(j_1 \ldots j_{b-1}} \delta_i^{j_b)} -$$

$$-\binom{a+b-1}{b} X_i^{j_1 \ldots j_b(i_1 \ldots i_{a-1}} \delta_j^{i_a)}. \tag{I.8}$$

Так как группа $D^{(m, n)}$ имеет подгруппы $D^{(\hat{a}, n)}$ $(\hat{a}=1, 2, \ldots, m-1)$ и

$$D^{(1, n)} \subset D^{(2, n)} \subset \ldots \subset D^{(m-1, n)} \subset D^{(m, n)},$$

а уравнения

$$A^i_{i_1 \ldots i_{\hat{c}}} = \delta^i_{i_1 \ldots i_{\hat{c}}} \qquad (\hat{c}=1, 2, \ldots, \hat{a}<m)$$

определяют нормальный делитель $\mathfrak{A}_{\hat{a}}^{(m, n)}$ в $D^{(m, n)}$, то

$$\mathfrak{A}_1^{(m, n)} \supset \mathfrak{A}_2^{(m, n)} \supset \ldots \supset \mathfrak{A}_{m-1}^{(m, n)}.$$

Независимые первые интегралы x^i, $A^i_{j_1 \ldots j_a}$ $(a=1, 2, \ldots, m)$ вполне интегрируемой системы форм ω^i и $\omega^i_{j_1 \ldots j_a}$ $(a=1, 2, \ldots, m)$ могут рассматриваться как локальные координаты в $n\binom{n+m}{n}$ - мерном дифференцируемом многообразии $W_{(m, n)}(V_n)$, которое называется контравариантным касательным составным многообразием порядка m в смысле В. В. Вагнера и является частным случаем расслоенного пространства (см. [21]). Говорят, что на многообразии V_n определено поле дифференциально-геометрического объекта класса $p \leqslant m$, если в каждом касательном пространстве T_{mn} с фундаментальной группой $D^{(m, n)}$ задан такой дифференциально-геометрический объект, что стационарная подгруппа $\mathfrak{B}$, соответствующего представления группы $D^{(m, n)}$, на множестве его значений удовлетворяет условиям:

$$\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}_p^{(m, n)}, \quad \mathfrak{B} \not\supset \mathfrak{A}_{p-1}^{(m, n)}.$$

С точки зрения общей теории метода продолжений и охватов Г. Ф. Лаптева [17], [18], [19], на многообразие $W_{(m, n)}(V_n)$ можно смотреть как на пространство представления нормальной расслоенной псевдогруппы $G^{(m)}$. Таким образом, уравнения (I.1) и (I.2) являются структурными уравнениями пространства $W_{(m, n)}(V_n)$, и система дифференциальных уравнений поля N-компонентного дифференциально-геометрического объекта y^α класса p, определенного на V_n, имеет вид:

$$dy^\alpha + \sum_{a=1}^{p} y_i^{\alpha i_1 \ldots i_a}(y)\, \omega^i_{i_1 \ldots i_a} = y^\alpha_k \omega^k, \tag{I.9}$$

причем функции $y_i^{\alpha i_1 \dots i_a}$ и их частные производные удовлетворяют условиям (как это следует из (I.8)):

$$\partial_\beta y_i^{\alpha i_1 \dots i_a} y_j^{\beta j_1 \dots j_b} - \partial_\beta y_j^{\alpha j_1 \dots j_b} y_i^{\beta i_1 \dots i_a} =$$

$$= \binom{a+b-1}{a} y_j^{\alpha i_1 \dots i_a (j_1 \dots j_b}\,{}_1\,\delta_i^{ib)} - \binom{a+b-1}{b} y_i^{\alpha j_1 \dots j_b (i_1 \dots i_a}\,{}_1\,\delta_j^{i_a)}. \qquad \text{(I.10)}$$

§ 2. Линейная дифференциально-геометрическая связность высшего порядка

Рассмотрим преобразование слоевых форм $\omega^i_{j_1 \dots j_a}$ $(a = 1, 2, \dots, m)$ пространства $W_{(m,n)}(V_n)$:

$$\tilde\omega^i_{j_1 \dots j_{a-1}} = \omega^i_{j_1 \dots j_{a-1}} + \Gamma^i_{kj_1 \dots j_{a-1}} \omega^k, \quad \Gamma^i_{j[j_1 \dots j_{a-1}]} = 0. \qquad \text{(I.11)}$$

Эти новые формы удовлетворяют структурным уравнениям [19]:

$$D\omega^i = [\omega^k, \tilde\omega^i_k] + R^i_{pq}[\omega^p, \omega^q],$$

$$D\tilde\omega^i_{j_1 \dots j_a} = \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!(a-s)!} [\tilde\omega^k_{(j_1 \dots j_s}, \tilde\omega^i_{j_{s+1} \dots j_a) k}] + [\Delta\Gamma^i_{kj_1 \dots j_a}, \omega^k] -$$

$$- \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!(a-s)!} \Gamma^k_{[p|(j_1 \dots j_s|} \Gamma^i_{q] j_{s+1} \dots j_a) k} [\omega^p, \omega^q], \qquad \text{(I.12)}$$

где

$$R^i_{kl} = \frac{1}{2} (\Gamma^i_{kl} - \Gamma^i_{lk})$$

и

$$\Delta\Gamma^i_{kj_1 \dots j_a} = d\Gamma^i_{kj_1 \dots j_a} - \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!(a-s)!} (\omega^l_{(j_1 \dots j_s} \Gamma^i_{|k| j_{s+1} \dots j_a) l} -$$

$$- \Gamma^l_{k(j_1 \dots j_s} \omega^i_{j_{s+1} \dots j_a) l}) - \Gamma^i_{lj_1 \dots j_a} \omega^l_k - \omega^i_{j_1 \dots j_a k}. \qquad \text{(I.13)}$$

Система форм ω^i и $\Delta\Gamma^i_{kj_1 \dots j_a}$ $(a = 1, 2, \dots, m)$ вполне интегрируема и ее первые интегралы определяют расслоенное многообразие объекта линейной дифференциально-геометрической связности порядка m. Вложенное в него многообразие, определяемое системой дифференциальных уравнений

$$\Delta\Gamma^i_{kj_1 \dots j_a} = \Gamma^i_{p,\, kj_1 \dots j_a} \omega^p, \qquad \text{(I.14)}$$

является контравариантным касательным составным многообразием $W_{(m,n)}$ (V_n) с линейной связностью, базисным пространством которого является исходное дифференцируемое многообразие V_n. Дифференциально-геометрический объект $\Gamma^i_{kj_1 \dots j_a}$ $(a = 1, 2, \dots, m)$ называется объектом линейной дифференциально-геометрической связности порядка m дифференцируемого многообразия V_n (см. [12]). Структурные уравнения дифференцируемого многообразия с линейной дифференциально-геометрической связностью порядка m можно представить в виде:

$$D\omega^i - [\omega^k, \tilde\omega^i_k] = R^i_{kl}[\omega^k, \omega^l],$$

$$D\tilde\omega^i_{j_1 \dots j_a} - \sum_{s=1}^{a} \binom{a}{s} [\tilde\omega^k_{(j_1 \dots j_s}, \tilde\omega^i_{j_{s+1} \dots j_a) k}] = \frac{1}{2} R^i_{j_1 \dots j_a pq} [\omega^p, \omega^q], \qquad \text{(I.15)}$$

где

$$R^i_{j_1 \dots j_a pq} = 2\left(\Gamma^i_{[p,\, q] j_1 \dots j_a} + \sum_{s=1}^{a} \binom{a}{s} \Gamma^k_{[p \mid (j_1 \dots j_s} \Gamma^i_{q] j_{s+1} \dots j_a) k}\right). \qquad (I.16)$$

Величины $R^i_{j_1 \dots j_a pq}$ $(a=1,\ 2,\ \dots,\ m)$ образуют дифференциально-геометрический объект, который называется объектом кривизны пространства V_n с рассматриваемой связностью. Г. Ф. Лаптев указал способ определения таких пространств при помощи канонизации репера (в специальном репере роль форм $\Delta\Gamma^i_{kj_1 \dots j_a}$ играют формы $\omega^i_{kj_1 \dots j_a}$).

Неголономная ковариантная производная дифференциально-геометрического объекта y^α относительно дифференциально-геометрической связности высшего порядка имеет вид

$$\overset{\Gamma}{\nabla}_k y^\alpha = y^\alpha_k + \sum_{a=1}^{p} y^{\alpha i_1 \dots i_a}_i \Gamma^i_{ki_1 \dots i_a}. \qquad (I.17)$$

Дифференциально-геометрический объект (класса p) Ω^α, компоненты которого являются кососимметрическими формами, определенными на дифференцируемом многообразии, можно определить при помощи системы объектов $y^\alpha_{i_1 \dots i_s}$ $(s<n)$:

$$\Omega^\alpha = y^\alpha_{i_1 \dots i_s} [\omega^{i_1} \ \dots \ \omega^{i_s}].$$

Система дифференциальных уравнений такого типа дифференциально-геометрического объекта имеет вид*)

$$dy^\alpha_{i_1 \dots i_s} + \sum_{a=1}^{p} y^{\alpha k_1 \dots k_a}_{i i_1 \dots i_s} \omega^i_{k_1 \dots k_a} - \sum_{b=1}^{s} y^\alpha_{i_1 \dots k \dots i_s} \omega^k_{i_b} = y^\alpha_{i_1 \dots i_s,\, k} \omega^k, \qquad (I.18)$$

где

$$y^\alpha_{(i_1 \dots i_s)} = 0, \quad y^{\alpha k_1 \dots k_a}_{(i_1 \dots i_s)} = 0, \quad y^\alpha_{(i_1 \dots i_s),\, k} = 0.$$

Кососимметрическую часть дифференциально-геометрического объекта $\nabla_k y^\alpha_{i_1 \dots i_s}$ естественно назвать неголономным внешним ковариантным дифференциалом исходного поля. Этот объект имеет вид

$$\nabla \Omega^\alpha = \nabla_{[k} y^\alpha_{i_1 \dots i_s]} [\omega^k \omega^{i_1} \ \dots \ \omega^{i_s}]. \qquad (I.19)$$

§ 3. Тензорные связности

Хорошо известно, что при помощи аффинной связности (линейной векторной связности) можно определить ковариантное дифференцирование любых тензорных полей, т. е. к произвольной линейной векторной связности, определенной пфаффовыми формами ω^i, $\tilde{\omega}^i_j$ $(\tilde{\omega}^i_j = \omega^i_j + \Gamma^i_{kj}\omega^k)$, ассоциируется специальная линейная тензорная связность. Эта связность определяется формами

$$\tilde{\omega}^{s_1 \dots s_q i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q t_1 \dots t_p} = -\sum_{a=1}^{q} \delta^{s_1}_{j_1} \ \dots \ \delta^{s_a}_{k} \ \dots \ \delta^{s_q}_{j_q} \delta^{i_1}_{t_1} \ \dots \ \delta^{i_p}_{t_p} \tilde{\omega}^k_{j_a} +$$

$$+ \sum_{a=1}^{p} \delta^{s_1}_{j_1} \ \dots \ \delta^{s_q}_{j_q} \delta^{i_1}_{t_1} \ \dots \ \delta^{k}_{t_a} \ \dots \ \delta^{i_p}_{t_p} \tilde{\omega}^{i_a}_{k} \qquad (I.20)$$

*) Предполагается, что система (I.18) вполне интегрируема по модулю форм ω^k.

или

$$\tilde{\omega}^{s_1 \dots s_q i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q t_1 \dots t_p} = -\sum_{a=1}^{q} \delta^{s_1}_{j_1} \dots \delta^{s_a}_{k} \dots \delta^{s_q}_{j_q} \delta^{i_1}_{t_1} \dots \delta^{i_p}_{t_p} \omega^k_{j_a} +$$

$$+ \sum_{a=1}^{p} \delta^{s_1}_{j_1} \dots \delta^{s_q}_{j_q} \delta^{i_1}_{t_1} \dots \delta^{k}_{t_a} \dots \delta^{i_p}_{t_p} \omega^{i_a}_{k} + \Gamma^{s_1 \dots s_q i_1 \dots i_p}_{kj_1 \dots j_q t_1 \dots t_p} \omega^k, \qquad (I.21)$$

где

$$\Gamma^{s_1 \dots s_q i_1 \dots i_p}_{kj_1 \dots j_q t_1 \dots t_p} = -\sum_{a=1}^{q} \delta^{s_1}_{j_1} \dots \delta^{s_a}_{l} \dots \delta^{s_q}_{j_q} \delta^{i_1}_{t_1} \dots \delta^{i_p}_{t_p} \Gamma^{l}_{kj_a} +$$

$$+ \sum_{a=1}^{p} \delta^{s_1}_{j_1} \dots \delta^{s_q}_{j_q} \delta^{i_1}_{t_1} \dots \delta^{l}_{t_a} \dots \delta^{i_p}_{t_p} \Gamma^{i_a}_{kl}. \qquad (I.22)$$

Формы линейной тензорной связности имеют следующую структуру:

$$D\tilde{\omega}^{s_1 \dots s_q i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q t_1 \dots t_p} = [\tilde{\omega}^{s_1 \dots s_q k_1 \dots k_p}_{l_1 \dots l_q t_1 \dots t_p}, \tilde{\omega}^{l_1 \dots l_q i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q k_1 \dots k_p}] +$$

$$+ R^{s_1 \dots s_q i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q t_1 \dots t_p kl} [\omega^k, \omega^l], \qquad (I.23)$$

где

$$R^{s_1 \dots s_q i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q t_1 \dots t_p kl} = -\sum_{a=1}^{q} \delta^{s_1}_{j_1} \dots \delta^{s_a}_{r} \dots \delta^{s_q}_{j_q} \delta^{i_1}_{t_1} \dots \delta^{i_p}_{t_p} R^{r}_{j_a kl} +$$

$$+ \sum_{a=1}^{p} \delta^{s_1}_{j_1} \dots \delta^{s_q}_{j_q} \delta^{i_1}_{t_1} \dots \delta^{r}_{t_a} \dots \delta^{i_p}_{t_p} R^{i_a}_{rkl}. \qquad (I.24)$$

Из (I.13) и (I.20) следует, что

$$\nabla \Gamma^{s_1 \dots s_q i_1 \dots i_p}_{kj_1 \dots j_q t_1 \dots t_p} - \sum_{a=1}^{q} \delta^{s_1}_{j_1} \dots \delta^{s_a}_{l} \dots \delta^{s_q}_{j_q} \delta^{i_1}_{t_1} \dots \delta^{i_p}_{t_p} \omega^{l}_{j_a k} +$$

$$+ \sum_{a=1}^{p} \delta^{s_1}_{j_1} \dots \delta^{s_q}_{j_q} \delta^{i_1}_{t_1} \dots \delta^{l}_{t_a} \dots \delta^{i_p}_{t_p} \omega^{i_a}_{lk} = \Gamma^{s_1 \dots s_q i_1 \dots i_p}_{hkj_1 \dots j_q t_1 \dots t_p} \omega^h, \qquad (I.25)$$

где

$$\Gamma^{s_1 \dots s_q i_1 \dots i_p}_{hkj_1 \dots j_q t_1 \dots t_p} = -\sum_{a=1}^{q} \delta^{s_1}_{j_1} \dots \delta^{s_a}_{l} \dots \delta^{s_q}_{j_q} \delta^{i_1}_{t_1} \dots \delta^{i_p}_{t_p} \Gamma^{l}_{h,\, kj_a} +$$

$$+ \sum_{a=1}^{p} \delta^{s_1}_{j_1} \dots \delta^{s_q}_{j_q} \delta^{i_1}_{t_1} \dots \delta^{l}_{t_a} \dots \delta^{i_p}_{t_p} \Gamma^{i_a}_{h,\, kl}. \qquad (I.26)$$

Дифференциально-геометрический объект, компоненты которого являются решениями системы (I.25), называется объектом линейной тензорной связности. В общем случае компоненты этого объекта не выражаются через компоненты объекта линейной векторной связности (аффинной связности)*).

Если задан произвольный объект линейной тензорной связности ($p+q$-той валентности), то из компонент этого объекта можно построить компоненты аффинной связности не единственным образом. Так как компоненты объекта

*) Тензорные связности рассматривались в работах С. Гокари, Г. Гомбу, Е. Бомпиани, А. Коссу, М. Кухаржевского и др.

линейной тензорной связности являются решениями системы (I.25), то система величин (при фиксированном a)

$$\overset{(a)}{\Gamma}{}^{i}_{jk} = -\frac{1}{n^{p+q-1}}\, \Gamma^{s_1 \dots s_{a-1} i s_{a+1} \dots s_q t_1 \dots t_p}_{k s_1 \dots s_{a-1} j s_{a+1} \dots s_q t_1 \dots t_p} - \frac{p-q+1}{(p-q)\, n^{p+q}}\, \delta^i_j\, \Gamma^{s_1 \dots s_q t_1 \dots t_p}_{k s_1 \dots s_q t_1 \dots t_p} \tag{I.27}$$

$$(a=1,\ 2,\ \dots,\ q)$$

образует объект аффинной связности, ибо в силу (I.25) и свойств символов Кронекера, мы получаем $\nabla \overset{(a)}{\Gamma}{}^{i}_{jk} - \omega^i_{jk} \equiv 0 (\operatorname{mod} \omega^i)$. Очевидно, что полученные формулы справедливы при $p \neq q$. Другую серию объектов аффинной связности можно определить при помощи формул:

$$\underset{(a)}{\Gamma}{}^{i}_{jk} = \frac{1}{n^{p+q-1}}\, \Gamma^{s_1 \dots s_q t_1 \dots t_{a-1} i t_{a+1} \dots t_p}_{k s_1 \dots s_q t_1 \dots t_{a-1} j t_{a+1} \dots t_p} - \frac{p+q-1}{(p-q)\, n^{p+q}}\, \delta^i_j\, \Gamma^{s_1 \dots s_q t_1 \dots t_p}_{k s_1 \dots s_q t_1 \dots t_p} \tag{I.28}$$

$$(a=1,\ 2,\ \dots,\ p \neq q).$$

При $q=0$ и $p=2$ эти две аффинные связности, определенные равенством (I.28), получил М. Кухаржевский $\big($[29], формулы (6.7) и (6.8)$\big)$. Аффинные связности из компонент линейной тензорной связности можно построить и другими способами, которые, в общем случае, дают различные связности. Например, величины

$$\frac{1}{pn^q}\, \Gamma^{s_1 \dots s_q t_1 \dots t_{p-1} i}_{k s_1 \dots s_q j t_1 \dots t_{p-1}} + \frac{q}{p(p-q)n^{q+1}}\, \delta^i_j\, \Gamma^{s_1 \dots s_q t_1 \dots t_{p-1} t_p}_{k s_1 \dots s_q t_p t_1 \dots t_{p-1}}$$

тоже образуют объект аффинной связности. Аналогичным образом можно образовать и другие серии объектов аффинной связности.

Тензор, определенный формулой (I.24), называется тензором кривизны линейной тензорной связности, присоединенной к аффинной связности. Для произвольной линейной тензорной связности этот тензор имеет вид

$$R^{s_1 \dots s_q i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q t_1 \dots t_p st} = 2\,\big(\Gamma^{s_1 \dots s_q i_1 \dots i_p}_{[st] j_1 \dots j_q t_1 \dots t_p} - \Gamma^{s_1 \dots s_q k_1 \dots k_p}_{[s | l_1 \dots l_q t_1 \dots t_p |}\, \Gamma^{l_1 \dots l_q i_1 \dots i_p}_{t] j_1 \dots j_q k_1 \dots k_p}\big). \tag{I.29}$$

Легко проверить, что каждая система величин

$$\Gamma^{(i_1 \dots i_p) s_1 \dots s_q}_{k [t_1 \dots t_p] j_1 \dots j_q},\ \Gamma^{[i_1 \dots i_p] s_1 \dots s_q}_{k (t \dots t_p) j_1 \dots j_q},\ \Gamma^{i_1 \dots i_p (s_1 \dots s_q)}_{k t_1 \dots t_p [j_1 \dots j_q]},$$

$$\Gamma^{i_1 \dots i_p [s_1 \dots s_q]}_{k t_1 \dots t_p (j_1 \dots j_q)},\ \Gamma^{(i_1 \dots i_p)(s_1 \dots s_q)}_{k [t_1 \dots t_p][j_1 \dots j_q]},\ \Gamma^{(i_1 \dots i_p)[s_1 \dots s_q]}_{k [t_1 \dots t_p](j_1 \dots j_q]},$$

$$\Gamma^{[i_1 \dots i_p][s_1 \dots s_q]}_{k (t_1 \dots t_p)(j_1 \dots j_q)},\ \Gamma^{[i_1 \dots i_p](s_1 \dots s_q)}_{k (t_1 \dots t_p)[j_1 \dots j_q]} \tag{I.30}$$

образует объект линейной тензорной связности. Из структуры системы дифференциальных уравнений (I.25) следует, что разность двух произвольных объектов линейной тензорной связности образует тензор. Таким образом, беря разность любых двух объектов, входящих в систему (I.30), мы получим тензор, присоединенный к исходному объекту линейной тензорной связности.

§ 4. Алгебраические структуры

Рассмотрим n-мерное алгебраически аналитическое многообразие $\mathfrak{M}_n$, т. е. аналитическое многообразие над действительной алгеброй A_r, базисные единицы ε_a $(a=1,\ 2,\ \dots,\ r)$ которой связаны структурными соотношениями

$$(\varepsilon_a,\ \varepsilon_b) = C^c_{ab}\, \varepsilon_c. \tag{I.31}$$

Если x^i – локальные координаты многообразия $\mathfrak{M}_n$, то

$$x^i = \sum_{a=1}^{r} \overset{(a)}{x^i} \varepsilon_a. \tag{I.32}$$

Действительные числа $\overset{(1)}{x^i}, \overset{(2)}{x^i}, \ldots, \overset{(r)}{x^i}$ можно рассматривать как локальные координаты точки nr-мерного вещественного аналитического многообразия $\mathfrak{M}_{rn}$. В этом случае инвариантные формы нормальных расслоенных псевдогрупп, соответствующих многообразиям $\mathfrak{M}_n$ и $\mathfrak{M}_{rn}$, связаны соотношениями

$$\omega^i = \overset{(c)}{\omega^i} \varepsilon_c, \quad \omega^i_{j_1 \ldots j_a} = \overset{(c)}{\omega^i_{j_1 \ldots j_a}} \varepsilon_c$$

$$(a = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ c = 1,\ 2,\ \ldots,\ r) \tag{I.33}$$

и формы $\overset{(c)}{\omega^i}$ и $\overset{(c)}{\omega^i_{j_1 \ldots j_a}}$ имеют следующую структуру:

$$D\overset{(c)}{\omega^i} = C^c_{ab} [\overset{(a)}{\omega^k}, \overset{(b)}{\omega^i_k}], \tag{I.34}$$

$$D\overset{(c)}{\omega^i_{j_1 \ldots j_a}} = C^c_{ed} \left\{ \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!\,(a-s)!} [\overset{(e)}{\omega^k_{(j_1 \ldots j_s}}, \overset{(d)}{\omega^i_{j_{s+1} \ldots j_a) k}}] + [\overset{(e)}{\omega^k}, \overset{(d)}{\omega^i_{j_1 \ldots j_a}}] \right\}. \tag{I.35}$$

Очевидно, что инвариантные формы дифференциальной группы $D^{(m,\ rn)}$ порядка m многообразия $\mathfrak{M}_{nr}$ имеют следующую структуру:

$$D\overset{(c)}{\Theta^i_{j_1 \ldots j_a}} = C^c_{ed} \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!\,(a-s)!} [\overset{(e)}{\Theta^k_{(j_1 \ldots j_s}}, \overset{(d)}{\Theta^i_{j_{s+1} \ldots j_a) k}}]. \tag{I.36}$$

Пусть T_n – векторное касательное пространство точки (x^i) многообразия $\mathfrak{M}_n$, а T_{nr} – векторное касательное пространство соответствующей точки многообразия $\mathfrak{M}_{nr}$. Умножение вектора пространства T_n на элемент алгебры A_r порождает линейное преобразование φ пространства T_{nr}. Совокупность всех таких преобразований φ образует алгебру с базисными преобразованиями $\underset{(c)}{\varphi}$.

Поле линейных преобразований φ на $\mathfrak{M}_{nr}$ определяется тензорным полем $\underset{(c)}{\varphi^I_J}$ $(I,\ J = 1,\ 2,\ \ldots,\ nr)$.

Базисные линейные преобразования $\underset{(c)}{\varphi}$ связаны соотношениями

$$\underset{(e)}{\varphi} \circ \underset{(c)}{\varphi} = C^d_{ec} \underset{(d)}{\varphi}, \tag{I.37}$$

а локальные координаты базисных тензорных полей – соотношениями

$$\underset{(e)}{\varphi^I_K} \underset{(c)}{\varphi^K_J} = C^d_{ec} \underset{(d)}{\varphi^I_J}. \tag{I.38}$$

Система тензорных полей $\underset{(c)}{\varphi^I_K}$, определенных на nr-мерном многообразии $\mathfrak{M}_{nr}$ и связанных соотношениями (I.38), называется почти алгебраической структурой на $\mathfrak{M}_{nr}$, порождаемой алгебраически-аналитической структурой многообразия $\mathfrak{M}_n$. Таким образом, многообразием с r-мерной почти алгебраической структурой называется вещественное nr-мерное ориентируемое многообразие класса C^∞, на котором задано r-тензорных полей того же класса, удовлетворяющих соотношениям (I.38).

§ 5. Двумерные алгебраические структуры

Если $r=2$, то хорошо известны следующие алгебры: алгебра комплексных чисел, алгебра двойных чисел и алгебра двойственных чисел.

1. *Почти комплексная структура.* Если A_2 – алгебра комплексных чисел, то система тензоров $\underset{(c)}{\varphi}{}^I_J$ состоит только из двух тензоров, причем $\underset{(1)}{\varphi}{}^I_J=\delta^I_J$, а $\underset{(2)}{\varphi}{}^I_J$ удовлетворяет соотношению ($\varphi^I_J=\underset{(2)}{\varphi}{}^I_J$):

$$\varphi^I_K\varphi^K_J=-\delta^I_J. \tag{I.39}$$

Таким образом, многообразием с почти комплексной структурой называется вещественное четномерное дифференцируемое многообразие класса C^∞, на котором определено тензорное поле, удовлетворяющее соотношению (I.39). Тензоры Схоутена для этой структуры имеют вид [1]:

$$O^{IK}_{JL}=\frac{1}{2}\,(\delta^I_J\delta^K_L-\varphi^I_J\varphi^K_L), \tag{I.40}$$

$$^*O^{IK}_{JL}=\frac{1}{2}\,(\delta^I_J\delta^K_L+\varphi^I_J\varphi^K_L). \tag{I.41}$$

Продолженная система дифференциальных уравнений тензора φ^I_J имеет вид

$$\nabla\varphi^I_J=\varphi^I_{JK}\,\omega^K,$$
$$\nabla\varphi^I_{JK}-\varphi^I_L\,\omega^L_{JK}+\varphi^L_J\,\omega^I_{LK}=\varphi^I_{J(KL)}\,\omega^L,$$
$$\nabla\varphi^I_{JKL}-\varphi^I_{EK}\,\omega^E_{JL}+\varphi^I_{JE}\,\omega^E_{KL}+\varphi^E_{JK}\,\omega^I_{EL}-\varphi^I_E\,\omega^E_{JKL}+\varphi^E_J\,\omega^I_{EKL}=\varphi^I_{JKLH}\,\omega^H, \tag{I.42}$$

где

$$\varphi^I_{J[KLH]}=0.$$

Тензор Нейенхейса почти комплексной структуры определяется равенствами

$$N^H_{JI}=\varphi^A_I\,(\varphi^H_{AJ}-\varphi^H_{JA})-\varphi^A_J\,(\varphi^H_{AI}-\varphi^H_{IA}) \tag{I.43}$$

и его компоненты связаны следующими тождествами [1]:

$$N^H_{JH}=0,\quad N^H_{JI}+N^H_{IJ}=0,$$
$$^*O^{AB}_{JI}\,N^H_{AB}=0,\quad O^{BH}_{IA}\,N^A_{JB}=0. \tag{I.44}$$

Если на многообразии $\mathfrak{M}_{2n}$ задана аффинная связность $\mathring{\Gamma}^I_{JK}$ без кручения и произвольный тензор $\mathfrak{a}^I_{JK}$, то φ – связность (почти комплексная связность) этого многообразия определяется формулой Коссу [25]:

$$\Gamma^I_{JK}(\varphi)=\mathring{\Gamma}^I_{JK}+\frac{1}{2}\,\{\mathfrak{a}^I_{JK}-\varphi^I_T\varphi^S_J\mathfrak{a}^T_{SK}+\varphi^S_J\overset{\mathring{\Gamma}}{\nabla}_K\varphi^I_S\}, \tag{I.45}$$

где

$$\overset{\Gamma}{\nabla}_K\varphi^I_J=\varphi^I_{JK}-\varphi^I_L\,\mathring{\Gamma}^L_{JK}+\varphi^L_J\,\mathring{\Gamma}^I_{LK}. \tag{I.46}$$

Оператор Татибана – Кото Φ_K, отображающий тензор $T^{I_1\ldots I_p}_{J_1\ldots J_q}$ в тензор $\Phi_K T^{I_1\ldots I_p}_{J_1\ldots J_q}$, определяется равенством [33]:

$$\Phi_K T^{I_1\ldots I_p}_{J_1\ldots J_q}=\varphi^A_K T^{I_1\ldots I_p}_{J_1\ldots J_q A}-\sum_{a=1}^{q}\varphi^A_{J_a K}T^{I_1\ldots I_p}_{J_1\ldots A\ldots J_q}-\sum_{a=1}^{q}\varphi^A_{J_a}T^{I_1\ldots I_p}_{J_1\ldots A\ldots J_q K}+$$
$$+\sum_{a=1}^{q}\varphi^A_{KJ_a}T^{I_1\ldots I_p}_{J_1\ldots A\ldots J_q}-\sum_{a=1}^{p}(\varphi^{I_a}_{AK}-\varphi^{I_a}_{KA})\,T^{I_1\ldots A\ldots I_p}_{J_1\ldots J_q}, \tag{I.47}$$

а неголономная производная Уокера – равенством [32]:

$$W_{RS}T^{I_1 \dots I_p}_{J_1 \dots J_q} = \frac{1}{4}\left\{N^A_{RS}T^{I_1 \dots I_p}_{J_1 \dots J_q A} + \sum_{a=1}^{p} T^{I_1 \dots A \dots I_p}_{J_1 \dots J_q} h^{I_a}_{ARS} - \right.$$

$$\left. - \sum_{a=1}^{q} T^{I_1 \dots I_p}_{J_1 \dots A \dots J_q} h^A_{J_a RS}\right\}, \qquad (I.48)$$

где

$$h^I_{JRS} = -\frac{1}{2}N^I_{RSJ} + \frac{1}{2}\varphi^I_A(\varphi^B_J N^A_{RSB} - N^B_{RS}\varphi^A_{JB} + N^A_{BS}\varphi^B_{JR} - N^A_{BR}\varphi^B_{JS}) \qquad (I.49)$$

и

$$\nabla T^{I_1 \dots I_p}_{J_1 \dots J_q} = T^{I_1 \dots I_p}_{J_1 \dots J_q A}\omega^A, \quad \nabla N^I_{JK} = N^I_{JKA}\omega^A.$$

Если f – произвольное скалярное поле, т. е.

$$df = f_A\omega^A, \quad \nabla f_A = f_{(AB)}\omega^B, \qquad (I.50)$$

то

$$W_{RS}f = \frac{1}{4}N^H_{RS}f_H \qquad (I.51)$$

и

$$\frac{1}{2}(W_{IK}W_{RS}f - W_{RS}W_{IK}f) = H^A_{IKRS}f_A, \qquad (I.52)$$

где

$$H^I_{JKRS} = \frac{1}{4}\left(W_{[IK}N^H_{RS]} - \frac{1}{4}N^A_{[RS}h^H_{|A|JK]}\right) \qquad (I.53)$$

и называется вторым тензором кручения.

2. *Почти двойная структура.* Если A_2 алгебра двойных чисел, то система тензоров $\underset{(c)}{\varphi^I_J}$ состоит тоже из двух тензоров, причем первый совпадает с тензором Кронекера, а второй ψ^I_J удовлетворяет соотношениям

$$\psi^I_K\psi^K_J = \delta^I_J. \qquad (I.54)$$

Из дифференциальных уравнений, аналогичных уравнениям (I.42), следует, что

$$\nabla\psi^I_{[JK]} + \frac{1}{2}(\psi^L_J\omega^I_{LK} - \psi^L_K\omega^I_{LJ}) = \frac{1}{2}(\psi^I_{J(KL)} - \psi^I_{K(JL)})\omega^L$$

и, в силу (I.54), имеем

$$\psi^J_E\nabla\psi^I_{[JK]} + \frac{1}{2}\omega^I_{EK} - \frac{1}{2}\psi^J_E\psi^L_K\omega^I_{LJ} = \frac{1}{2}\psi^J_E(\psi^I_{J(KL)} - \psi^I_{K(JL)})\omega^L.$$

Так как $\omega^I_{LJ} = \omega^I_{JL}$, то отсюда получаем

$$\psi^J_E\nabla\psi^I_{[JK]} - \psi^J_K\nabla\psi^I_{[JE]} \equiv 0 \pmod{\omega^L}.$$

В силу того, что

$$\nabla(\psi^J_E\psi^I_{[JK]}) \equiv \psi^J_E\nabla\psi^I_{[JK]} \pmod{\omega^L},$$

величины

$$M^I_{EK} = 2(\psi^J_E\psi^I_{[JK]} - \psi^J_K\psi^I_{[JE]}) \qquad (I.55)$$

образуют тензор Нейенхейса почти двойной структуры.

3. *Почти дуальные структуры.* Эта структура получается в том случае, когда A_2 – алгебра дуальных чисел. Система тензоров состоит из двух тензоров – тензора Кронекера и тензора χ^I_J, удовлетворяющего соотношениям:

$$\chi^K_J\chi^I_K = 0. \qquad (I.56)$$

Можно проверить, что и для этой структуры тензор Нейенхейса определяется такой же формулой.

§ 6. Почти кватернионные структуры

Эта структура определяется на дифференцируемом многообразии $4n$ измерений при помощи четырех тензорных полей δ^I_J, φ^I_J, ψ^I_J и χ^I_J, компоненты которых связаны между собой соотношениями (δ^I_J – тензор Кронекера)*):

$$\varphi^I_K\varphi^K_J=-\delta^I_J,\ \ \psi^I_K\psi^K_J=-\delta^I_J,\ \ \chi^I_K\chi^K_J=-\delta^I_J,\ \ \varphi^I_K\psi^K_J=\chi^I_J,\ \ \psi^I_K\chi^K_J=\varphi^I_J,$$
$$\chi^I_K\psi^K_J=\varphi^I_J,\ \ \psi^I_K\varphi^K_J=-\chi^I_J,\ \ \chi^I_K\psi^K_J=-\varphi^I_J,\ \ \psi^I_K\chi^K_J=-\varphi^I_J. \qquad (I.57)$$

Эту же структуру можно определить и при помощи двух почти комплексных структур φ^I_J и ψ^I_J, связанных между собою соотношениями

$$\varphi^K_J\psi^I_K+\psi^K_J\varphi^I_K=0. \qquad (I.57)$$

В этом случае тензор

$$\chi^I_J=\varphi^K_J\psi^I_K$$

также определяет почти комплексную структуру, которая связана с остальными двумя комплексными структурами соотношениями, аналогичными соотношениям (I.57′).

§ 7. Неголономное дифференцирование Ли

Понятие производной Ли для специальных дифференциально-геометри ческих объектов (тензоров и объектов связности) встречались уже в работах Схоутена и Ван Кампена, П. Дина, В. Слебодзинского и др. (1931 – 1933 г.), но общая трактовка этого понятия для любых полей дифференциально-геометрических объектов, определенных на дифференцируемом многообразии, дано в работах В. В. Вагнера [9], [12]. В этом параграфе излагаются общие свойства производных Ли в неголономном репере при помощи метода Г. Ф. Лаптева, причем предлагаемая схема построения теории дифференцирования Ли отличается от той схемы, которую в 1960 г. предложил Л. Е. Евтушик [6].

Рассмотрим следующие преобразования базисных форм:

$$\overline{\omega}^i=\omega^i-v^i\Theta,\ \ D\Theta=0, \qquad (I.58)$$

где v^i – векторное поле, дифференциальные уравнения которого имеют вид

$$\nabla v^i=v^i_k\,\omega^k. \qquad (I.59)$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (I.58), в силу (I.58) и (I.59) мы получим

$$D\overline{\omega}^i=[\overline{\omega}^k,\ \overline{\omega}^i_k],$$

где

$$\overline{\omega}^i_j=\omega^i_j-v^i_j\Theta. \qquad (I.58_1)$$

Последовательное продолжение системы (I.59) дает

$$dv^i_{j_1\ldots j_a}-\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\{\omega^k_{(j_1\ldots j_s}v^i_{j_{s+1}\ldots j_a)k}-$$
$$-v^k_{(j_1\ldots j_s}\omega^i_{j_{s+1}\ldots j_a)k}\}+v^k\omega^i_{j_1\ldots j_a k}=v^i_{j_1\ldots j_a k}\,\omega^k. \qquad (I.59_1)$$

*) В этом параграфе $I,\ J,\ K=1,\ 2,\ \ldots,\ 4n$.

Дифференцируя внешним образом (I.58$_1$), мы получим, что внешний дифференциал $D\bar{\omega}^i_k$ имеет такую же структуру, как и $D\omega^i_k$, но только формы ω^i_k заменены формами $\bar{\omega}^i_k$, а ω^i_{jk} — новыми формами

$$\bar{\omega}^i_{jk} = \omega^i_{jk} - v^i_{jk}\Theta. \qquad (I.58_2)$$

Аналогичным образом получаем, что формы

$$\bar{\omega}^i_{j_1 \ldots j_a} = \omega^i_{j_1 \ldots j_a} - v^i_{j_1 \ldots j_a}\Theta \qquad (I.58a)$$

имеют такую же структуру как и $\omega^i_{j_1 \ldots j_a}$, т. е. преобразования (I.58a) сохраняют вид структурных уравнений (2).

В. В. Вагнер доказал, что тождественное обращение в нуль производной Ли от данного дифференциально-геометрического объекта является необходимым и достаточным условием того, что данный дифференциально-геометрический объект инвариантен относительно однопараметрической группы точечных преобразований в V_n, определяемой векторным полем v^i [9]. Таким образом, компоненты производной Ли данного дифференциально-геометрического объекта характеризуют изменения его компонент, относительно преобразований группы, порожденной векторным полем. Отсюда вытекает, что дифференциальные уравнения дифференциально-геометрического объекта будут инвариантными относительно преобразования (I.58a) форм $\omega^i_{j_1 \ldots j_a}$ тогда и только тогда, когда производная Ли от рассматриваемого дифференциально-геометрического объекта обращается в нуль (относительно данного векторного поля). Если в системе дифференциальных уравнений (I.9) заменим формы ω^i, $\omega^i_{j_1 \ldots j_a}$ формами $\bar{\omega}^i$, $\bar{\omega}^i_{j_1 \ldots j_a}$, которые связаны с предыдущими равенствами (I.58) и (I.58a), то уравнения (I.9) примут новый вид и, в общем случае, появится новый коэффициент при Θ:

$$dy^\alpha + \sum_{a=1}^{p} y_i^{\alpha i_1 \ldots i_a}(y)\,\bar{\omega}^i_{i_1 \ldots i_a} = y^\alpha_k \bar{\omega}^k + \overset{L}{\underset{v}{D}} y^\alpha \Theta, \qquad (I.60)$$

где

$$\overset{L}{\underset{v}{D}} y^\alpha = y^\alpha_k v^k - \sum_{a=1}^{p} y_i^{\alpha i_1 \ldots i_a} v^i_{i_1 \ldots i_a}. \qquad (I.61)$$

Систему величин $\overset{L}{\underset{v}{D}} y^\alpha$ естественно назвать неголономной производной Ли дифференциально-геометрического объекта y^α относительно векторного поля (I.59), а процесс получения таких производных — неголономным дифференцированием Ли. Таким образом, метод Г. Ф. Лаптева [17], т. е. метод продолжений и охватов, дает возможность очень простым способом строить производные Ли от данных полей дифференциально-геометрических объектов (эта возможность впервые была замечена Л. Е. Евтушиком [6], но только он рассматривал дифференцирование Ли как ковариантное дифференцирование относительно специального дифференциально-геометрического объекта вдоль линий конгруэнции кривых данного векторного поля). Приведем доказательство основных свойств неголономных производных Ли, некоторые из них для голономного случая доказаны В. В. Вагнером [12].

1. В силу инвариантности дифференциальных уравнений (I.59) и (I.59$_1$) векторного поля v^i относительно преобразований (I.58) и (I.58a), мы получаем

$$\overset{L}{\underset{v}{D}} v^i = 0. \tag{I.62}$$

2. Если на дифференцируемом многообразии V_n определена система векторных полей $\underset{(s)}{v^i}$ $(s = 1,\ 2,\ \ldots,\ r)$:

$$d\underset{(s)}{v^i} + \underset{(s)}{v^k}\,\omega^i_k = \underset{(s)}{v^i_k}\,\omega^k, \tag{I.63}$$

то величины (C^s — некоторые константы):

$$\overset{*}{v}{}^i = C^s \underset{(s)}{v^i} \tag{I.64}$$

тоже образуют векторное поле и

$$d\overset{*}{v}{}^i + \overset{*}{v}{}^k\,\omega^i_k = \overset{*}{v}{}^i_k\,\omega^k, \tag{I.65}$$

где

$$\overset{*}{v}{}^i_k = C^s \underset{(s)}{v^i_k} \tag{I.66}$$

и

$$\overset{*}{v}{}^i_{i_1 \ldots i_a} = C^s \underset{(s)}{v^i_{i_1 \ldots i_a}}. \tag{I.66a}$$

В силу (I.61), (I.66) и (I.66a), мы получаем

$$\overset{L}{\underset{\overset{*}{v}}{D}} y^\alpha = C^s \overset{L}{\underset{\underset{(s)}{v}}{D}} y^\alpha. \tag{I.67}$$

3. Коммутатором двух векторных полей дифференцируемого многообразия V_n, определенных уравнениями

$$\nabla \underset{1}{v^i} = \underset{1}{v^i_k}\,\omega^k, \quad \nabla \underset{2}{v^i} = \underset{2}{v^i_k}\,\omega^k,$$

называется векторное поле

$$\underset{12}{v^i} = \underset{1}{v^k}\,\underset{2}{v^i_k} - \underset{2}{v^k}\,\underset{1}{v^i_k}, \tag{I.68}$$

дифференциальные уравнения которого имеют вид:

$$\nabla \underset{12}{v^i} = \underset{12}{v^i_k}\,\omega^k, \tag{I.69}$$

где

$$\underset{12}{v^i_k} = \underset{1}{v^l}\,\underset{2}{v^i_{lk}} - \underset{2}{v^l}\,\underset{1}{v^i_{lk}} + \underset{1}{v^l_k}\,\underset{2}{v^i_l} - \underset{2}{v^l_k}\,\underset{1}{v^i_l}.$$

Неголономная производная Ли векторного поля $\underset{2}{v^i}$ относительно векторного поля $\underset{1}{v^i}$ имеет вид

$$\overset{L}{D_1}\underset{2}{v^i} = \underset{2}{v^i_k}\,\underset{1}{v^k} - \underset{2}{v^k}\,\underset{1}{v^i_k}. \tag{I.70}$$

Отсюда, в силу (I.68) и антисимметричности коммутатора следует, что ($\overset{L}{D_1}$ — символ неголономной производной Ли относительного векторного поля $\underset{1}{v^i}$):

$$\overset{L}{D_1}\underset{2}{v^i} = -\overset{L}{D_2}\underset{1}{v^i} = \underset{12}{v^i}, \tag{I.71}$$

т. е. что коммутатор двух векторных полей $\underset{1}{v^i}$ и $\underset{2}{v^i}$ равняется неголономной производной Ли от второго векторного поля относительно первого.

4. Если на дифференцируемом многообразии заданы три векторные поля $\underset{1}{v}^i$, $\underset{2}{v}^i$ и $\underset{3}{v}^i$, то (в силу того, что $\overset{L}{D}_1 \underset{2}{v}^i$ являются решениями той же системы, что и $\underset{12}{v}^i$):

$$\overset{L}{D}_3 (\overset{L}{D}_{12} v^i) = \underset{12}{v}^i_k \underset{3}{v}^k - \underset{12}{v}^k \underset{3}{v}^i_k. \tag{I.72}$$

Аналогичным образом можно получить выражения:

$$\overset{L}{D}_1 (\overset{L}{D}_{23} v^i) = \underset{23}{v}^i_k \underset{1}{v}^k - \underset{23}{v}^k \underset{1}{v}^i_k \tag{I.73}$$

и

$$\overset{L}{D}_2 (\overset{L}{D}_{31} v^i) = \underset{31}{v}^i_k \underset{2}{v}^k - \underset{31}{v}^k \underset{2}{v}^i_k, \tag{I.74}$$

где

$$\underset{ab}{v}^i = \underset{a}{v}^k \underset{b}{v}^i_k - \underset{b}{v}^k \underset{a}{v}^i_k \tag{I.75}$$

и

$$\underset{ab}{v}^i_k = \underset{a}{v}^l \underset{b}{v}^i_{lk} - \underset{b}{v}^l \underset{a}{v}^i_{lk} + \underset{a}{v}^l_k \underset{b}{v}^i_l - \underset{b}{v}^l_k \underset{a}{v}^i_l \qquad (a,\ b = 1,\ 2,\ 3). \tag{I.76}$$

Из (I.72) – (I.76) следует тождество Бианки для трех векторных полей:

$$\overset{L}{D}_1(\overset{L}{D}_{23} v^i) + \overset{L}{D}_2(\overset{L}{D}_{31} v^i) + \overset{L}{D}_3(\overset{L}{D}_{12} v^i) = 0. \tag{I.77}$$

5. Дифференцируя внешним образом уравнения (I.60), в силу тождеств (I.10), мы получим

$$\Big[dy^\alpha_k - y^\alpha_l \omega^l_k + \sum_{a=1}^{p} (\partial_\beta y^{\alpha i_1 \ldots i_a}_i y^\beta_k \bar\omega^i_{i_1 \ldots i_a} + y^{\alpha i_1 \ldots i_a}_i \omega^i_{i_1 \ldots i_a k}),\ \omega^k\Big] +$$

$$+ \Big[d(\overset{L}{\underset{v}{D}} y^\alpha) + \sum_{a=1}^{p} \partial_\beta y^{\alpha i_1 \ldots i_a}_i (\overset{L}{\underset{v}{D}} y^\beta)\, \bar\omega^i_{i_1 \ldots i_a},\ \Theta\Big] = 0. \tag{I.78}$$

Развертывая эти уравнения по лемме Картана (считая, что формы ω^i и Θ линейно независимы), получим

$$dy^\alpha_k - y^\alpha_l \bar\omega^l_k + \sum_{a=1}^{p} (\partial_\beta y^{\alpha i_1 \ldots i_a}_i y^\beta_k \bar\omega^i_{i_1 \ldots i_a} + y^{\alpha i_1 \ldots i_a}_i \bar\omega^i_{i_1 \ldots i_a k}) =$$

$$= \dot y^\alpha_{kl} \bar\omega^l + A^\alpha_k \Theta, \tag{I.79}$$

$$d(\overset{L}{\underset{v}{D}} y^\alpha) + \sum_{a=1}^{p} \partial_\beta y^{\alpha i_1 \ldots i_a}_i (\overset{L}{\underset{v}{D}} y^\beta)\, \bar\omega^i_{i_1 \ldots i_a} = (\overset{L}{\underset{v}{D}} y^\alpha)_k\, \bar\omega^k + A^\alpha \Theta, \tag{I.80}$$

где $\dot y^\alpha_{kl} = \dot y^\alpha_{lk}$.

Продолжение системы (I.9) дает

$$dy^\alpha_k - y^\alpha_l \omega^l_k + \sum_{a=1}^{p} (\partial_\beta y^{\alpha i_1 \ldots i_a}_i y^\beta_k \omega^i_{i_1 \ldots i_a} + y^{\alpha i_1 \ldots i_a}_i \omega^i_{i_1 \ldots i_a k}) = y^\alpha_{kl} \omega^l, \tag{I.81}$$

где $y^\alpha_{kl} = y^\alpha_{lk}$.

Если к системе дифференциальных уравнений (I.81) применим преобразования (I.58) и (I.58а), то получим

$$dy_k^\alpha - y_l^\alpha \bar\omega_k^l + \sum_{a=1}^{p} (\partial_\beta y_i^{\alpha i_1 \dots i_a} y_k^\beta \omega_{i_1 \dots i_a}^i + y_i^{\alpha i_1 \dots i_a} \bar\omega_{i_1 \dots i_a k}^i) =$$

$$= y_{kl}^\alpha \omega^l + \overset{L}{\underset{v}{D}} (y_k^\alpha) \Theta, \tag{I.81$_1$}$$

где

$$\overset{L}{\underset{v}{D}} (y_k^\alpha) = y_{kl}^\alpha v^l + y_l^\alpha v_k^l - \sum_{a=1}^{p} (\partial_\beta y_i^{\alpha i_1 \dots i_a} y_k^\beta v_{i_1 \dots i_a}^i + y_i^{\alpha i_1 \dots i_a} v_{i_1 \dots i_a k}^i). \tag{I.82}$$

Так как левые части уравнений (I.79) и (I.81$_1$) одинаковы и формы ω^i и Θ линейно независимы, то

$$\mathring{y}_{kl}^\alpha = y_{kl}^\alpha, \quad A_k^\alpha = \overset{L}{\underset{v}{D}} (y_k^\alpha). \tag{I.83}$$

Эти условия дают возможность из уравнений (I.58), (I.58а) и (I.79) исключить формы ω^k, $\bar\omega_{i_1 \dots i_a}^i$, Θ и получить систему дифференциальных уравнений (I.81) для дополнительных компонент y_k^α продолженного дифференциально-геометрического объекта (y^α, y_k^α).

Дифференцируя соотношения (I.71), в силу (I.59), (I.59$_1$) и (I.75), мы получим систему дифференциальных уравнений для компонент производной Ли:

$$d(\overset{L}{\underset{v}{D}} y^\alpha) + \sum_{a=1}^{p} \partial_\beta y_i^{\alpha i_1 \dots i_a} (\overset{L}{\underset{v}{D}} y^\beta) \omega_{i_1 \dots i_a}^i = (\overset{L}{\underset{v}{D}} y^\alpha)_k \omega^k, \tag{I.84}$$

где

$$(\overset{L}{\underset{v}{D}} y^\alpha)_k = y_{lk}^\alpha v^l + y_l^\alpha v_k^l - \sum_{a=1}^{p} (\partial_\beta y_i^{\alpha i_1 \dots i_a} y_k^\beta + y_i^{\alpha i_1 \dots i_a} v_{i_1 \dots i_a k}^i). \tag{I.85}$$

Из формул (I.82) и (I.85) следует коммутативность операции неголономного дифференцирования Ли и операции продолжения системы дифференциальных уравнений дифференциально-геометрического объекта, т. е.

$$(\overset{L}{\underset{v}{D}} y^\alpha)_k = \overset{L}{\underset{v}{D}} (y_k^\alpha). \tag{I.86}$$

6. Заменяя в уравнениях (I.84) формы ω^i и $\omega_{i_1 \dots i_a}^i$ формами $\bar\omega^k$ и $\bar\omega_{i_1 \dots i_a}^i$, мы получим выражение для второй производной Ли (коэффициент при Θ):

$$\overset{L}{\underset{v}{D}} (\overset{L}{\underset{v}{D}} y^\alpha) = (\overset{L}{\underset{v}{D}} y^\alpha)_k v^k - \sum_{a=1}^{p} \partial_\beta y_i^{\alpha i_1 \dots i_a} \overset{L}{\underset{v}{D}} y^\beta v_{i_1 \dots i_a}^i. \tag{I.87}$$

Очевидно, что

$$B^\alpha = \overset{L}{\underset{v}{D}} (\overset{L}{\underset{v}{D}} y^\alpha). \tag{I.88}$$

Таким образом, уравнения (I.79) и (I.80) можно переписать в следующем виде:

$$dy_k^\alpha - y_l^\alpha \bar\omega_k^l + \sum_{a=1}^{p} (\partial_\beta y_i^{\alpha i_1 \dots i_a} y_k^\beta \bar\omega_{i_1 \dots i_a}^i + y_l^{\alpha i_1 \dots i_a} \bar\omega_{i_1 \dots i_a k}^i) =$$

$$= y_{kl}^\alpha \bar\omega^l + (\overset{L}{\underset{v}{D}} y_k^\alpha) \Theta \tag{I.79$'$}$$

и

$$d(\underset{v}{\overset{L}{D}}y^{\alpha})+\sum_{a=1}^{p}\partial_{\beta}y_{i}^{\alpha i_1\ldots i_a}(\underset{v}{\overset{L}{D}}y^{\beta})\overline{\omega}^{i}_{i_1\ldots i_a}=(\underset{v}{\overset{L}{D}}y^{\alpha})_k\overline{\omega}^k+(\underset{v}{\overset{L}{D^2}}y^{\alpha})\Theta, \qquad (\mathrm{I}.80_1)$$

где

$$\underset{v}{\overset{L}{D^2}}y^{\alpha}=\underset{v}{\overset{L}{D}}(\underset{v}{\overset{L}{D}}y^{\alpha}).$$

Продолжение уравнений (I.80′) дает:

$$d(\underset{v}{\overset{L}{D}}y^{\alpha})_k-(\underset{v}{\overset{L}{D}}y^{\alpha})_l\overline{\omega}^l_k+\sum_{a=1}^{p}(\partial^2_{\beta\gamma}y_{i}^{\alpha i_1\ldots i_a}(\underset{v}{\overset{L}{D}}y^{\beta})y^{\gamma}_k+\partial_{\beta}y_{i}^{\alpha i_1\ldots i_a}\underset{v}{\overset{L}{D}}y^{\beta})\overline{\omega}^{i}_{i_1\ldots i_a}+$$

$$+\sum_{a=1}^{p}\partial_{\beta}y_{i}^{\alpha i_1\ldots i_a}(\underset{v}{\overset{L}{D}}y^{\beta})\overline{\omega}^{i}_{i_1\ldots i_a k}=(\underset{v}{\overset{L}{D}}y^{\alpha})_{kl}\overline{\omega}^l+(\underset{v}{\overset{L}{D^2}}y^{\alpha}_k)\Theta \qquad (\mathrm{I}.89)$$

и

$$d(\underset{v}{\overset{L}{D^2}}y^{\alpha})+\sum_{a=1}^{p}(\partial^2_{\beta\gamma}y_{i}^{\alpha i_1\ldots i_a}\underset{v}{\overset{L}{D}}y^{\beta}\underset{v}{\overset{L}{D}}y^{\gamma}+\partial_{\beta}y_{i}^{\alpha i_1\ldots i_a}\underset{v}{\overset{L}{D^2}}y^{\beta})\overline{\omega}^{i}_{i_1\ldots i_a}=$$

$$=(\underset{v}{\overset{L}{D^2}}y^{\alpha})_k\overline{\omega}^k+(\underset{v}{\overset{L}{D^3}}y^{\alpha})\Theta. \qquad (\mathrm{I}.90)$$

Мы получили алгоритм для получения неголономных производных Ли высшего порядка данного дифференциально-геометрического объекта. Для того, чтобы получить $(c+1)$-ую неголономную производную Ли дифференциально-геометрического объекта, нужно c раз частично продолжить (под этим понимается продолжение систем (I.60), (I.80′), (I.90) и т. д.) преобразованную систему дифференциальных уравнений (I.60) рассматриваемого дифференциально-геометрического объекта. Полученная система дифференциальных уравнений будет иметь вид:

$$d(\underset{v}{\overset{L}{D^c}}y^{\alpha})+\sum_{a=1}^{p}\left\{c!\sum_{b=1}^{c}\frac{1}{b!}\partial^b_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_b}y_{i}^{\alpha i_1\ldots i_a}\sum_{(c_1+c_2+\ldots+c_b=c)}\frac{1}{c_1!c_2!\ldots c_b!}\times\right.$$

$$\left.\times(\underset{v}{\overset{L}{D^{c_1}}}y^{\beta_1})(\underset{v}{\overset{L}{D^{c_2}}}y^{\beta_2})\cdots(\underset{v}{\overset{L}{D^{c_b}}}y^{\beta_b})\right\}\overline{\omega}^{i}_{i_1\ldots i_a}=(\underset{v}{\overset{L}{D^c}}y^{\alpha})_k\overline{\omega}^k+(\underset{v}{\overset{L}{D^{c+1}}}y^{\alpha})\Theta \qquad (\mathrm{I}.91)$$

$$(c=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

и коэффициент при Θ означает $(c+1)$-ую неголономную производную Ли для y^{α}, а коэффициент при $\overline{\omega}^k$ – c-тую неголономную производную Ли для y^{α}_k. Если в системе дифференциальных уравнений (I.91) формы $\overline{\omega}^k$, $\overline{\omega}^{i}_{i_1\ldots i_a}$ заменим формами ω^k и $\omega^{i}_{i_1\ldots i_a}$, согласно (I.58a), то, приравнивая коэффициент при Θ нулю, мы получим рекуррентную формулу для определения $(c+1)$-ой неголономной производной Ли:

$$\underset{v}{\overset{L}{D^{c+1}}}y^{\alpha}=(\underset{v}{\overset{L}{D^c}}y^{\alpha})_k v^k-\sum_{a=1}^{p}\left\{c!\sum_{b=1}^{c}\frac{1}{b!}\partial^b_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_b}y_{i}^{\alpha i_1\ldots i_a}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{c_1+c_2+\cdots+c_b=c)}\frac{1}{c_1!\,c_2!\ldots c_b!}(\underset{v}{\overset{L}{D^{c_1}}}y^{\beta_1})(\underset{v}{\overset{L}{D^{c_2}}}y^{\beta_2})\cdots(\underset{v}{\overset{L}{D^{c_b}}}y^{\beta_b})\right\}v^{i}_{i_1\ldots i_a}, \qquad (\mathrm{I}.92)$$

и в результате такого преобразования получается система дифференциальных уравнений для c-той неголономной производной Ли рассматриваемого дифференциально-геометрического объекта

$$d(\overset{L}{\underset{v}{D^c}} y^\alpha)+\sum_{a=1}^{p}\left\{c!\sum_{b=1}^{c}\frac{1}{b!}\partial^b_{\beta_1\ldots\beta_b}y^{\alpha i_1\ldots i_a}_{l}\sum_{(c_1+c_2+\cdots+c_b=c)}\frac{1}{c_1!\,c_2!\,\ldots\,c_b!}\times\right.$$

$$\left.\times(\overset{L}{\underset{v}{D^{c_1}}}y^{\beta_1})(\overset{L}{\underset{v}{D^{c_2}}}y^{\beta_2})\cdots(\overset{L}{\underset{v}{D^{c_b}}}y^{\beta_b})\right\}\omega^{l}_{i_1\ldots i_a}=(\overset{L}{\underset{v}{D^c}}y^\alpha)_k\,\omega^k. \qquad (\text{I}.91')$$

Отсюда следует, что в общем случае система величин $\overset{L}{\underset{v}{D^c}} y^\alpha$ не образует дифференциально-геометрического объекта, но система величин

$$(y^\alpha,\ \overset{L}{\underset{v}{D}}y^\alpha,\ \overset{L}{\underset{v}{D^2}}y^\alpha,\ \ldots,\ \overset{L}{\underset{v}{D^c}}y^\alpha)$$

всегда образует дифференциально-геометрический объект, класс которого совпадает с классом исходного.

7. Если дифференциально-геометрический объект y^α, определенный на V_n, является квазитензором в смысле Г. Ф. Лаптева [17], то функции $y^{\alpha i_1\ldots i_a}_{i}(y)$ имеют вид:

$$y^{\alpha i_1\ldots i_a}_{i}(y)=K^{\alpha i_1\ldots i_a}_{i\beta}y^\beta+K^{\alpha i_1\ldots i_a}_{i},$$

где $K^{\alpha i_1\ldots i_a}_{i\beta}$ и $K^{\alpha i_1\ldots i_a}_{i}$ — константы. В этом случае система ($\text{I}.91_1$) принимает вид:

$$d(\overset{L}{\underset{v}{D^c}}y^\alpha)+\sum_{a=1}^{p}K^{\alpha i_1\ldots i_a}_{i\beta}(\overset{L}{\underset{v}{D^c}}y^\beta)\,\omega^{i}_{i_1\ldots i_a}=(\overset{L}{\underset{v}{D^c}}y^\alpha)_k\,\omega^k, \qquad (\text{I}.93)$$

откуда и следует, что c-тая неголономная производная квазитензора является обобщенным тензором (линейным однородным дифференциально-геометрическим объектом).

8. Для неголономных производных Ли справедлива формула

$$\overset{L}{D_2}(\overset{L}{D_1}y^\alpha)-\overset{L}{D_1}(\overset{L}{D_2}y^\alpha)=\overset{L}{D_{12}}y^\alpha, \qquad (\text{I}.94)$$

где $\overset{L}{D_{12}}$ — символ неголономной производной Ли относительно коммутатора двух векторных полей $\underset{1}{v^i}$ и $\underset{2}{v^i}$.

9. Операции неголономного ковариантного дифференцирования и неголономного дифференцирования Ли неперестановочны между собой т. е.

$$\overset{L}{\underset{v}{D}}(\nabla_k y^\alpha)-\nabla_k(\overset{L}{\underset{v}{D}}y^\alpha)=\sum_{a=1}^{p}y^{\alpha i_1\ldots i_a}_{l}\overset{L}{\underset{v}{D}}\Gamma^{l}_{k l_1\ldots l_a}. \qquad (\text{I}.95)$$

ГЛАВА ВТОРАЯ

ПРОСТРАНСТВО ТЕНЗОРНЫХ ОПОРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

§ 1. Пространство тензорных опорных элементов как пространствó представления нормальной псевдогруппы

Группа $D^{(1,n)}$ является группой центро-аффинных преобразований $GL(R, n)$ и ее инвариантные формы имеют такую структуру:

$$D\Theta^i_j = [\Theta^k_j, \Theta^i_k]. \tag{II.1}$$

Эта группа является фундаментальной группой как касательного векторного пространства T_n, так и касательного дуального векторного пространства T^*_n. Рассмотрим тензорное произведение этих пространств

$$T_n\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \otimes^p T_n \otimes^q T^*_n.$$

Элементы пространства $T_n\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ называются p-раз контравариантными и q-раз ковариантными тензорами. Если каждой точке (x^i) дифференцируемого многообразия V_n (база) отнесем пространство $T_n\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ (слой), то совокупность всех этих пространств $T_n\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ (V_n) называется пространством тензорных опорных элементов и $\dim T_n\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}(V_n) = n(n^{p+q}+1)$. Если координаты опорного тензора определены с точностью до скалярного множителя (отличного от нуля), то размерность пространства $T_n\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ (V_n) уменьшается на единицу. Таким образом, на слои $T_n\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ мы можем смотреть как на n^{p+q}-мерные подпространства $x^i = \mathrm{const}$ пространства $T_n\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ (V_n). Локальные координаты $(x^i, w^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q})$ пространства $T_n\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ (V_n) являются решением вполне интегрируемой системы

$$\omega^i = 0, \quad \Psi'^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} = 0, \tag{II.2}$$

где

$$\Psi'^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} = dw^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} - \sum_{a=1}^{q} w^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots k\dots j_q}\omega^k_{j_a} + \sum_{a=1}^{p} w^{i_1\dots k\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\omega^{i_a}_k. \tag{II.3}$$

Внешние дифференциалы этих форм можно представить в виде

$$D\Psi'^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} = -\sum_{a=1}^{q}[\Psi'^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots k\dots j_q}, \omega^k_{j_a}] + \sum_{a=1}^{p}[\Psi'^{i_1\dots k\dots i_p}_{j_1\dots j_q}, \omega^{i_a}_k] +$$
$$+ [\omega^k, \Psi'^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q k}], \tag{II.3$_1$}$$

где

$$\Psi'^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q k} = -\sum_{a=1}^{q} w^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots s\dots j_q}\omega^s_{j_a k} + \sum_{a=1}^{p} w^{i_1\dots s\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\omega^{i_a}_{sk}. \tag{II.4}$$

Уравнения (II.2) можно рассматривать как условия инвариантности тензорного опорного элемента. Пфаффовые формы ω^i и $\Psi'^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ определяют пространство представления нормальной псевдогруппы $G^{(1)}$. Так как локальные координаты этого пространства являются первыми интегралами системы (II.2), то это пространство и совпадает с пространством тензорных опорных элементов $T_n \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} (V_n)$. Преобразования локальных координат тензорного опорного элемента являются решениями вполне интегрируемой системы

$$\overset{*}{\omega}{}^i = \omega^i, \quad \overset{*}{\Psi}{}'^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = \Psi'^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}.$$

Таким образом, структурные уравнения пространства тензорных опорных элементов имеют вид (I.1) и (II.3_1).

Пространство линейных элементов $T_n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (V_n) = T_n (V_n)$ и пространств гиперплоских элементов $T_n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (V_n) = T^*_n (V_n)$ (предполагается, что координаты опорного тензора являются однородными) являются частными случаями пространства тензорных опорных элементов. Локальные координаты линейного элемента (x^i, w^i) являются решением вполне интегрируемой системы

$$\omega^i = 0, \quad \Psi'^i = 0 \qquad (\Psi'^i = dw^i + w^k \omega^i_k)$$

и

$$D\Psi'^i = [\Psi'^k, \ \omega^i_k] + [\omega^k, \ \Psi'^i_k], \ \Psi'^i_k = w^p \omega^i_{pk}.$$

Если

$$w^i = \rho w^i,$$

то

$$\overline{\Psi}{}'^i = \rho\,(\Psi'^i + w^i \, d \ln \rho).$$

§ 2. Линейная дифференциально-геометрическая связность пространства линейных элементов

Линейную дифференциально-геометрическую связность Γ на многообразии $T_n (V_n)$ определим при помощи форм

$$\omega^i, \ \tilde{\Psi}'^i = \Psi'^i + \Gamma^i_k \omega^k, \tag{II.5}$$

структурные уравнения которых имеют вид

$$D\omega^i = [\omega^k, \ \omega^i_k], \ D\tilde{\Psi}'^i = [\tilde{\Psi}'^k, \ \omega^i_k] + [\Delta\Gamma^i_k, \ \omega^k], \tag{II.6}$$

где

$$\Delta\,\Gamma^i_k = \nabla\,\Gamma^i_k - \Psi'^i_k. \tag{II.7}$$

Отсюда следует, что формы (II.5) определяют на многообразии $T_n (V_n)$ линейную дифференциально-геометрическую связность тогда и только тогда, когда на $T_n (V_n)$ определено поле дифференциально-геометрического объекта Γ^i_k следующей структуры*)

$$\nabla\,\Gamma^i_j - \Psi'^i_j = \Gamma^i_{k,\,j}\,\omega^k + {}'\Gamma^i_{k,\,j}\,\Psi'^k. \tag{II.8}$$

*) В 1924 г. Бервальд ввел понятие параллельного перенесения векторов в пространстве Финслера [22], [23], рассматривая его как пространство линейных элементов с метрикой. Заметим, что в упомянутых работах Бервальда рассматривался дифференциально-геометрический объект такого же типа как и Γ^i_j.

Требование, чтобы связность Γ была инвариантной относительно преобразований $\bar{w}^i=\rho w^i\ (\rho>0)$, накладывает некоторые ограничения на дифференциально-геометрический объект Γ^i_j. Это будет тогда и только тогда когда

$$\Gamma^i_j(x,\ w)=\rho\Gamma^i_j(x,\ w).$$

Отсюда следует, что

$$\Gamma^i_{j,\,k}(x,\ \bar{w})=\rho\,\Gamma^i_{j,\,k}(x,\ w),\quad '\Gamma^i_{j,\,k}(x,\ \bar{w})='\Gamma^i_{j,\,k}(x,\ w).$$

Так как

$$D\Psi^i_j=[\Psi^k,\ \omega^i_{jk}]+[\Psi^k_j,\ \omega^i_k]+[\omega^k_j,\ \Psi^i_k]+[\omega^k,\ \Psi^i_{jk}], \tag{II.9}$$

где

$$\Psi^i_{jk}=w^p\,\omega^i_{jkp},$$

то, продолжая систему (II.8), мы получим

$$\nabla\Gamma^i_{k,\,j}-\Gamma^i_p\,\omega^p_{kj}+\Gamma^p_j\,\omega^i_{kp}-'\Gamma^i_{p,\,j}\,\Psi^p_k-\Psi^i_{jk}=\Gamma^i_{kp,\,j}\,\omega^p+'\Gamma^i_{pk,\,j}\,\Psi^p, \tag{II.10}$$

$$\nabla\,'\Gamma^i_{j,\,k}-\omega^i_{jk}='\Gamma^i_{kp,\,j}\,\omega^p+''\Gamma^i_{kp,\,j}\,\Psi^p,$$

где

$$\Gamma^i_{kp,\,j}=\Gamma^i_{pk,\,j},\quad ''\Gamma^i_{kp,\,j}=''\Gamma^i_{pk,\,j}.$$

Систему дифференциальных уравнений (II.8) можно представить в виде

$$\nabla\,\Gamma^i_j-\Psi^i_j=G^i_{k,\,j}\,\omega^k+'\Gamma^i_{k,\,j}\,\tilde{\Psi}^k, \tag{II.8$_1$}$$

где

$$G^i_{k,\,j}=\Gamma^i_{k,\,j}-'\Gamma^i_{p,\,j}\,\Gamma^p_k. \tag{II.11}$$

Дифференцируя эти соотношения, в силу (II.8$_1$) и (II.10), мы получим

$$\nabla G^i_{k,\,j}-\Gamma^i_p\,\omega^p_{kj}+\Gamma^p_j\,\omega^i_{kp}+\Gamma^p_k\,\omega^i_{pj}-\Psi^i_{kj}=G^i_{pk,\,j}\,\omega^p+'G^i_{pk,\,j}\,\Psi^p, \tag{II.12}$$

где

$$G^i_{pk,\,j}=\Gamma^i_{pk,\,j}-'\Gamma^i_{pq,\,j}\,\Gamma^q_k-'\Gamma^i_{q,\,j}\,\Gamma^q_{p,\,k} \tag{II.13}$$

и

$$'G^i_{pk,\,j}='\Gamma^i_{pk,\,j}-''\Gamma^i_{pq,\,j}\,\Gamma^q_k-'\Gamma^i_{q,\,j}\,'\Gamma^q_{p,\,k}. \tag{II.14}$$

Так как формы ω^i_{jk} и ω^i_{jkp} симметричны по нижним индексам, то из (II.10) и (II.12) следует, что величины $'\Gamma^i_{[j,\,k]}$ и $G^i_{[j,\,k]}$ являются тензорами. Тензор

$$\Re^i_{pq}=2G^i_{[p,\,q]} \tag{II.15}$$

называется тензором кривизны связности Γ (В. В. Вагнер этот тензор называет аффинором кривизны [7]), ибо

$$D\tilde{\Psi}^i=[\tilde{\Psi}^k,\ \tilde{\omega}^i_k]+\frac{1}{2}\,\Re^i_{pq}[\omega^p,\ \omega^q], \tag{II.16}$$

где

$$\tilde{\omega}^i_k=\omega^i_k+'\Gamma^i_{p,\,k}\,\omega^p. \tag{II.17}$$

Из структуры дифференциальных уравнений (II.10$_2$) следует, что величины $'\Gamma^i_{j,\,k}$ образуют объект аффинной связности. Таким образом, линейная связность пространства $T_n(V_n)$ индуцирует усеченную аффинную связность*), определенную формами ω^i, $\tilde{\Theta}^i$ и $\tilde{\Psi}^i_j$, пространства $T_n\left(T_n(V_n)\right)$.

Структурные уравнения пространства линейных элементов с усеченной аффинной связностью имеют вид:

$$\begin{gathered} D\omega^i=[\omega^k,\ \omega^i_k]+R^i_{pq}[\omega^p,\ \omega^q],\\ D\tilde{\Psi}^i=[\tilde{\Psi}^k,\ \omega^i_k]+\frac{1}{2}\,\Re^i_{pq}[\omega^p,\ \omega^q],\\ D\tilde{\omega}^i_j=[\tilde{\omega}^k_j,\ \omega^i_k]+\frac{1}{2}\,\Re^i_{jpq}[\omega^p,\ \omega^q]+\mathfrak{S}^i_{jpq}[\tilde{\Psi}^p,\ \omega^q], \end{gathered} \tag{II.18}$$

*) Здесь пользуемся терминологией Б. Л. Лаптева (см. [15], стр. 94–95). В. В. Вагнер усеченную связность финслерова пространства называет связностью Бервальда [7], ибо такого рода связность рассматривал сам Бервальд [22], [23].

где

$$R^i_{pq} = {}'\Gamma^i_{[p,\,q]},$$
$$\mathfrak{R}^i_{jpq} = 2\,({}'\Gamma^i_{[pq],\,j} - {}'\Gamma^k_{[p,\,|j|}\,{}'\Gamma^i_{q],\,k} + {}''\Gamma^i_{k\,[p,\,|j|}\,\Gamma^k_{q]}), \qquad \text{(II.19)}$$
$$\mathfrak{S}^i_{jpq} = {}''\Gamma^i_{pq,\,j}.$$

Частичное продолжение дифференциальных уравнений (II.10) дает

$$\nabla\,{}'\Gamma^i_{pq,\,j} - {}'\Gamma^i_{s,\,j}\,\omega^s_{qp} - {}'\Gamma^i_{q,\,s}\,\omega^s_{jp} + {}'\Gamma^s_{q,\,j}\,\omega^i_{sp} - {}''\Gamma^i_{qs,\,j}\,\Psi^s_p - \omega^i_{jqp} =$$
$$= {}'\Gamma^i_{kpq,\,j}\,\omega^k + {}''\Gamma^i_{kpq,\,j}\Psi^k, \qquad \text{(II.20)}$$
$$\nabla\,{}''\Gamma^i_{pq,\,j} = {}''\Gamma^i_{pkq,\,j}\,\omega^k + {}'''\Gamma^i_{kpq,\,j}\,\Psi^k,$$

где

$${}'\Gamma^i_{qpk,\,j} = {}'\Gamma^i_{pqk,\,j}, \quad {}'''\Gamma^i_{qpk,\,j} = {}'''\Gamma^i_{pqk,\,j}.$$

Из дифференциальных уравнений (II.10$_2$) следует, что величины R^i_{pq} образуют тензор, который называется тензором кручения усеченной связности. Составим дифференциальные уравнения для величин

$${}'\Gamma^s_{p,\,j}\,{}'\Gamma^i_{q,\,s} \text{ и } {}''\Gamma^i_{sp,\,j}\,\Gamma^s_q.$$

Выполнив соответствующие вычисления, мы получим

$$\nabla\,({}'\Gamma^s_{p,\,j}\,{}'\Gamma^i_{q,\,s}) - {}'\Gamma^i_{q,\,s}\,\omega^s_{pj} - {}'\Gamma^s_{p,\,j}\,\omega^i_{qs} \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\,\omega^i,\ \Psi^i),$$
$$\nabla\,({}''\Gamma^i_{sp,\,j}\,\Gamma^s_q) - {}''\Gamma^i_{sp,\,j}\,\Psi^s_q \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\,\omega^i,\ \Psi^i). \qquad \text{(II.21)}$$

Так как оператор ∇ является линейным, то из (II.20$_1$) и (II.21) следует, что

$$\nabla\,({}'\Gamma^i_{pq,\,j} - {}'\Gamma^s_{p,\,j}\,{}'\Gamma^i_{q,\,s} + {}''\Gamma^i_{sp,\,j}\,\Gamma^s_q) - {}'\Gamma^i_{s,\,j}\,\omega^s_{qp} + {}'\Gamma^s_{q,\,j}\,\omega^i_{sp} +$$
$$+ {}'\Gamma^s_{p,\,j}\,\omega^i_{qs} - {}''\Gamma^i_{qs,\,j}\,\Psi^s_p - {}''\Gamma^i_{sp,\,j}\,\Psi^s_q - \omega^i_{jpq} \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\,\omega^i,\ \Psi^i) \qquad \text{(II.22)}$$

или

$$\nabla\,({}'\Gamma^i_{[pq],\,j} - {}'\Gamma^s_{[p,\,|j|}\,{}'\Gamma^i_{q],\,s} + {}''\Gamma^i_{s\,[p,\,|j|}\,\Gamma^s_{q]}) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\,\omega^i,\ \Psi^i). \qquad \text{(II.22')}$$

Таким образом, мы доказали, что величины $\mathfrak{R}^i_{jpq}$ образуют тензор, который называется первым картановым тензором кривизны усеченной связности. Тензор $\mathfrak{S}^i_{jpq}$ называется вторым картановым тензором кривизны рассматриваемой связности.

§ 3. Аффинная связность в пространстве линейных элементов

Произвольную аффинную связность в пространстве линейных элементов можно определить при помощи форм ω^i, Ψ^i и

$$\overset{*}{\omega}{}^i_j = \omega^i_j + \Gamma^i_{kj}\,\omega^k + C^i_{kj}\,\Psi^k. \qquad \text{(II.23)}$$

Эта связность является инвариантной относительно преобразования $\overline{\Psi}{}^i = \rho\,(\Psi^i + w^i\,d\ln\rho)$ тогда и только тогда, когда

$$\Gamma^i_{kj}(x,\ \overline{w}) = \Gamma^i_{kj}(x,\ w), \quad C^i_{kj}(x,\ w) = \rho^{-1}\,C^i_{kj}(x,\ w), \qquad \text{(II.24)}$$

где

$$C^i_{oj} = C^i_{pj}\,w^p.$$

Если

$$\overset{*}{\Psi}{}^i = dw^i + w^k\,\overset{*}{\omega}{}^i_k, \qquad \text{(II.25)}$$

то

$$\overset{*}{\Psi}{}^i = \Psi^i + \Gamma^i_{ko}\,\omega^k + C^i_{ko}\,\Psi^k \qquad \text{(II.26)}$$

или

$$\overset{*}{\Psi}{}^i = N^i_k\,\Psi^k + \Gamma^i_{ko}\,\omega^k, \qquad \text{(II.26}_1\text{)}$$

где
$$N^i_k = \delta^i_k + C^i_{ko}. \qquad (II.27)$$

Формы $\overset{*}{\omega}{}^i_j$ являются формами аффинной связности тогда и только тогда, когда в пространстве линейных элементов определено поле дифференциально-геометрического объекта следующей структуры:
$$\nabla \Gamma^i_{jk} - C^i_{pj}\Psi'^p_k - \omega^i_{jk} = \Gamma^i_{p,jk}\,\omega^p + {}'\Gamma^i_{p,jk}\Psi'^p,$$
$$\nabla C^i_{jk} = C^i_{p,jk}\,\omega^p + {}'C^i_{p,jk}\Psi'^p. \qquad (II.28)$$

Если $\det\|N^i_j\| \neq 0$, то аффинная связность (Γ, C) пространства $T_n\left(T_1(V_n)\right)$ индуцирует линейную связность в $T_n(V_n)$, определенную формами ω^i и $\overset{*}{\Psi}{}'^i$. Дифференциально-геометрический объект (N^i_j, Γ^i_{jo}) имеет следующую структуру:
$$\nabla N^i_j = N^i_{k,j}\,\omega^k + {}'N^i_{k,j}\Psi'^k, \qquad (II.29)$$
$$\nabla\Gamma^i_{jo} - N^i_p\Psi'^p_j = \Gamma^i_{k,jo}\,\omega^k + {}'\Gamma^i_{k,jo}\Psi'^k.$$

Очевидно, что при $N^i_j = \delta^i_j$ дифференциальные уравнения (II.29) имеют такую же структуру как и (II.8). Впервые аффинные связности (Γ, C) в пространстве линейных элементов рассматривал Э. Картан [24], который предполагал, что $N^i_j = \delta^i_j$. Только в работах венгерских геометров (А. Моор, О. Варга) рассматривались случаи, когда $N^i_j \neq \delta^i_j$ и $\det\|N^i_j\| \neq 0$. Обычно невырожденность тензора N^i_j используется при определении ковариантных производных тензорных полей, определенных на $T_n(V_n)$. Формы (II.23) можно представить в следующем виде:
$$\overset{*}{\omega}{}^i_j = \omega^i_j + \overset{*}{\Gamma}{}^i_{kj}\,\omega^k + \overset{*}{C}{}^i_{kj}\overset{*}{\Psi}{}'^k, \qquad (II.23_1)$$
где
$$\overset{*}{C}{}^i_{kj} = C^i_{pj}\bar{N}^p_k, \quad \overset{*}{\Gamma}{}^i_{kj} = \Gamma^i_{kj} - C^i_{pj}\bar{N}^p\,\Gamma^s_{ko} \qquad (II.30)$$
и
$$\bar{N}^i_j N^j_k = \delta^i_k. \qquad (II.31)$$
Оказывается, что
$$\nabla\overset{*}{C}{}^i_{kj} = \overset{*}{C}{}^i_{p,kj}\,\omega^p + {}'\overset{*}{C}{}^i_{p,kj}\Psi'^p,$$
$$\nabla\overset{*}{\Gamma}{}^i_{kj} - \omega^i_{kj} = \overset{*}{\Gamma}{}^i_{p,kj}\,\omega^p + {}'\overset{*}{\Gamma}{}^i_{p,kj}\Psi'^p. \qquad (II.32)$$

§ 4. Почти комплексные структуры в пространстве линейных элементов

Многообразие линейных элементов, на котором определено невырожденное тензорное поле*)
$$\nabla\varphi^I_J = \varphi^I_{JK}\,\omega^K + {}'\varphi^I_{JK}\Psi'^K, \qquad (II.33)$$
удовлетворяющее условию
$$\varphi^I_K\varphi^K_J = -\delta^I_J, \qquad (II.34)$$
будем называть пространством линейных элементов с почти комплексной структурой. Продолжая систему дифференциальных уравнений (II.33), мы получим
$$\nabla\varphi^I_{JK} - \varphi^I_L\,\omega^L_{JK} + \varphi^L_J\,\omega^I_{LK} - {}'\varphi^I_{JL}\Psi'^L_K = \varphi^I_{JKP}\,\omega^P + {}'\varphi^I_{JKP}\Psi'^P, \qquad (II.35)$$
$$\nabla\,{}'\varphi^I_{JK} = {}'\varphi^I_{JPK}\,\omega^P + {}''\varphi^I_{JKP}\Psi'^P, \qquad (II.36)$$

---
*) В этом параграфе $I, J, K = 1, 2, \ldots, 2n$.

$$\nabla\varphi^I_{JKQ}+\varphi^I_{JP}\,\omega^P_{KQ}+\varphi^I_{KP}\,\omega^P_{JQ}-\varphi^I_{PQ}\,\omega^P_{JK}-\varphi^P_{JQ}\,\omega^I_{PK}-\varphi^P_{JK}\,\omega^I_{PQ}-\varphi^P_J\,\omega^I_{PKQ}+$$

$$+\varphi^I_P\,\omega^P_{JKQ}-{}'\varphi^I_{JKP}\,\Psi^P_Q-{}'\varphi^I_{JQP}\,\Psi^P_K+{}'\varphi^I_{JP}\,\Psi^P_{KQ}=\varphi^I_{JKQR}\,\omega^R+{}'\varphi^I_{JKQR}\,\Psi^R, \quad (\text{II}.37)$$

$$\nabla\,{}'\varphi^I_{JKQ}+{}'\varphi^I_{PQ}\,\omega^P_{JK}+{}'\varphi^I_{JP}\,\omega^P_{KQ}-{}'\varphi^P_{JQ}\,\omega^I_{PK}={}'\varphi^I_{JKRQ}\,\omega^R+{}''\varphi^I_{JKQR}\,\Psi^R, \quad (\text{II}.38)$$

$$\nabla\,{}''\varphi^I_{JKQ}={}''\varphi^I_{JKRQ}\,\omega^R+{}'''\varphi^I_{JKQR}\,\Psi^R, \quad (\text{II}.39)$$

где

$$\varphi^I_{J[KP]}=0,\quad {}''\varphi^I_{J[KP]}=0,$$

$$\varphi^I_{J[KQR]}=0,\quad {}'''\varphi^I_{J[KQP]}=0.$$

Заметим, что

$$\varphi^I_J(x,\ \bar{w})=\varphi^I_J(x,\ w),\quad \varphi^I_{JO}=0.$$

Будем считать, что в пространстве линейных элементов с почти комплексной структурой задана линейная дифференциально-геометрическая связность*) Γ^I_J, компоненты которой определены уравнениями, структура которых такая же как и (II.8). Полученное пространство будем называть оснащенным пространством линейных элементов с почти комплексной структурой.

1. *Тензоры Нейенхейса.* Из (II.8) и (II.35) следует, что φ^I_J и величины

$$\nabla_K\varphi^I_J=\varphi^I_{JK}-{}'\varphi^I_{JL}\,\Gamma^L_K \quad (\text{II}.40)$$

образуют дифференциально-геометрический объект такой же структуры как φ^I_J и φ^I_{JK} на многообразии почти комплексной структуры (см. гл. I, § 5). Тензоры

$$N^H_{JI}=\varphi^A_I\,(\dot{\nabla}_J\varphi^H_A-\nabla_A\varphi^H_J)-\varphi^A_J\,(\nabla_I\varphi^H_A-\mathring{\nabla}_A\varphi^H_I), \quad (\text{II}.41)$$

$${}'N^H_{JI}=\varphi^A_I\,({}'\varphi^H_{AJ}-{}'\varphi^H_{JA})-\varphi^A_J\,({}'\varphi^H_{AI}-{}'\varphi^H_{IA}) \quad (\text{II}.42)$$

назовем тензорами Нейенхейса, соответственно, первого и второго рода оснащенного пространства линейных элементов с почти комплексной структурой.

2. *Операторы Татибана—Кото.* Если на многообразии линейных элементов дано тензорное поле $T^{I_1\ldots I_p}_{J_1\ldots J_q}$:

$$\nabla T^{I_1\ldots I_p}_{J_1\ldots J_q}=T^{I_1\ldots I_p}_{J_1\ldots J_qK}\,\omega^K+{}'T^{I_1\ldots I_p}_{J_1\ldots J_qK}\,\Psi^K, \quad (\text{II}.43)$$

то, выполнив вычисления, мы получим, что системы величин

$$L_K T^{I_1\ldots I_p}_{J_1\ldots J_q}=\varphi^A_K\nabla_A T^{I_1\ldots I_p}_{J_1\ldots J_q}-\sum_{a=1}^{q}\mathring{\nabla}_K\varphi^A_{J_a}\,T^{I_1\ldots I_p}_{J_1\ldots A\ldots J_q}-$$

$$-\sum_{a=1}^{q}\varphi^A_{J_a}\mathring{\nabla}_K T^{I_1\ldots I_p}_{J_1\ldots A\ldots J_q}+\sum_{a=1}^{q}\mathring{\nabla}_K\varphi^A_{J_a}\,T^{I_1\ldots I_p}_{J_1\ldots J_q}-$$

$$-\sum_{a=1}^{q}(\mathring{\nabla}_K\varphi^{I_a}_A-\check{\nabla}_A\varphi^{I_a}_K)\,T^{I_1\ldots A\ldots I_p}_{J_1\ldots J_q}, \quad (\text{II}.44)$$

---

*) Задача определения компонент дифференциально-геометрического объекта Γ^I_J, инвариантным образом связанного с дифференциально-геометрическим объектом $(\varphi^I_J,\ \varphi^I_{JK},\ {}'\varphi^I_{JK})$, не решена.

$$'L_K T^{I_1 \dots I_p}_{J_1 \dots J_q} = \varphi^A_K {}'T^{I_1 \dots I_p}_{J_1 \dots J_q A} - \sum_{a=1}^{q} {}'\varphi^A_{J_a K} T^{I_1 \dots I_p}_{J_1 \dots A \dots J_q} -$$

$$-\sum_{a=1}^{q} \varphi^A_{J_a} {}'T^{I_1 \dots I_p}_{J_1 \dots A \dots J_q K} + \sum_{a=1}^{q} {}'\varphi^A_{KJ_a} T^{I_1 \dots I_p}_{J_1 \dots A \dots J_q} -$$

$$-\sum_{a=1}^{p} ({}'\varphi^{I_a}_{AK} - {}'\varphi^{I_a}_{KA}) T^{I_1 \dots A \dots I_p}_{J_1 \dots J_q} \tag{II.45}$$

образуют тензоры. Операторы L_K и $'L_K$, определенные этими равенствами, будем называть операторами Татибана—Кото, соответственно, первого и второго рода рассматриваемого пространства (см. (I.47)).

3. *Неголономные производные Уокера.* Оказывается, что величины

$$W_{RS} T^{I_1 \dots I_p}_{J_1 \dots J_q} = \frac{1}{4} \left\{ N^A_{RS} \overset{\circ}{\nabla}_A T^{I_1 \dots I_p}_{J_1 \dots J_q} + \right.$$

$$\left. + \sum_{a=1}^{p} T^{I_1 \dots A \dots I_p}_{J_1 \dots J_q} h^{I_a}_{ARS} - \sum_{a=1}^{q} T^{I_1 \dots I_p}_{J_1 \dots A \dots J_q} h^A_{J_a RS} \right\} \tag{II.46}$$

и

$$'W_{RS} T^{I_1 \dots I_p}_{J_1 \dots J_q} = \frac{1}{4} \left\{ 'N^A_{RS} {}'T^{I_1 \dots I_p}_{J_1 \dots J_q A} + \right.$$

$$\left. + \sum_{a=1}^{p} T^{I_1 \dots A \dots I_p}_{J_1 \dots J_q} {}'h^{I_a}_{ARS} - \sum_{a=1}^{q} T^{I_1 \dots I_p}_{J_1 \dots A \dots J_q} {}'h^A_{J_a RS} \right\}, \tag{II.47}$$

где

$$h^I_{JRS} = -\frac{1}{2} \overset{\circ}{\nabla}_J N^I_{RS} + \frac{1}{2} \varphi^I_A (\varphi^B_J \overset{\circ}{\nabla}_B N^A_{RS} - N^B_{RS} \overset{\circ}{\nabla}_B \varphi^A_J +$$

$$+ N^A_{BS} \overset{\circ}{\nabla}_R \varphi^B_J - N^A_{BR} \overset{\circ}{\nabla}_S \varphi^B_J), \tag{II.48}$$

$$'h^I_{JRS} = -\frac{1}{2} {}'N^I_{RSJ} + \frac{1}{2} \varphi^I_A (\varphi^B_J {}'N^A_{RSB} - N^B_{RS} {}'\varphi^A_{JB} + N^A_{BS} {}'\varphi^B_{JR} - N^A_{BR} {}'\varphi^B_{JS}) \tag{II.49}$$

и

$$\nabla N^I_{JK} = N^I_{JKP} \omega^P + {}'N^I_{JKP} \Psi^P$$

образуют тензоры. Тензор $W_{RS} T^{I_1 \dots I_p}_{J_1 \dots J_q}$ будем называть неголономной производной Уокера первого рода, а $'W_{RS} T^{I_1 \dots I_p}_{J_1 \dots J_q}$ — неголономной производной Уокера второго рода рассматриваемого тензорного поля (см. (I.48)). Если f — произвольное скалярное поле, т. е.

$$\begin{gathered} df = f_A \omega^A + {}'f_A \Psi^A, \\ \nabla f_A - \Psi^B_A {}'f_B = f_{AB} \omega^B + {}'f_{AB} \Psi^B, \\ \nabla {}'f_A = {}'f_{BA} \omega^B + {}''f_{AB} \Psi^B, \end{gathered} \tag{II.50}$$

причем

$$f_{AB} = f_{BA}, \quad {}''f_{AB} = {}''f_{BA},$$

то

$$W_{RS} f = \frac{1}{4} N^H_{RS} \overset{\circ}{\nabla}_H f \tag{II.51}$$

и

$$'W_{RS} f = \frac{1}{4} {}'N^H_{RS} {}'f_H. \tag{II.52}$$

4. *Тензоры Уокера.* Альтернирование вторых неголономных производных Уокера первого рода для скалярного поля приводит к следующим тождествам:

$$\frac{1}{2}\left(W_{IK}W_{RS}f-W_{RS}W_{IK}f\right)=H^{T}_{IKRS}\overset{\circ}{\nabla}_{T}f+{}'H^{T}_{IKRS}{}'f_{T}, \tag{II.53}$$

где

$$H^{T}_{IKRS}=\frac{1}{4}\left\{W_{[IK}N^{T}_{RS]}-\frac{1}{4}N^{L}_{[RS}h^{T}_{|L|IK]}\right\} \tag{II.54}$$

и

$$'H^{T}_{IKRS}=\frac{1}{32}R^{T}_{AB}N^{A}_{IK}N^{B}_{RS}, \tag{II.55}$$

где R^{I}_{AB} – тензор кривизны связности Γ^{I}_{J}. Так как $\overset{\circ}{\nabla}_{T}f$, $'f_{T}$ и $W_{RS}f$ – тензоры, то из (II.53) следует, что H^{T}_{IKRS} и $'H^{T}_{IKRS}$ являются тензорами. Тензор H^{T}_{IKRS} назовем первым горизонтальным тензором Уокера оснащенного пространства линейных элементов с почти комплексной структурой, а $'H^{T}_{IKRS}$ – первым вертикальным тензором Уокера.

Вторую группу тождеств мы получим, рассматривая вторые неголономные производные Уокера второго рода. В этом случае мы имеем

$$\frac{1}{2}\left({}'W_{IK}{}'W_{RS}f-{}'W_{RS}{}'W_{IK}f\right)={}''H^{T}_{IKRS}{}'f_{T}, \tag{II.56}$$

где

$$''H^{T}_{IKRS}=\frac{1}{4}\left\{{}'W_{[IK}{}'N^{T}_{RS]}-\frac{1}{4}{}'N^{P}_{[RS}{}'h^{T}_{|P|IK]}\right\}. \tag{II.57}$$

Этот тензор будем называть вторым вертикальным тензором Уокера.

Третью группу тождеств для неголономных производных Уокера мы получим, рассматривая изменения порядка дифференцирования первого и второго рода:

$$'W_{IK}W_{RS}f-W_{RS}{}'W_{IK}f=K^{T}_{IKRS}\overset{\circ}{\nabla}_{T}f+{}'K^{T}_{IKRS}{}'f_{T}, \tag{II.58}$$

где

$$K^{T}_{IKRS}=\frac{1}{4}\left\{{}'W_{IK}N^{T}_{RS}-\frac{1}{4}N^{P}_{RS}{}'h^{T}_{PIK}\right\} \tag{II.59}$$

и

$$'K^{T}_{IKRS}=\frac{1}{4}\left\{W_{RS}{}'N^{T}_{IK}-\frac{1}{4}{}'N^{P}_{IK}h^{T}_{PRS}\right\}. \tag{II.60}$$

Тензор K^{T}_{IKRS} будем называть вторым горизонтальным тензором Уокера, а $'K^{T}_{IKRS}$ – третьим вертикальным тензором Уокера рассматриваемого пространства. Все эти тензоры являются аналогами второго тензора кручения многообразия с почти комплексной структурой.

§ 5. Пространство путей

Пространство линейных элементов, в котором задано поле дифференциально-геометрического объекта H^{i} следующей структуры:

$$\nabla H^{i}-\varphi^{i}_{o}=H^{i}_{k}\,\omega^{k}+{}'H^{i}_{k}\,\Psi^{k}, \tag{II.61}$$

где

$$\varphi^{i}_{o}=w^{k}w^{k}\omega^{i}_{kh},$$

называется пространством путей в смысле Бервальда—Дугласа (см. [26]). Предполагается, что

$$H^{i}(x,\ \rho w)=\rho^{2}H^{i}(x,\ w),\quad H^{i}_{k}(x,\ \rho w)=\rho^{2}H^{i}_{k}(x,\ w),$$

$$'H^{i}_{k}(x,\ \rho w)=\rho\,{}'H^{i}_{k}(x,\ w),\quad {}'H^{i}_{k}(x,\ w)\,w^{k}+2\rho H^{i}(x,\ w)=0,$$

т. е. что функции H^i являются однородными функциями 2-го измерения относительно величин w^i.

Так как

$$D\varphi^i_o = 2[\Psi^k, \Psi^i_k] + [\varphi^k_o, \omega^i_k] + [\omega^k, \varphi^i_k], \quad \varphi^i_k = w^p w^q \omega^i_{pqk},$$

то, продолжая систему (II.61), мы получим

$$\begin{gathered} \nabla H^i_k - H^p \omega^i_{pk} - 'H^i_p \Psi^p_k - \varphi^i_k = H^i_{pk}\omega^p + 'H^i_{pk}\Psi^p, \\ \nabla 'H^i_k - 2\Psi^i_k = 'H^i_{kp}\omega^p + ''H^i_{pk}\Psi^p, \\ \nabla'' H^i_{pk} - 2\omega^i_{pk} = ''H^i_{pqk}\omega^q + '''H^i_{qpk}\Psi^q, \end{gathered} \tag{II.62}$$

где

$$H^i_{pk} = H^i_{pk}, \quad ''H^i_{pk} = ''H^i_{kp}, \quad '''H^i_{pkl} = '''H^i_{plk} = '''H^i_{kpl}.$$

Отсюда следует, что величины

$$\check{\Gamma}^i_k = \frac{1}{2}\ 'H^i_k \tag{II.63}$$

образуют объект линейной дифференциально-геометрической связности, а величины

$$\check{\Gamma}^i_{pk} = \frac{1}{2}\ ''H^i_{pk} \tag{II.64}$$

— объект аффинной связности (без кручения). Таким образом, в геометрии путей, которую определяет объект H^i, можно ввести усеченную симметрическую аффинную связность $\check{\Gamma}^i_{pk}$. Конечные законы преобразования для компонент объектов H^i, $'H^i_k$ и $''H^i_{pk}$ приведены, например, в работе Б. Л. Лаптева [16] (см. также [30]).

Если пространство путей обладает почти комплексной структурой, то оно обладает и структурой оснащенного пространства линейных элементов с почти комплексной структурой (n-четное).

§ 6. Геометрия пространств K-протяжений

Понятие геометрии K-протяжений (K — spreads) введено Дугласом в 1931 г. и является обобщением геометрии путей [27]. Точка (x^i) и система K-контравариантных векторов p^i_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, K,\ 1 \leqslant K \leqslant n-1)$, называется K-мерным плоским элементом. На локальные координаты K-мерных плоских элементов можно смотреть как на первые интегралы вполне интегрируемой системы

$$\omega^i = 0, \quad \Psi^i_\alpha = dp^i_\alpha + p^k_\alpha \omega^i_k, \tag{II.65}$$

причем

$$D\Psi^i_\alpha = [\Psi^k_\alpha, \omega^i_k] + [\omega^k, \Psi^i_{k\alpha}], \tag{II.66}$$

где

$$\Psi^i_{j\alpha} = p^k_\alpha \omega^i_k .$$

Пространство K-мерных плоских элементов, центры которых образуют дифференцируемое многообразие и в котором задано поле дифференциально-геометрического объекта $H^i_{\alpha\beta}$ следующей структуры $(H^i_{\alpha\beta} = H^i_{\beta\alpha})$:

$$dH^i_{\alpha\beta} + H^k_{\alpha\beta}\omega^i_k - \Psi^i_{\alpha\beta} = H^i_{k\alpha\beta}\omega^k + 'H^{i\gamma}_{k\alpha\beta}\Psi^k_\gamma, \tag{II.67}$$

где

$$\Psi^i_{\alpha\beta} = p^k_\beta \Psi^i_{k\alpha},$$

называется пространством K-протяжений (при $K = 1$ получается пространство путей) (см. [27], [28]).

Предполагается, что система дифференциальных уравнений (II.67) инвариантна относительно невырожденных линейных преобразований:

$$\bar{p}^i_\alpha = a^\beta_\alpha p^i_\beta, \quad \overset{*}{a}{}^\gamma_\alpha a^\beta_\gamma = \delta^\beta_\alpha, \quad \overset{*}{a}{}^\alpha_\gamma a^\gamma_\beta = \delta^\alpha_\beta.$$

Инвариантность системы (II.67) относительно этих преобразований выполняется тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} H^i_{\alpha\beta}(x, \bar{p}) &= a^\sigma_\alpha a^\tau_\beta H^i_{\sigma\tau}(x, p), \\ H^i_{k\alpha\beta}(x, \bar{p}) &= a^\sigma_\alpha a^\tau_\beta H^i_{k\sigma\tau}(x, p), \end{aligned} \tag{II.68}$$

$${}'H^{i\gamma\cdot}_{k\alpha\beta}(x, \bar{p}) = \overset{*}{a}{}^\gamma_\sigma a^\rho_\alpha a^\tau_\beta \, {}'H^{i\sigma}_{k\rho\tau}(x, p),$$

$${}'H^{i\alpha\cdot}_{k\beta\gamma} p^k_\sigma = 2H^i_{\sigma\tau} \overset{*}{a}{}^\tau_{(\beta} \overset{*}{a}{}^\alpha_{\gamma)}.$$

Частично продолжая систему (II.67), мы получим

$$d\,{}'H^{i\gamma\cdot}_{k\alpha\beta} + {}'H^{s\gamma\cdot}_{k\alpha\beta}\omega^i_s - {}'H^{i\gamma\cdot}_{s\alpha\beta}\omega^s_k - 2\delta^\gamma_{(\alpha}\Psi^i_{\beta)\,k} = {}'H^{i\gamma}_{ks\alpha\beta}\omega^s + {}''H^{i\gamma\cdot\sigma}_{k\alpha\beta s}\Psi^s_\sigma, \tag{II.69}$$

$$\begin{aligned} d\,''H^{i\gamma\cdot\sigma}_{k\alpha\beta s} + {}''H^{p\gamma\cdot\sigma}_{k\alpha\beta s}\omega^i_p - {}''H^{i\gamma\cdot\sigma}_{p\alpha\beta s}\omega^p_k - {}''H^{i\gamma\cdot\sigma}_{k\alpha\beta p}\omega^p_s - \\ - 2\delta^\gamma_{(\alpha}\delta^\sigma_{\beta)}\omega^i_{ks} = {}''H^{i\gamma\cdot\sigma\cdot}_{kr\alpha\beta s}\omega^r + {}'''H^{i\gamma\cdot\sigma\tau}_{k\alpha\beta sp}\Psi^p_\tau. \end{aligned} \tag{II.70}$$

После свертывания греческих индексов система (II.70) принимает вид

$$\begin{aligned} d\,''H^{i\alpha\cdot\beta}_{k\alpha\beta s} + {}''H^{p\alpha\cdot\beta}_{k\alpha\beta s}\omega^i_p - {}''H^{i\alpha\cdot\beta}_{p\alpha\beta s}\omega^p_k - {}''H^{i\alpha\cdot\beta}_{k\alpha\beta p}\omega^p_s - \\ - K(K+1)\,\omega^i_{ks} = {}''H^{i\alpha\cdot\beta}_{kr\alpha\beta s}\omega^r + {}'''H^{i\alpha\cdot\beta\tau}_{k\alpha\beta sr}\Psi^r_\tau. \end{aligned} \tag{II.70$_1$}$$

Отсюда следует, что система величин

$$\hat{\Gamma}^i_{ks} = \frac{1}{K(K+1)}\;{}''H^{i\alpha\cdot\beta}_{k\alpha\beta s} \tag{II.71}$$

образует объект аффинной связности (без кручения).

§ 7. Линейные связности в пространстве тензорных опорных элементов

1. *Объект линейной дифференциально-геометрической связности.* Б. Л. Лаптев ввел аффинную связность в пространство тензорных опорных элементов при помощи ковариантного дифференциала [13], [15], но общие линейные связности в этом пространстве он не рассматривал. Базис касательного векторного пространства $T_{n+N}(N \leqslant n^{p+q})$, соответствующего тензорному опорному элементу (x, w), состоит из операторов

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad X^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p} = \frac{\partial}{\partial w^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}}.$$

Так как при допустимых преобразованиях локальных координат тензорного опорного элемента базисные операторы преобразуются следующим образом:

$$X^{j'_1 \ldots j'_q}_{i'_1 \ldots i'_p} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i'_p}} \frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{j'_q}}{\partial x^{j_q}} X^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p} \tag{II.72}$$

и

$$\begin{aligned} X_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} X_i + \Bigg\{ \sum_{a=1}^{p} \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \cdots \frac{\partial^2 x^{i_a}}{\partial x^{i'_a}\partial x^{i'}} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i'_p}} \frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{j'_q}}{\partial x^{j_q}} \right) + \\ + \sum_{a=1}^{q} \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i'_p}} \frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial^2 x^{j'_a}}{\partial x^{j_a}\partial x^{j}} \right) \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \Bigg\} w^{i'_1 \ldots i'_p}_{j'_1 \ldots j'_q} X^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p}, \end{aligned} \tag{II.73}$$

то система операторов $X^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p}$ порождает инвариантное подпространство, т. е. касательное пространство T_N слоя, которое называется вертикальным подпространством касательного пространства T_{n+N}. Подпространство H_n, изоморфное касательному пространству T_n базы и обладающее тем свойством, что

$$T_{n+N} = H_n \dot{+} T_N,$$

называется горизонтальным подпространством (или оснащающим подпространством) пространства T_{n+N}, если оно не меняется при преобразованиях пространства T_{n+N}. Оказывается, что инвариантное оснащение слоев пространства тензорных опорных элементов определено тогда и только тогда, когда задано поле дифференциально-геометрического объекта следующей структуры:

$$\Gamma^{i'_1 \ldots i'_p}_{k' j'_1 \ldots j'_q} = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \ldots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \Gamma^{i_1 \ldots i_p}_{k j_1 \ldots j_q} - \left\{ \sum_{a=1}^{p} \left(\frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \ldots \right.\right.$$

$$\left. \ldots \frac{\partial^2 x^{i'_a}}{\partial x^{i_a} \partial x^k} \ldots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \ldots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}} \right) \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} -$$

$$\left. - \sum_{a=1}^{q} \left(\frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \ldots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \ldots \frac{\partial^2 x^{j_a}}{\partial x^{j'_a} \partial x^{k'}} \ldots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}} \right) \right\} w^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}. \qquad (II.74)$$

Этот объект называется объектом линейной дифференциально-геометрической связности пространства тензорных опорных элементов. В этом случае базис горизонтального пространства H_n состоит из операторов

$$Y_k = X_k - \Gamma^{i_1 \ldots i_p}_{k j_1 \ldots j_q} X^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p}, \qquad (II.75)$$

причем

$$Y_{k'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} Y_k.$$

Дуальное векторное пространство T^*_{n+N} пространства T_{n+N} имеет инвариантное подпространство с натуральным корепером $\{dx^i\}$. Если пространство T_{n+N} оснащено при помощи H_n, то это оснащение индуцирует оснащение пространства T^*_{n+N} при помощи подпространства V^*_N, натуральный корепер которого имеет вид

$$\vartheta^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = dw^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} + \Gamma^{i_1 \ldots i_p}_{k j_1 \ldots j_q} dx^k. \qquad (II.76)$$

Если пространство T^*_{n+N} отнесено к произвольному кореперу $(\omega^i, \Psi'^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q})$, то подпространство V^*_N определяется формами*)

$$\tilde{\Psi}'^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = \Psi'^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} + \Gamma^{i_1 \ldots i_p}_{k j_1 \ldots j_q} \omega^k. \qquad (II.77)$$

Мы имеем конечный закон преобразования компонент дифференциально-геометрического объекта $\Gamma^{(i)}_{k(j)}$. Для того, чтобы воспользоваться методом Г. Ф. Лаптева [17], необходимо конечные законы преобразования компонент дифференциально-геометрических объектов заменить соответствующими системами дифференциальных уравнений. Если пфаффовые формы ω^k, $\Psi'^{(i)}_{(j)}$

---

*) Иногда будем пользоваться сокращенной записью:

$$\tilde{\Psi}'^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = \tilde{\Psi}'^{(i)}_{(j)}.$$

образуют вполне интегрируемую систему форм, то формы $\tilde{\Psi}^{(i)}_{(j)}$, определенные равенствами (II.77), и формы ω^i также образуют вполне интегрируемую систему форм. Так как

$$D\tilde{\Psi}^{(i)}_{(j)}=\sum_{a=1}^{p}\,[\tilde{\Psi}^{i_1\,\ldots\,k\,\ldots\,i_p}_{j_1\,\ldots\,j_q},\ \omega^{i_a}_{k}]-$$

$$-\sum_{a=1}^{q}\,[\tilde{\Psi}^{i_1\,\ldots\,i_p}_{j_1\,\ldots\,k\,\ldots\,j_q},\ \omega^{k}_{j_a}]+[\nabla\Gamma^{(i)}_{k(j)}-\Psi^{(i)}_{(j)k},\ \omega^k], \tag{II.78}$$

то дифференциальные уравнения поля дифференциально-геометрического объекта $\Gamma^{(i)}_{k(j)}$ имеют вид

$$\nabla\Gamma^{(i)}_{k(j)}-\Psi^{(i)}_{(j)k}=\Gamma^{(i)}_{sk(j)}\,\omega^s+{}'\Gamma^{(s)(i)}_{k(j)(t)}\,\Psi^{(t)}_{(s)}. \tag{II.79}$$

Первые интегралы системы $\omega^i=0$, $\Psi^{(i)}_{(j)}=0$ и $\nabla\Gamma^{(i)}_{k(j)}-\Psi^{(i)}_{(j)k}=0$ определяют пространство тензорных опорных элементов с пучком оснащающих пространств V^*_N; система дифференциалных уравнений (II.79) и определяет секущую поверхность этого пучка (локальное сечение пучка), т. е. пространство тензорных опорных элементов с вертикальным распределением $\{V^*_N\}$ или пространство тензорных опорных элементов с дифференциально-геометрической связностью. Дифференциальные уравнения (II.75) можно представить в виде

$$\nabla\Gamma^{(i)}_{k(j)}-\Psi^{(i)}_{(j)k}=G^{(i)}_{(j)rk}\,\omega^r+{}'\Gamma^{(s)(i)}_{k(j)(t)}\,\tilde{\Psi}^{(t)}_{(s)}, \tag{II.80}$$

где

$$G^{(i)}_{(j)rk}=\Gamma^{(i)}_{rk(j)}-{}'\Gamma^{(s)(i)}_{k(j)(t)}\,\Gamma^{(t)}_{r(s)}. \tag{II.81}$$

Если ввести новые пфаффовые формы

$$\tilde{\omega}^{s_1\,\ldots\,s_q\,i_1\,\ldots\,i_p}_{j_1\,\ldots\,j_q\,t_1\,\ldots\,t_p}=\sum_{a=1}^{p}\,\delta^{i_1}_{t_1}\ \ldots\ \delta^{k}_{t_a}\ \ldots\ \delta^{i_p}_{t_p}\,\delta^{s_1}_{j_1}\ \ldots\ \delta^{s_q}_{j_q}\,\omega^{i_a}_{k}-$$

$$-\sum_{a=1}^{q}\,\delta^{s_1}_{j_1}\ \ldots\ \delta^{s_a}_{k}\ \ldots\ \delta^{s_q}_{j_q}\,\delta^{i_1}_{t_1}\ \ldots\ \delta^{i_p}_{t_p}\,\omega^{k}_{j_a}+{}''\Gamma^{s_1\,\ldots\,s_q\,i_1\,\ldots\,i_p}_{kj_1\,\ldots\,j_q\,t_1\,\ldots\,t_p}\,\omega^k, \tag{II.82}$$

то

$$D\tilde{\Psi}^{(i)}_{(j)}=[\tilde{\Psi}^{(t)}_{(s)},\ \tilde{\omega}^{(s)(i)}_{(j)(t)}]+\frac{1}{2}\ \mathfrak{R}^{(i)}_{(j)kr}\,[\omega^k,\ \omega^r], \tag{II.83}$$

где

$$\mathfrak{R}^{(i)}_{(j)kr}=2G^{(i)}_{(j)[kr]}. \tag{II.84}$$

Эти величины образуют тензор, который по терминологии В. В. Вагнера называется тензором кривизны линейной дифференциально-геометрической связности $\Gamma^{(i)}_{k(j)}$.

2. *Усеченные линейные тензорные связности*. Частичное продолжение системы (II.68) дает

$$\nabla\,{}'\Gamma^{(s)(i)}_{k(j)(t)}-\omega^{(s)(i)}_{(j)(t)k}={}'\Gamma^{(s)(i)}_{kr(j)(t)}\,\omega^r+{}''\Gamma^{(s)(i)(u)}_{k(j)(t)(v)}\,\Psi^{(v)}_{(u)}. \tag{II.85}$$

Отсюда следует, что дифференциально-геометрический объект ${}'\Gamma^{(s)(i)}_{k(j)(t)}$ имеет такую же структуру, как и $\Gamma^{(s)(i)}_{k(j)(t)}$ $\Big($см. (I.25)$\Big)$, т. е. линейная дифференциально-геометрическая связность пространства тензорных опорных элементов индуцирует линейную тензорную связность того же пространства (валентность этой связности такая же, как и валентность опорного тензора).

Дифференциально-геометрический объект $'\Gamma^{(s)(i)}_{k(j)(t)}$ будем называть объектом линейной усеченной тензорной связности. Согласно результатам, изложенным в § 4 гл. I, к этой тензорной связности можно присоединить различные аффинные связности (тоже усеченные). Таким образом, если в пространстве тензорных опорных элементов $(p+q>1)$ задана линейная дифференциально-геометрическая связность $\Gamma^{(i)}_{k(j)}$, то из компонент дифференциально-геометрического объекта $'\Gamma^{(s)(i)}_{k(j)(t)}$, который является подобъектом объекта $\{\Gamma^{(i)}_{k(j)}, \Gamma^{(i)}_{rk(j)}, {}'\Gamma^{(s)(i)}_{k(j)(t)}\}$, всегда можно построить усеченные объекты аффинной связности (единственный объект получается только при $p+q=1$).

3. *Линейная тензорная связность.* Произвольную линейную тензорную связность в пространстве тензорных опорных элементов можно ввести при помощи форм ω^i, $\Psi^{(i)}_{(j)}$ и

$$\varphi^{(s)(i)}_{(j)(t)} = \omega^{(s)(i)}_{(j)(t)} + \check{\Gamma}^{(s)(i)}_{k(j)(t)}\,\omega^k + C^{(s)(i)(u)}_{(j)(t)(v)}\Psi^{(v)}_{(u)}, \tag{II.86}$$

где

$$\check{\Gamma}^{(s)(i)}_{k(j)(t)}(x,\ \rho w) = \check{\Gamma}^{(s)(i)}_{k(j)(t)}(x,\ w),$$

$$C^{(s)(i)(u)}_{(j)(t)(v)}(x,\ \rho w) = \rho^{-1}C^{(s)(i)(u)}_{(j)(t)(v)}(x,\ w),$$

$$C^{(s)(i)(u)}_{(j)(t)(v)}\,w^{(v)}_{(u)} = 0.$$

Так как

$$D\omega^{(s)(i)}_{(j)(t)} = [\omega^{(s)(h)}_{(k)(t)},\ \omega^{(k)(i)}_{(j)(h)}] + [\omega^l,\ \omega^{(s)(i)}_{(j)(t)l}],$$

где

$$\omega^{(s)(i)}_{(j)(t)l} = \sum_{a=1}^{q} \delta^{s_1}_{j_1}\ \ldots\ \delta^{s_a}_{k}\ \ldots\ \delta^{s_q}_{j_q}\delta^{i_1}_{t_1}\ \ldots\ \delta^{i_p}_{t_p}\,\omega^k_{j_a l} -$$

$$-\sum_{a=1}^{p} \delta^{s_1}_{j_1}\ \ldots\ \delta^{s_q}_{j_q}\delta^{i_1}_{t_1}\ \ldots\ \delta^{k}_{t_a}\ \ldots\ \delta^{i_p}_{t_p}\,\omega^{i_a}_{kl},$$

то дифференцируя внешним образом соотношения (II.86), мы получим

$$\begin{aligned} D\varphi^{(s)(i)}_{(j)(t)} - [\varphi^{(s)(k)}_{(l)(t)},\ \varphi^{(l)(i)}_{(j)(k)}] &= [\nabla\check{\Gamma}^{(s)(i)}_{k(j)(t)} - C^{(s)(i)(u)}_{(j)(t)(v)}\Psi^{(v)}_{(u)k} - \omega^{(s)(i)}_{(j)(t)k},\ \omega^k] + \\ &+ [\nabla C^{(s)(i)(u)}_{(j)(t)(v)},\ \Psi^{(u)}_{(v)}] - \Gamma^{(s)}_{[p\,|(h)(t)|}{}^{(k)}\Gamma^{(h)}_{q](j)(k)}[\omega^p,\ \omega^q] + \\ &+ (\Gamma^{(h)(t)}_{p(j)(k)}C^{(s)(k)(u)}_{(h)(t)(v)} - \Gamma^{(s)(k)}_{p(h)(t)}C^{(h)(i)(u)}_{(j)(k)(v)})[\omega^p,\ \Psi^{(v)}_{(u)}] - \\ &- C^{(s)(k)[(u_1)}_{(h)(t)[(v_1)}C\Big|^{(h)(i)|(u_2)]}_{(j)(k)|(v_2)]}[\Psi^{(v_1)}_{(u_1)},\ \Psi^{(v_2)}_{(u_2)}]. \end{aligned} \tag{II.87}$$

Отсюда следует, что формы $\varphi^{(s)(i)}_{(j)(t)}$ определяют в пространстве тензорных опорных элементов линейную тензорную связность тогда и только тогда, когда задан дифференциально-геометрический объект следующей структуры:

$$\begin{aligned} d\check{\Gamma}^{(s)(i)}_{l(j)(t)} - \check{\Gamma}^{(s)(i)}_{h(j)(t)}\omega^h_l + \check{\Gamma}^{(s)(k)}_{l(h)(t)}\omega^{(h)(i)}_{(j)(k)} - \check{\Gamma}^{(h)(i)}_{l(j)(k)}\omega^{(s)(k)}_{(h)(t)} - C^{(s)(i)(u)}_{(j)(t)(v)}\Psi^{(v)}_{(u)l} - \omega^{(s)(i)}_{(j)(t)l} &= \\ = \check{\Gamma}^{(s)(i)}_{hl(j)(t)}\omega^h + \check{\Gamma}^{(s)(i)(u)}_{l(j)(t)(v)}\Psi^{(v)}_{(u)}&, \end{aligned} \tag{II.88}$$

$$\begin{aligned} dC^{(s)(i)(u)}_{(j)(t)(v)} - C^{(h)(i)(u)}_{(j)(k)(v)}\omega^{(s)(k)}_{(h)(t)} - C^{(s)(i)(h)}_{(j)(t)(k)}\omega^{(u)(k)}_{(h)(t)} &+ \\ + C^{(s)(k)(u)}_{(h)(t)(v)}\omega^{(h)(i)}_{(j)(k)} = C^{(s)(i)(u)}_{h(j)(t)(v)}\omega^h + {}'C^{(s)(i)(u)(k)}_{(j)(t)(v)(h)}\Psi^{(h)}_{(k)}&. \end{aligned} \tag{II.89}$$

Так как (II.3) можно записать в виде

$$\Psi^{(i)}_{(j)} = dw^{(i)}_{(j)} + w^{(k)}_{(h)}\omega^{(h)(i)}_{(j)(k)},$$

то в силу (II.86), мы можем получить следующие соотношения

$$\check{\Psi}^{(i)}_{(j)} = \mathfrak{N}^{(i)(u)}_{(j)(v)}\Psi^{(v)}_{(u)} + \check{G}^{(i)}_{l(j)}\omega^l, \tag{II.90}$$

где

$$\mathfrak{N}^{(i)}_{(j)}{}^{(u)}_{(v)} = \delta^{(i)}_{(v)}\delta^{(u)}_{(j)} + w^{(k)}_{(h)} C^{(h)}_{(j)}{}^{(i)}_{(k)}{}^{(u)}_{(v)}, \tag{II.91}$$

$$\breve{G}^{(i)}_{l\,(j)} = w^{(k)}_{(h)} \breve{\Gamma}^{(h)}_{l\,(j)}{}^{(i)}_{(k)} \tag{II.92}$$

и

$$\delta^{(i)}_{(v)}\delta^{(u)}_{(j)} = \delta^{i_1}_{v_1} \ \ldots \ \delta^{i_p}_{v_p}\delta^{u_1}_{j_1} \ \ldots \ \delta^{u_q}_{j_q}.$$

Если матрица

$$\mathfrak{N} = \| \mathfrak{N}^{(i)}_{(j)}{}^{(u)}_{(v)} \|, \tag{II.93}$$

элементы которой образуют тензор, не вырождена, то элементы матрицы $\mathfrak{N}^{-1}$ определяются соотношениями

$$\mathfrak{N}^{(i)}_{(j)}{}^{(u)}_{(v)} \overset{*}{\mathfrak{N}}{}^{(v)}_{(u)}{}^{(k)}_{(h)} = \delta^{(i)}_{(h)}\delta^{(k)}_{(j)}, \tag{II.94}$$

$$\mathfrak{N}^{(u)}_{(v)}{}^{(i)}_{(j)} \overset{*}{\mathfrak{N}}{}^{(k)}_{(h)}{}^{(v)}_{(u)} = \delta^{(k)}_{(j)}\delta^{(i)}_{(h)}.$$

Таким образом, линейная тензорная связность, валентность которой совпадает с валентностью опорного тензора, порождает линейную диференциально-геометрическую связность $\{ \mathfrak{N}^{(i)}_{(j)}{}^{(u)}_{(v)}, \breve{G}^{(i)}_{k\,(j)} \}$, причем дифференциальные уравнения этого объекта имеют вид:

$$d\breve{G}^{(i)}_{l\,(j)} - \breve{G}^{(i)}_{k\,(j)}\omega^k_l + \breve{G}^{(k)}_{l\,(h)}\omega^{(h)}_{(j)}{}^{(i)}_{(k)} - \mathfrak{N}^{(i)}_{(j)}{}^{(u)}_{(v)}\Psi^{(v)}_{(u)\,l} = \breve{G}^{(i)}_{kl\,(j)}\omega^k + \breve{G}^{(i)}_{l\,(j)}{}^{(u)}_{(v)}\Psi^{(v)}_{(u)}, \tag{II.95}$$

$$d\mathfrak{N}^{(i)}_{(j)}{}^{(u)}_{(v)} - \mathfrak{N}^{(i)}_{(j)}{}^{(h)}_{(k)}\omega^{(u)}_{(h)}{}^{(k)}_{(v)} + \mathfrak{N}^{(k)}_{(h)}{}^{(u)}_{(v)}\omega^{(h)}_{(j)}{}^{(i)}_{(k)} = \mathfrak{N}^{(i)}_{k\,(j)}{}^{(u)}_{(v)}\omega^k + \mathfrak{N}^{(i)}_{(j)}{}^{(u)}_{(v)}{}^{(h)}_{(k)}\Psi^{(k)}_{(h)}, \tag{II.96}$$

где

$$\breve{G}^{(i)}_{kl\,(j)} = w^{(t)}_{(h)}\breve{\Gamma}^{(h)}_{kl\,(j)}{}^{(i)}_{(t)},$$

$$\breve{G}^{(i)}_{l\,(j)}{}^{(u)}_{(v)} = \breve{\Gamma}^{(u)}_{l\,(j)}{}^{(i)}_{(v)} + w^{(k)}_{(h)}\breve{\Gamma}^{(h)}_{l\,(j)}{}^{(i)}_{(k)}{}^{(u)}_{(v)},$$

$$\mathfrak{N}^{(i)}_{k\,(j)}{}^{(u)}_{(v)} = w^{(t)}_{(h)} C^{(h)}_{(j)}{}^{(i)}_{(t)}{}^{(u)}_{(v)},$$

$$\mathfrak{N}^{(i)}_{(j)}{}^{(u)}_{(v)}{}^{(h)}_{(k)} = C^{(h)}_{(j)}{}^{(i)}_{(k)}{}^{(u)}_{(v)} + w^{(t)}_{(l)} C^{(l)}_{(j)}{}^{(i)}_{(t)}{}^{(u)}_{(v)}{}^{(h)}_{(k)}.$$

Если

$$\mathfrak{N}^{(i)}_{(j)}{}^{(u)}_{(v)} = \delta^{(i)}_{(v)}\delta^{(u)}_{(j)}, \tag{II.97}$$

то величины $\breve{G}^{(i)}_{k\,(j)}$ образуют самостоятельный дифференциально-геометрический объект такой же структуры, как и $\Gamma^{(i)}_{k\,(j)}$, определенный уравнениями (II.79). Равенства (II.97) имеют место тогда и только тогда, когда

$$w^{(k)}_{(h)} C^{(h)}_{(j)}{}^{(i)}_{(k)}{}^{(u)}_{(v)} = 0. \tag{II.98}$$

4. *Картановые тензоры кривизны линейной тензорной связности.* Так как

$$\Psi^{(v)}_{(u)} = \overset{*}{\mathfrak{N}}{}^{(v)}_{(u)}{}^{(k)}_{(h)}\breve{\Psi}^{(h)}_{(k)} - \overset{*}{\mathfrak{N}}{}^{(v)}_{(u)}{}^{(k)}_{(h)}\breve{G}^{(h)}_{l\,(k)}\omega^l, \tag{II.99}$$

то (II.79) принимает вид

$$\varphi^{(s)}_{(j)}{}^{(i)}_{(t)} = \omega^{(s)}_{(j)}{}^{(i)}_{(t)} + \overset{*}{G}{}^{(s)}_{k\,(j)}{}^{(i)}_{(t)}\omega^k + \overset{*}{C}{}^{(s)}_{(j)}{}^{(i)}_{(t)}{}^{(u)}_{(v)}\breve{\Psi}^{(v)}_{(u)}, \tag{II.100}$$

где

$$\overset{*}{G}{}^{(s)}_{k\,(j)}{}^{(i)}_{(t)} = \breve{\Gamma}^{(s)}_{k\,(j)}{}^{(i)}_{(t)} - C^{(s)}_{(j)}{}^{(i)}_{(t)}{}^{(u)}_{(v)}\overset{*}{\mathfrak{N}}{}^{(v)}_{(u)}{}^{(l)}_{(h)}\breve{G}^{(h)}_{k\,(l)}, \tag{II.101}$$

$$\overset{*}{C}{}^{(s)}_{(j)}{}^{(i)}_{(t)}{}^{(u)}_{(v)} = C^{(s)}_{(j)}{}^{(i)}_{(t)}{}^{(k)}_{(h)}\overset{*}{\mathfrak{N}}{}^{(h)}_{(k)}{}^{(u)}_{(v)}.$$

Дифференциально-геометрический объект $\{ \overset{*}{G}{}^{(s)}_{k\,(j)}{}^{(i)}_{(t)}, \overset{*}{C}{}^{(s)}_{(j)}{}^{(i)}_{(t)}{}^{(u)}_{(v)} \}$ состоит из объекта линейной тензорной связности $\overset{*}{G}{}^{(s)}_{k\,(j)}{}^{(i)}_{(t)}$:

$$d\overset{*}{G}{}^{(s)}_{k\,(j)}{}^{(i)}_{(t)} - \overset{*}{G}{}^{(s)}_{h\,(j)}{}^{(i)}_{(t)}\omega^h_k + \overset{*}{G}{}^{(s)}_{k\,(l)}{}^{(u)}_{(t)}\omega^{(l)}_{(j)}{}^{(i)}_{(u)} -$$
$$- \overset{*}{G}{}^{(h)}_{k\,(j)}{}^{(i)}_{(l)}\omega^{(s)}_{(h)}{}^{(l)}_{(t)} - \omega^{(s)}_{(j)}{}^{(i)}_{(t)\,k} = \overset{*}{G}{}^{(s)}_{lk\,(j)}{}^{(i)}_{(t)}\omega^l + \overset{*}{G}{}^{(s)}_{k\,(j)}{}^{(i)}_{(t)}{}^{(u)}_{(v)}\Psi^{(v)}_{(u)} \tag{II.102}$$

и тензора $\overset{\bullet}{C}{}^{(s)(i)(u)}_{(j)(t)(v)}$. В дальнейшем мы будем считать, что имеет место (II.97). Тогда

$$\overset{\bullet}{G}{}^{(s)(i)}_{k(j)(t)}=\check{\Gamma}^{(s)(i)}_{k(j)(t)}-C^{(s)(i)(l)}_{(j)(t)(h)}\check{G}^{(h)}_{k(l)}, \qquad (\mathrm{II}.101_1)$$

$$\overset{\bullet}{C}{}^{(s)(i)(u)}_{(j)(t)(v)}=C^{(s)(i)(u)}_{(j)(t)(v)}.$$

Структурные уравнения (II.87) можно переписать следующим образом:

$$D\varphi^{(s)(i)}_{(j)(t)}-[\varphi^{(s)(k)}_{(l)(t)},\ \varphi^{(l)(i)}_{(j)(k)}]=\frac{1}{2}\ \mathfrak{R}^{(s)(i)}_{(j)(t)pq}[\omega^p,\ \omega^q]+\mathfrak{S}^{(s)(i)\cdot(u)}_{(j)(t)p(v)}[\omega^p\ \check{\Psi}^{(v)}_{(u)}]+$$

$$+\frac{1}{2}\ \mathfrak{P}^{(s)(i)(u)(k)}_{(j)(t)(v)(h)}[\check{\Psi}^{(v)}_{(u)},\ \check{\Psi}^{(h)}_{(k)}], \qquad (\mathrm{II}.103)$$

где

$$\mathfrak{R}^{(s)(i)}_{(j)(t)pq}=2(\check{\nabla}_{[p}\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{(s)(i)}_{q](j)(t)}-\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{(s)(k)}_{[p|(h)(t)|}\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{(h)(i)}_{q](j)(k)})+C^{(s)(i)(u)}_{(j)(t)(v)}\check{\mathfrak{R}}^{(v)}_{(u)pq}, \qquad (\mathrm{II}.104)$$

$$\mathfrak{S}^{(s)(i)\cdot(u)}_{(j)(t)p(v)}=\check{\nabla}_p C^{(s)(i)(u)}_{(j)(t)(v)}-\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{(s)(k)}_{p(h)(t)}C^{(h)(i)(u)}_{(j)(k)(v)}+$$

$$+C^{(s)(k)(u)}_{(h)(t)(v)}\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{(h)(i)}_{p(j)(k)}-{}'\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{(s)(i)(u)}_{p(j)(t)(v)}, \qquad (\mathrm{II}.105)$$

$$\mathfrak{P}^{(s)(i)(u)(k)}_{(j)(t)(v)(h)}=2({}'C^{(s)(i)[(u)(k)]}_{(j)(t)[(v)(h)]}-C^{(s)(l)[(u)}_{(r)(t)[(v)}C^{|(r)(i)|(k)]}_{|(j)(l)|(h)]}), \qquad (\mathrm{II}.106)$$

причем

$$\check{\nabla}_p\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{(s)(i)}_{q(j)(t)}=\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{(s)(i)}_{pq(j)(t)}-\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{(s)(i)(u)}_{q(j)(t)(v)}\check{G}^{(v)}_{p(u)},$$

$$\check{\nabla}_p C^{(s)(i)(u)}_{(j)(t)(v)}=C^{(s)(i)(u)}_{p(j)(t)(v)}-{}'C^{(s)(i)(u)(h)}_{(j)(t)(v)(k)}\check{G}^{(k)}_{p(h)}$$

и $\check{\mathfrak{R}}^{(i)}_{(j)pq}$ — тензор кривизны линейной дифференциально-геометрической связности $\check{G}^{(i)}_{k(j)}$.

Легко доказывается, что величины, определенные равенствами (II.104), (II.105) и (II.106), образуют тензоры. Тензор $\mathfrak{R}^{(s)(i)}_{(j)(t)pq}$ будем называть первым картановым тензором кривизны линейной тензорной связности. В силу того, что $C^{(s)(i)(u)}_{(j)(t)(v)}$ и $\check{\mathfrak{R}}^{(v)}_{(u)pq}$ являются тензорами, величины

$$\mathfrak{K}^{(s)(i)}_{(j)(t)pq}=2(\check{\nabla}_{[p}\check{\Gamma}^{(s)(i)}_{q](j)(t)}-\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{(s)(k)}_{[p|(h)(t)|}\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{(h)(i)}_{q](j)(k)}), \qquad (\mathrm{II}.107)$$

как это следует из (II.104), образуют тензор. Этот тензор будем называть первым тензором кривизны линейной тензорной связности. Если линейная тензорная связность является усеченной, то

$$\mathfrak{R}^{(s)(i)}_{(j)(t)pq}=\mathfrak{K}^{(s)(i)}_{(j)(t)pq}. \qquad (\mathrm{II}.108)$$

Тензор $\mathfrak{P}^{(s)(i)(u)(k)}_{(j)(t)(v)(h)}$ будем называть вторым картановым тензором кривизны линейной тензорной связности, а тензор $\mathfrak{S}^{(s)(i)\cdot(u)}_{(j)(t)p(v)}$ — третьим картановым тензором кривизны.

Если $\check{\varphi}^{(s)(i)}_{(j)(t)}$ — формы усеченной линейной тензорной связности, которая определяется объектом $\check{G}^{(s)(i)}_{k(j)(t)}$, то

$$\check{\varphi}^{(s)(i)}_{(j)(t)}=\varphi^{(s)(i)}_{(j)(t)}+\mathfrak{L}^{(s)(i)}_{k(j)(t)}\omega^k-C^{(s)(i)(u)}_{(j)(t)(v)}\check{\Psi}^{(v)}_{(u)},$$

где

$$\mathfrak{L}^{(s)(i)}_{k(j)(t)}=\check{G}^{(s)(i)}_{k(j)(t)}-\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{(s)(i)}_{k(j)(t)} \qquad (\mathrm{II}.109)$$

и

$$D\check{\Psi}^{(i)}_{(j)} - [\check{\Psi}^{(k)}_{(h)},\ \varphi^{(h)}_{(j)}{}^{(i)}_{(k)}] = \frac{1}{2}\ \check{\mathfrak{R}}^{(i)}_{(j)\,pq}[\omega^p,\ \omega^q] +$$

$$+ \mathfrak{L}^{(h)}_{p\,(j)}{}^{(i)}_{(k)}[\check{\Psi}^{(k)}_{(h)},\ \omega^p] - C^{(h)}_{(j)}{}^{(i)}_{(k)}{}^{(u)}_{(v)}[\check{\Psi}^{(k)}_{(h)},\ \check{\Psi}^{(v)}_{(u)}]. \tag{II.110}$$

Таким образом тензор $C^{(h)}_{(j)}{}^{(i)}_{(k)}{}^{(u)}_{(v)}$ естественно называть тензором кручения линейной тензорной связности, а тензор $\mathfrak{L}^{(s)}_{k\,(j)}{}^{(i)}_{(t)}$ – простейшим тензором кручения. Если линейная тензорная связность является усеченной, то простейший тензор кручения, как это следует из (II.101$_1$) и (II.109), равен нулю.

§ 8. Аффинная связность Б. Л. Лаптева

Определим в пространстве тензорных опорных элементов аффинную связность при помощи форм ω^i, $\overset{\circ}{\omega}{}^i_j$:

$$\overset{\circ}{\omega}{}^i_j = \omega^i_j + L^i_{kj}\,\omega^k + C^i_j{}^{(u)}_{(v)}\,\Psi^{(v)}_{(u)}. \tag{II.111}$$

Предполагается, что выполняются условия инвариантности этих форм относительно преобразований $\overline{w}{}^{(i)}_{(j)} = \rho\, w^{(i)}_{(j)}$. Конечные законы преобразования компонент объекта $\{L^i_{kj},\ C^i_j{}^{(u)}_{(v)}\}$ приведены в работе [3] $\Big($[3], стр. 459, (9)$\Big)$. Компоненты этого объекта являются решениями системы:

$$\nabla L^i_{kj} - C^i_j{}^{(u)}_{(v)}\,\Psi^{(v)}_{(u)\,k} - \omega^i_{jk} = L^i_{pkj}\,\omega^p + L^i_{kj}{}^{(u)}_{(v)}\,\Psi^{(v)}_{(u)},$$

$$\nabla C^i_j{}^{(u)}_{(v)} = C^i_{kj}{}^{(u)}_{(v)}\,\omega^k\, C^i_j{}^{(u)}_{(v)}{}^{(k)}_{(h)}\,\Psi^{(h)}_{(k)}. \tag{II.112}$$

Преобразование форм ω^i_j, определенное равенствами (II.111), индуцирует преобразование форм $\Psi^{(i)}_{(j)}$:

$$\overset{\circ}{\Psi}{}^{(i)}_{(j)} = N^{(i)}_{(j)}{}^{(u)}_{(v)}\,\Psi^{(v)}_{(u)} + \Gamma^{(i)}_{k\,(j)}\,\omega^k, \tag{II.113}$$

где

$$N^{(i)}_{(j)}{}^{(u)}_{(v)} = \delta^{(i)}_{(v)}\,\delta^{(u)}_{(j)} + \overset{\circ}{C}{}^{(i)}_{(j)}{}^{(u)}_{(v)}, \tag{II.114}$$

$$\overset{\circ}{C}{}^{i_1 \ldots i_p u_1 \ldots u_q}_{j_1 \ldots j_q v_1 \ldots v_p} = \sum_{a=1}^{p} w^{i_1 \ldots l \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}\, C^{i_a u_1 \ldots u_q}_{l v_1 \ldots v_p} - \sum_{b=1}^{q} w^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots l \ldots j_q}\, C^{l u_1 \ldots u_q}_{j_a v_1 \ldots v_p} \tag{II.115}$$

и

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{i_1 \ldots i_p}_{kj_1 \ldots j_q} = \sum_{a=1}^{p} w^{i_1 \ldots l \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}\, L^{i_a}_{kl} - \sum_{a=1}^{q} w^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots l \ldots j_q}\, L^l_{kj_a}. \tag{II.116}$$

Таким образом, к аффинной связности (II.111) можно присоединить объект линейной дифференциально-геометрической связности $\{N^{(i)}_{(j)}{}^{(u)}_{(v)},\ \overset{\circ}{\Gamma}{}^{(i)}_{k\,(j)}\}$. Если тензор $\overset{\circ}{C}{}^{(i)}_{(j)}{}^{(u)}_{(v)} = 0$, то аффинную связность (II.111) будем называть связностью Б. Л. Лаптева. В этом случае величины $\overset{\circ}{\Gamma}{}^{(i)}_{k(j)}$ образуют самостоятельный дифференциально-геометрический объект, т. е. объект линейной дифференциально-геометрической связности. Такие связности впервые рассматривал Б. Л. Лаптев [13], [14], [15].

Теорию кривизны для этой связности можно строить также, как и для общей тензорной связности.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ПРОСТРАНСТВО ОПОРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

§ 1. Общие вопросы

1. *Структурные уравнения пространства опорных элементов.* Рассмотрим систему форм ω^i и Θ^α где*)

$$\Theta^\alpha = dy^\alpha + \sum_{a=1}^{p} y_k^{\alpha i_1 \ldots i_a}(y)\, \omega^k_{i_1 \ldots i_a}. \tag{III.1}$$

Система дифференциальных уравнений $\omega^i = 0$, $\Theta^\alpha = 0$ вполне интегрируема и первые интегралы этой системы можно принять за локальные координаты некоторого нового пространства, которое и называется пространством опорных элементов $V^{(p)}_{n,N}$ (см. [4], [5], [14], [16]). Формы Θ^α имеют следующую структуру:

$$D\Theta^\alpha = [\Theta^\beta,\ \omega^\alpha_\beta] + [\omega^k,\ \omega^\alpha_k], \tag{III.2}$$

где

$$\omega^\alpha_\beta = \sum_{a=1}^{p} \partial_\beta\, y_k^{\alpha i_1 \ldots i_a}\, \omega^k_{i_1 \ldots i_a}, \tag{III.3}$$

$$\omega^\alpha_k = \sum_{a=1}^{p} y_h^{\alpha i_1 \ldots i_a}\, \omega^h_{i_1 \ldots i_a k}. \tag{III.4}$$

Уравнения (I.1) и (III.2) являются структурными уравнениями пространства опорных элементов. Пространство линейных элементов, пространство K-мерных плоских элементов, пространство тензорных опорных элементов являются частными случаями общего пространства опорных элементов.

Внешнее дифференцирование равенств (III.3) и (III.4) дает

$$D\omega^\alpha_\beta = [\omega^\gamma_\beta,\ \omega^\alpha_\gamma] + [\Theta^\gamma,\ \omega^\alpha_{\gamma\beta}] + [\omega^k, \omega^\alpha_{\beta k}], \tag{III.5}$$

$$D\omega^\alpha_k = [\omega^p_k,\ \omega^\alpha_p]\,[\omega^\beta_k, \omega^\alpha_p] + [\Theta^\gamma,\ \omega^\alpha_{\gamma k}] + [\omega^p,\ \omega^\alpha_{kp}], \tag{III.6}$$

где

$$\omega^\alpha_{\beta\gamma} = \sum_{a=1}^{p} \partial^2_{\beta\gamma}\, y_k^{\alpha i_1 \ldots i_a}\, \omega^k_{i_1 \ldots i_a}, \tag{III.7}$$

$$\omega^\alpha_{\beta k} = \sum_{a=1}^{p} \partial_\beta\, y_h^{\alpha i_1 \ldots i_a}\, \omega^h_{i_1 \ldots i_a k}, \tag{III.8}$$

$$\omega^\alpha_{kh} = \sum_{a=1}^{p} y_l^{\alpha i_1 \ldots i_a}\, \omega^l_{i_1 \ldots i_a kh}. \tag{III.9}$$

---

*) Предполагается, что функции $y_k^{\alpha i_1 \ldots i_a}(y)$ связаны соотношениями (I.10).

Введем следующие обозначения:

$$\omega^{\alpha}_{\alpha_1 \ldots \alpha_r} = \sum_{a=1}^{p} \partial^{r}_{\alpha_1 \ldots \alpha_r} y^{\alpha i_1 \ldots i_a}_{k} \omega^{k}_{i_1 \ldots i_a}, \tag{III.10}$$

$$\omega^{\alpha}_{k_1 \ldots k_s} = \sum_{a=1}^{p} y^{\alpha i_1 \ldots i_a}_{l} \omega^{l}_{i_1 \ldots i_a k_1 \ldots k_s}, \tag{III.11}$$

$$\omega^{\alpha}_{\alpha_1 \ldots \alpha_r k_1 \ldots k_s} = \sum_{a=1}^{p} \partial^{r}_{\alpha_1 \ldots \alpha_r} y^{\alpha i_1 \ldots i_a}_{l} \omega^{l}_{i_1 \ldots i_a k_1 \ldots k_s}. \tag{III.12}$$

2. *Расслоенные дифференциальные структуры.* Оказывается, что эти новые пфаффовые формы, определенные равенствами (III.10) – (III.12), связаны следующими структурными уравнениями (r, $s = 1, 2, \ldots$):

$$D\omega^{\alpha}_{\alpha_1 \ldots \alpha_r} = \sum_{a=1}^{r} \frac{r!}{a!\,(r-a)!} [\omega^{\beta}_{(\alpha_1 \ldots \alpha_a}, \omega^{\alpha}_{\alpha_{a+1} \ldots \alpha_r)\beta}] +$$
$$+ [\Theta^{\beta}, \omega^{\alpha}_{\alpha_1 \ldots \alpha_r \beta}] + [\omega^{k}, \omega^{\alpha}_{\alpha_1 \ldots \alpha_r k}], \tag{III.13}$$

$$D\omega^{\alpha}_{p_1 \ldots p_a} = \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!\,(a-s)!} \Big\{ [\omega^{k}_{(p_1 \ldots p_s}, \omega^{\alpha}_{p_{s+1} \ldots p_a)k}] +$$
$$+ [\omega^{\beta}_{(p_1 \ldots p_s}, \omega^{\alpha}_{|\beta| p_{s+1} \ldots p_a)}] \Big\} + [\omega^{k}, \omega^{\alpha}_{p_1 \ldots p_a k}] + [\Theta^{\gamma}, \omega^{\alpha}_{\gamma p_1 \ldots p_a}], \tag{III.14}$$

$$D\omega^{\alpha}_{\beta_1 \ldots \beta_b p_1 \ldots p_a} = \sum_{k=1}^{b} \frac{b!}{k!\,(b-k)!} \Big\{ \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!\,(a-s)!} ([\omega^{\gamma}_{(\beta_1 \ldots \beta_k p_1 \ldots p_s},$$
$$\omega^{\alpha}_{|\gamma| \beta_{k+1} \ldots \beta_b p_{s+1} \ldots p_a)}] [\omega^{h}_{(\beta_1 \ldots \beta_k p_1 \ldots p_s}, \omega^{\alpha}_{\beta k+1}{}^{\ldots \beta_a\, p_{s+1} \ldots p_a)\, h}]) + [\omega^{\gamma}_{(\beta_1 \ldots \beta_k},$$
$$\omega^{\alpha}_{|\gamma| \beta_{k+1} \ldots \beta_b) p_1 \ldots p_a}] \Big\} + \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s\,!(a-s)!} \Big\{ [\omega^{\gamma}_{(p_1 \ldots p_s}, \omega^{\alpha}_{|\gamma \beta_1 \ldots \beta_b| p_{s+1} \ldots p_a)}] +$$
$$+ [\omega^{h}_{(p_1 \ldots p_s)} \omega^{\alpha}_{|\beta_1 \ldots \beta_b| p_{s+1} \ldots p_a) h}] \Big\} + [\omega^{k}, \omega^{\alpha}_{\beta_1 \ldots \beta_b p_1 \ldots p_a k}] +$$
$$+ [\Theta^{\gamma}, \omega^{\alpha}_{\gamma \beta_1 \ldots \beta_b p_1 \ldots p_a}], \tag{III.15}$$

где скобки $(\beta_1 \ldots \beta_k p_1 \ldots p_s \beta_{k+1} \ldots \beta_b p_{s+1} \ldots p_a)$ означают симметрирование по каждой группе индексов (имеются ввиду группы $(\beta_1 \ldots \beta_b)$ и $(p_1 \ldots p_a)$). Из полученных структурных уравнений следует, что любая из систем

$$\omega^{i}, \Theta^{\alpha}, \omega^{\alpha}_{\alpha_1}; \quad \omega^{i}, \Theta^{\alpha}, \omega^{\alpha}_{\alpha_1}, \omega^{\alpha}_{\alpha_1 \alpha_2}; \ \ldots, \ \omega^{i}, \Theta^{\alpha}, \omega^{\alpha}_{\alpha_1}, \ \ldots, \ \omega^{\alpha}_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}$$

является вполне интегрируемой и определяет расслоенную дифференциальную структуру, присоединенную к пространству опорных элементов. Эти структуры мы будем называть вертикальными расслоенными дифференциальными структурами пространства опорных элементов. Расслоенные дифференциальные структуры, присоединенные к базе пространства опорных элементов, будем называть горизонтальными, а структуры, определенные следующими системами форм:

$$\omega^i,\ \Theta^\alpha,\ \omega^i_{j_1},\ \omega^\alpha_{\beta_1};\quad \omega^i,\ \Theta^\alpha,\ \omega^i_{j_1 j_2},\ \omega^\alpha_{\beta_1},\ \omega^\alpha_{\beta_1\beta_2};\ \ldots,$$
$$\omega^i,\ \Theta^\alpha,\ \omega^i_{j_1},\ \ldots,\ \omega^i_{j_1\ldots j_p},\ \omega^\alpha_{\beta_1},\ \ldots,\ \omega^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_q},$$

будем называть расщепленными расслоенными дифференциальными структурами двойного порядка рассматриваемого пространства. Кроме этих расслоенных структур существуют и другие расслоенные структуры, присоединенные к пространству опорных элементов. Самая общая расслоенная структура определяется формами ω^i, Θ^α, $\omega^i_{j_1\ldots j_a}$, $\omega^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_a}$, $\omega^\alpha_{j_1\ldots j_b\beta_1\ldots\beta_c}$.

3. *Касательные пространства*. Формы Пфаффа

$$\Theta^\alpha_{\alpha_1\ldots\alpha_a}=\omega^\alpha_{\alpha_1\ldots\alpha_a}\Big|_{\omega^i=\Theta^\alpha=0},\qquad a=1,\ 2,\ \ldots,\ q$$

имеют такую же структуру, как и формы $\Theta^i_{i_1\ldots i_a}$. Эти формы являются инвариантными формами дифференциальной группы порядка q для слоя пространства опорных элементов, которую мы будем называть вертикальной дифференциальной группой $D^{(q,N)}$ порядка q пространства опорных элементов.

С каждым опорным элементом пространства $V^{(p)}_{n,N}$ связывается два линейных пространства: касательное векторное пространство $T_{n+N}(x,\ y)$, изоморфное пространству операторов

$$X_i=\frac{\partial}{\partial x^i},\qquad Y_\alpha=\frac{\partial}{\partial y^\alpha},$$

и касательное дуальное векторное пространство $T^*_{n+N}(x,\ y)$ с натуральным корепером $(dx^i,\ dy^\alpha)$, а произвольный корепер этого пространства определяется формами ω^i и Θ^α. Группа $g(x,\ y)$, т. е. группа преобразований элементов пространств $T_{n+N}(x,\ y)$ и $T^*_{n+N}(x,\ y)$ определяется инвариантными формами

$$\Theta^i_j=\omega^i_j\Big|_{\omega^i=\Theta^\alpha=0},\qquad \Theta^\alpha_\beta=\omega^\alpha_\beta\Big|_{\omega^i=\Theta^\alpha=0},\qquad \Theta^\alpha_k=\omega^\alpha_k\Big|_{\omega^i=\Theta^\alpha=0},$$

структурные уравнения которых имеют вид:

$$D\Theta^i_j=[\Theta^k_j,\ \Theta^i_k],\quad D\Theta^\alpha_\beta=[\Theta^\gamma_\beta,\ \Theta^\alpha_\gamma],$$
$$D\Theta^\alpha_i=[\Theta^\beta_i,\ \Theta^\alpha_\beta]+[\Theta^k_i,\ \Theta^\alpha_k]. \qquad \text{(III.15)}$$

Из этих структурных уравнений следует, что группа $g(x,\ y)$ имеет две подгруппы, определенные инвариантными формами Θ^i_j и Θ^α_β. Формы Θ^i_j — инвариантные формы центроаффинной группы касательного пространства базы V_n, а Θ^α_β — инвариантные формы такой же группы касательного пространства слоя $V_N|_{\omega^i=0}$. Подгруппу группы $g(x,\ y)$, определенную формами Θ^i_j, будем называть горизонтальной центроаффинной подгруппой, а вторую — вертикальной подгруппой (она является вертикальной дифференциальной группой первого порядка).

Инфинитезимальные преобразования векторов репера $\{e_i,\ e_\alpha\}$ пространства $T_{n+N}(x,\ y)$ имеют вид

$$de_i=\Theta^k_i\,e_k+\Theta^\alpha_i\,e_\alpha,$$
$$de_\alpha=\Theta^\beta_\alpha\,e_\beta, \qquad \text{(III.16)}$$

а произвольного корепера $\{e^i, e^\alpha\}$ пространства $T^*_{n+N}(x, y)$ –

$$de^i = -\Theta^i_k e^k,$$
$$de^\alpha = -\Theta^\alpha_k e^k - \Theta^\alpha_\beta e^\beta. \qquad (III.17)$$

Очевидно, что пространство $T_{n+N}(x, y)$ имеет инвариантное N-мерное подпространство, определенное базисными векторами e_α, а $T^*_{n+N}(x, y)$ – n-мерное инвариантное подпространство $T^*_n(x, y)$, определенное базисными ковекторами e^i. Пространство $T_N(x, y)$ является касательным пространством слоя $V_N|_{\omega^i=0}$ и называется вертикальным подпространством пространства $T_{n+N}(x, y)$.

§ 2. Дифференциальные уравнения полей дифференциально-геометрических объектов

Б. Л. Лаптев рассматривал дифференциально-геометрические объекты первого и второго рода, которые характеризуются следующими законами преобразования

$$Y^{I'} = F^{I'}(Y^I, x^{i'}_{i_1}, x^{i'}_{i_1 i_2}, \ldots, x^{i'}_{i_1 \ldots i_p}), \qquad (III.18)$$

$$\tilde{Y}^{I'} = \mathfrak{F}^{I'}(\tilde{Y}^I, x^{i'}_{i_1}, \ldots, x^{i'}_{i_1 \ldots i_p}, y^{\alpha'}_{\alpha_1}, \ldots, y^{\alpha'}_{\alpha_1 \ldots \alpha_q i_1 \ldots i_r}), \qquad (III.19)$$

где

$$x^{i'}_{i_1 \ldots i_a} = \partial^a_{i_1 \ldots i_a} x^{i'}, \quad y^{\alpha'}_{\alpha_1 \ldots \alpha_q} = \partial^q_{\alpha_1 \ldots \alpha_q} y^{\alpha'}, \quad y^{\alpha'}_k = \sum_{a=1}^{p} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^{i'}_{i_1 \ldots i_a}} x^{i'}_{i_1 \ldots i_a k}.$$

Дифференциально-геометрические объекты первого рода пространства опорных элементов мы будем называть горизонтальными объектами. Дифференциальные уравнения таких объектов, заменяющие конечные законы преобразования (III.18), имеют вид

$$dY^I + \sum_{a=1}^{p} Y^{I i_1 \ldots i_a}_k (Y)\, \omega^k_{i_1 \ldots i_a} = Y^I_k \omega^k + Y^I_\alpha \Theta^\alpha, \qquad (III.20)$$

где функции $Y^{I i_1 \ldots i_a}_k$ $(a = 1, 2, \ldots, p)$ связаны соотношениями, аналогичными соотношениям (I.10) (эти соотношения и обеспечивают интегрируемость системы (III.20) по модулю форм ω^i и Θ^α). Вместо дифференциально-геометрических объектов второго рода, мы рассмотрим дифференциально-геометрические объекты, характеризуемые следующими законами преобразования

$$Z^{I'} = \mathfrak{Z}^{I'}(Z^I, x^{i'}_{i_1 \ldots i_p}, y^{\alpha'}_{\alpha_1}, \ldots, y^{\alpha'}_{\alpha_1 \ldots \alpha_q}), \qquad (III.21)$$

$$U^{I'} = H^{I'}(U^I, y^{\alpha'}_{\alpha_1}, \ldots, y^{\alpha'}_{\alpha_1 \ldots \alpha_q}), \qquad (III.22)$$

причем первый из этих объектов будем называть расщепленным (или расслоенным дифференциально-геометрическим объектом), а второй – вертикальным (или слоевым) дифференциально-геометрическим объектом. Такого рода объекты на произвольном составном многообразии рассматривались В. В. Вагнером [31]. Система дифференциальных уравнений расщепленного дифференциально-геометрического объекта (двойного порядка (p, q)) имеет вид

$$dZ^I + \sum_{a=1}^{p} Z^{I i_1 \ldots i_a}_k (Z)\, \omega^k_{i_1 \ldots i_a} + \sum_{b=1}^{q} Z^{I \alpha_1 \ldots \alpha_b}_\beta (Z)\, \omega^\beta_{\alpha_1 \ldots \alpha_b} =$$
$$= Z^I_k \omega^k + Z^I_\alpha \Theta^\alpha, \qquad (III.23)$$

причем функции $Z_k^{Ii_1\dots i_a}$ $(a=1, 2, \dots, p)$ и $Z_\beta^{I\alpha_1\dots\alpha_b}$ $(b=1, 2, \dots, q)$ и их частные производные связаны алгебраическими соотношениями, обеспечивающими интегрируемость этой системы по модулю форм ω^i и Θ^α. Вертикальный дифференциально-геометрический объект (порядка q) определяется системой

$$dU^I+\sum_{b=1}^{q} U_\beta^{I\alpha_1\dots\alpha_b}\,\omega^\beta_{\alpha_1\dots\alpha_b}=U^I_k\,\omega^k+U^I_\alpha\,\Theta^\alpha, \tag{III.24}$$

которая также вполне интегрируема по модулю форм ω^i и Θ^α. При определении этих объектов, мы существенно пользовались дифференциальными группами $G^{(p,n)}$, $G^{(q,N)}$ и их прямыми произведениями.

Продолжения систем (III.20), (III.23) и (III.24) дает

$$dY^I_k+Y^L_k\sum_{a=1}^{p}\partial_L Y_l^{Ii_1\dots i_a}\,\omega^l_{i_1\dots i_a}+\sum_{a=1}^{p} Y_l^{Ii_1\dots i_a}\,\omega^l_{i_1\dots i_a k}-$$

$$-Y^I_\alpha\,\omega^\alpha_k-Y^I_l\omega^l_k=Y^I_{kl}\,\omega^l+Y^I_{k\alpha}\,\Theta^\alpha, \tag{III.25}$$

$$dY^I_\alpha-Y^L_\alpha\sum_{a=1}^{p}\partial_L Y_k^{Ii_1\dots i_a}\,\omega^k_{i_1\dots i_a}-Y^I_\beta\,\omega^\beta_\alpha=Y^I_{k\alpha}\,\omega^k+Y^I_{\alpha\beta}\,\Theta^\beta; \tag{III.26}$$

$$dZ^I_k-Z^I_l\,\omega^l_k-Z^I_\beta\,\omega^\beta_k+\sum_{a=1}^{p}(Z_l^{Ii_1\dots i_a}\,\omega^l_{i_1\dots i_a k}+\partial_L Z_l^{Ii_1\dots i_a}\,Z^L_k\,\omega^l_{i_1\dots i_a})+$$

$$+\sum_{b=1}^{q}(Z_\beta^{I\alpha_1\dots\alpha_b}\,\omega^\beta_{\alpha_1\dots\alpha_b k}+\partial_L Z_\beta^{I\alpha_1\dots\alpha_b}\,Z^L_k\,\omega^\beta_{\alpha_1\dots\alpha_b})=Z^I_{kl}\,\omega^l+Z^I_{k\alpha}\,\Theta^\alpha, \tag{III.27}$$

$$dZ^I_\alpha-Z^I_\beta\,\omega^\beta_\alpha+\sum_{a=1}^{p}\partial_L Z_l^{Ii_1\dots i_a}\,Z^L_\alpha\,\omega^l_{i_1\dots i_a}+$$

$$+\sum_{b=1}^{q}(Z_\beta^{I\alpha_1\dots\alpha_b}\,\omega^\beta_{\alpha_1\dots\alpha_b\alpha}+\partial_L Z_\beta^{I\alpha_1\dots\alpha_b}\,Z^L_\alpha\,\omega^\beta_{\alpha_1\dots\alpha_b})=Z^I_{k\alpha}\,\omega^k+Z^I_{\alpha\beta}\,\Theta^\beta; \tag{III.28}$$

$$dU^I_k-U^I_l\,\omega^l_k-U^I_\beta\,\omega^\beta_k+\sum_{b=1}^{q}(U_\beta^{I\alpha_1\dots\alpha_b}\,\omega^\beta_{\alpha_1\dots\alpha_b k}+$$

$$+\partial_L U_\beta^{I\alpha_1\dots\alpha_b}\,U^L_k\,\omega^\beta_{\alpha_1\dots\alpha_b})=U^I_{kl}\,\omega^l+U^I_{k\alpha}\,\Theta^\alpha, \tag{III.29}$$

$$dU^I_\alpha-U^I_\beta\,\omega^\beta_\alpha+\sum_{b=1}^{q}(U_\beta^{I\alpha_1\dots\alpha_b}\,\omega^\beta_{\alpha_1\dots\alpha_b\alpha}+$$

$$+\partial_L U_\beta^{I\alpha_1\dots\alpha_b}\,U^L_\alpha\,\omega^\beta_{\alpha_1\dots\alpha_b})=U^I_{k\alpha}\,\omega^k+U^I_{\alpha\beta}\,\Theta^\beta, \tag{III.30}$$

где

$$Y^I_{kl}=Y^I_{lk},\quad Y^I_{\alpha\beta}=Y^I_{\beta\alpha},\quad\dots,\quad U^I_{\alpha\beta}=U^I_{\beta\alpha}.$$

§ 3. Неголономное дифференцирование Ли в $V_{n,N}^{(p)}$

Б. Л. Лаптев разработал теорию дифференцирования Ли в пространстве опорных элементов $V_{n,N}^{(p)}$, пользуясь векторным полем, определенным на базе этого пространства, т. е. векторным полем, система дифференциальных уравнений которого имеет вид (I.59). Будем пользоваться и системой (I.59$_1$).

1. *Лиевые лифты.* Преобразования форм ω^i и $\omega^i_{i_1 \dots i_a}$, определенные равенствами (I.58) и (I.58a), индуцируют некоторые преобразования форм, определяющих расслоенные дифференциальные структуры, присоединенные к пространству опорных элементов $V_{n,N}^{(p)}$. Заменяя формы $\omega^i_{i_1 \dots i_a}$ формами $\overline{\omega}^i_{i_1 \dots i_a}$ в равенствах (III.1), мы получим

$$\overline{\Theta}^\alpha = \Theta^\alpha - v^\alpha \Theta, \tag{III.31}$$

где

$$v^\alpha = \sum_{a=1}^{p} y_k^{\alpha i_1 \dots i_a} v^k_{i_1 \dots i_a}. \tag{III.32}$$

Оказывается, что v^α являются решениями следующей системы дифференциальных уравнений:

$$dv^\alpha + v^\beta \omega^\alpha_\beta + v^k \omega^\alpha_k = v^\alpha_k \omega^k + v^\alpha_\beta \Theta^\beta, \tag{III.33}$$

где

$$v^\alpha_k = \sum_{a=1}^{p} y_l^{\alpha i_1 \dots i_a} v^l_{i_1 \dots i_a k}, \tag{III.34}$$

$$v^\alpha_\beta = \sum_{a=1}^{p} \partial_\beta y_k^{\alpha i_1 \dots i_a} v^k_{i_1 \dots i_a}. \tag{III.35}$$

Из (I.59) и (III.33) следует, что система величин (v^i, v^α) образует поле однородного дифференциально-геометрического объекта, который является векторным полем второго рода пространства опорных элементов. Это поле является специальным векторным полем, ибо v^i зависит только от координат базы, а v^α — от выбора v^i и величин $v^i_{i_1 \dots i_a}$, $a = 1, 2, \dots, p$ (зависит и от выбора координат слоя). Очевидно, что к каждому векторному полю v^i, определенному на базе пространства $V_{n,N}^{(p)}$, однозначно присоединяется векторное поле (v^i, v^α), которое мы будем называть лиевым лифтом исходного базисного векторного поля.

Введем следующие обозначения:

$$v^\alpha_{k_1 \dots k_s} = \sum_{a=1}^{p} y_l^{\alpha i_1 \dots i_a} v^l_{i_1 \dots i_a k_1 \dots k_s}, \tag{III.36}$$

$$v^\alpha_{\beta_1 \dots \beta_r} = \sum_{a=1}^{p} \partial^r_{\beta_1 \dots \beta_r} y_l^{\alpha i_1 \dots i_a} v^l_{i_1 \dots i_a} \tag{III.37}$$

и

$$v^\alpha_{k_1 \dots k_s \beta_1 \dots \beta_r} = \sum_{a=1}^{p} \partial^r_{\beta_1 \dots \beta_r} y_l^{\alpha i_1 \dots i_a} v^l_{i_1 \dots i_a k_1 \dots k_s}. \tag{III.38}$$

Величины

$$v^\alpha_{\beta_1 \dots \beta_a}, \quad v^\alpha_{k_1 \dots k_c \beta_1 \dots \beta_e} \quad \text{и} \quad v^\alpha_{\beta_1 \dots \beta_a} \quad (c + e = a),$$

определенные равенствами (III.36) – (III.38), являются решениями следующих систем дифференциальных уравнений:

$$dv^{\alpha}_{\beta_1 \ldots \beta_a} - \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!\,(a-s)!} \left\{ \omega^{\gamma}_{(\beta_1 \ldots \beta_s} v^{\alpha}_{\beta_{s+1} \ldots \beta_a)\gamma} - v^{\gamma}_{(\beta_1 \ldots \beta_s} \omega^{\alpha}_{\beta_{s+1} \ldots \beta_a)\gamma} \right\} +$$

$$+ v^k \omega^{\alpha}_{\beta_1 \ldots \beta_a k} + v^{\gamma} \omega^{\alpha}_{\beta_1 \ldots \beta_a \gamma} = v^{\alpha}_{k \beta_1 \ldots \beta_a} \omega^k + v^{\alpha}_{\beta_1 \ldots \beta_a \gamma} \Theta^{\gamma}, \qquad \text{(III.39)}$$

$$dv^{\alpha}_{p_1 \ldots p_a} - \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!\,(a-s)!} \{ \omega^{k}_{(p_1 \ldots p_s} v^{\alpha}_{p_{s+1} \ldots p_a)k} - v^{k}_{(p_1 \ldots p_s} \omega^{\alpha}_{p_{s+1} \ldots p_a)k} +$$

$$+ \omega^{\beta}_{(p_1 \ldots p_s} v^{\alpha}_{p_{s+1} \ldots p_a)\beta} - v^{\beta}_{(p_1 \ldots p_s} \omega^{\alpha}_{p_{s+1} \ldots p_a)\beta} \} + v^k \omega^{\alpha}_{p_1 \ldots p_a k} +$$

$$+ v^{\gamma} \omega^{\alpha}_{p_1 \ldots p_a \gamma} = v^{\alpha}_{p_1 \ldots p_a k} \omega^k + v^{\alpha}_{p_1 \ldots p_a \gamma} \Theta^{\gamma}, \qquad \text{(III.40)}$$

$$dv^{\alpha}_{p_1 \ldots p_a \beta_1 \ldots \beta_b} - \sum_{k=1}^{b} \frac{b!}{k!\,(b-k)!} \{ \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!\,(a-s)!} [\omega^{\gamma}_{(p_1 \ldots p_s \beta_1 \ldots \beta_k} \times$$

$$\times v^{\alpha}_{p_{s+1} \ldots p_a \beta_{k+1} \ldots \beta_b)\gamma} - v^{\gamma}_{(p_1 \ldots p_s \beta_1 \ldots \beta_k} \omega^{\alpha}_{p_{s+1} \ldots p_a \beta_{k+1} \ldots \beta_b)\gamma} \times$$

$$\times \omega^{t}_{(p_1 \ldots p_s \beta_1 \ldots \beta_k} v^{\alpha}_{p_{s+1} \ldots p_a \beta_{k+1} \ldots \beta_b)t}] +$$

$$+ \omega^{\gamma}_{(\beta_1 \ldots \beta_k} v^{\alpha}_{|p_1 \ldots p_a| \beta_{k+1} \ldots \beta_b)\gamma} - v^{\gamma}_{(\beta_1 \ldots \beta_k} \omega^{\alpha}_{|p_1 \ldots p_a| \beta_{k+1} \ldots \beta_b)\gamma} \} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!\,(a-s)!} \{ \omega^{\gamma}_{(p_1 \ldots p_s} v^{\alpha}_{p_{s+1} \ldots p_a)\beta_1 \ldots \beta_b \gamma} - v^{\gamma}_{(p_1 \ldots p_s} \omega^{\alpha}_{p_{s+1} \ldots p_a)\beta_1 \ldots \beta_b \gamma} +$$

$$+ \omega^{k}_{(p_1 \ldots p_s} v^{\alpha}_{p_{s+1} \ldots p_a)k\beta_1 \ldots \beta_b} - v^{k}_{(p_1 \ldots p_s} \omega^{\alpha}_{p_{s+1} \ldots p_a)k\beta_1 \ldots \beta_b} \} +$$

$$+ v^k \omega^{\alpha}_{p_1 \ldots p_a k\beta_1 \ldots \beta_b} + v^{\gamma} \omega^{\alpha}_{p_1 \ldots p_a \beta_1 \ldots \beta_b \gamma} = v^{\alpha}_{kp_1 \ldots p_a \beta_1 \ldots \beta_b} \omega^k +$$

$$+ v^{\alpha}_{p_1 \ldots p_a \beta_1 \ldots \beta_b \gamma} \Theta^{\gamma}. \qquad \text{(III.41)}$$

Дифференцируя внешним образом (III.31), получим

$$D\overline{\Theta}^{\alpha} = [\overline{\Theta}^{\beta}, \overline{\omega}^{\alpha}_{\beta}] + [\overline{\omega}^{k}, \overline{\omega}^{\alpha}_{k}], \qquad \text{(III.42)}$$

где

$$\overline{\omega}^{\alpha}_{\beta} = \omega^{\alpha}_{\beta} - v^{\alpha}_{\beta} \Theta, \qquad \text{(III.43)}$$

$$\overline{\omega}^{\alpha}_{k} = \omega^{\alpha}_{k} - v^{\alpha}_{k} \Theta. \qquad \text{(III.44)}$$

Оказывается, что формы

$$\overline{\omega}^{\alpha}_{\alpha_1 \ldots \alpha_a} = \omega^{\alpha}_{\alpha_1 \ldots \alpha_a} - v^{\alpha}_{\alpha_1 \ldots \alpha_a} \Theta,$$

$$\overline{\omega}^{\alpha}_{k_1 \ldots k_a} = \omega^{\alpha}_{k_1 \ldots k_a} - v^{\alpha}_{k_1 \ldots k_a} \Theta, \qquad \text{(III.45)}$$

$$\omega^{\alpha}_{\alpha_1 \ldots \alpha_a k_1 \ldots k_b} = \omega^{\alpha}_{\alpha_1 \ldots \alpha_a k_1 \ldots k_b} - v^{\alpha}_{k_1 \ldots k_b \alpha_1 \ldots \alpha_a} \Theta$$

имеют такую же структуру как и формы, определенные равенствами (III.9) – (III.12). Таким образом, преобразования форм (I.58) и (I.58a) порождают лиевый лифт базисного векторного поля и индуцируют преобразование форм (III.10) – (III.12) такое, относительно которого присоединенные расслоенные дифференциальные структуры остаются инвариантными.

2. *Формулы для вычисления производных Ли.* Известно, что производную Ли данного дифференциально-геометрического объекта относительно векторного поля можно рассматривать как скорость отклонения рассматриваемого поля дифференциально-геометрического объекта от преобразованного поля. Вычислим неголономные производные Ли от полей дифференциально-геометрических объектов (III.20), (III.23) и (III.24). Для этого в системах дифференциальных уравнений (III.20) – (III.24) нужно заменить формы ω^i, $\omega^i_{k_1 \ldots k_a}$, Θ^α, $\omega^\alpha_{\alpha_1 \ldots \alpha_a}$ формами $\overline{\omega}^i$, $\overline{\omega}^i_{k_1 \ldots k_a}$, $\overline{\Theta}^\alpha$, $\overline{\omega}^\alpha_{\alpha_1 \ldots \alpha_a}$ и вычислить коэффициенты при форме Θ. Эти коэффициенты и характеризуют скорости изменения рассматриваемых дифференциально-геометрических объектов. Выполнив вычисление, мы получим

$$dY^I + \sum_{a=1}^{p} Y_k^{Ii_1 \ldots i_a} \overline{\omega}^k_{i_1 \ldots i_a} = Y_k^I \overline{\omega}^k + Y_\alpha^I \overline{\Theta}^\alpha + \overset{L}{\underset{v}{D}} Y^I \Theta, \tag{III.46}$$

$$dZ^I + \sum_{a=1}^{p} Z_k^{Ii_1 \ldots i_a} \overline{\omega}^k_{i_1 \ldots i_a} + \sum_{b=1}^{q} Z_\beta^{I\alpha_1 \ldots \alpha_b} \overline{\omega}^\beta_{\alpha_1 \ldots \alpha_b} =$$

$$= Z_k^I \overline{\omega}^k + Z_\alpha^I \overline{\Theta}^\alpha + \overset{L}{\underset{v}{D}} Z^I \Theta, \tag{III.47}$$

$$dU^I + \sum_{b=1}^{q} U_\beta^{I\alpha_1 \ldots \alpha_b} \overline{\omega}^\beta_{\alpha_1 \ldots \alpha_b} = U_k^I \overline{\omega}^k + U_\alpha^I \overline{\Theta}^\alpha + \overset{L}{\underset{v}{D}} U^I \Theta, \tag{III.48}$$

где

$$\overset{L}{\underset{v}{D}} Y^I = Y_k^I v^k + Y_\alpha^I v^\alpha - \sum_{a=1}^{p} Y_k^{Ii_1 \ldots i_a} v^k_{i_1 \ldots i_a}, \tag{III.49}$$

$$\overset{L}{\underset{v}{D}} Z^I = Z_k^I v^k + Z_\alpha^I v^\alpha - \sum_{a=1}^{p} Z_k^{Ii_1 \ldots i_a} v^k_{i_1 \ldots i_a} - \sum_{b=1}^{q} Z_\beta^{I\alpha_1 \ldots \alpha_b} v^\beta_{\alpha_1 \ldots \alpha_b}, \tag{III.50}$$

$$\overset{L}{\underset{v}{D}} U^I = U_k^I v^k + U_\alpha^I v^\alpha - \sum_{a=1}^{q} U_\beta^{I\alpha_1 \ldots \alpha_a} v^\beta_{\alpha_1 \ldots \alpha_a}. \tag{III.51}$$

Величины, определенные равенствами (III.49) – (III.51), и являются неголономными производными Ли соответствующих полей дифференциально-геометрических объектов.

3. *Основные свойства неголономных производных Ли.* 1. Опорный дифференциально-геометрический объект y^α можно рассматривать как специальное поле, определенное на пространстве опорных элементов уравнениями

$$\Theta^\alpha = y_k^\alpha \omega^k + y_\beta^\alpha \Theta^\beta,$$

где

$$y_k^\alpha = 0 \quad \text{и} \quad y_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha.$$

Тогда из (III.49) следует, что

$$\overset{L}{\underset{v}{D}} y^\alpha = 0 \cdot v^k + \delta_\beta^\alpha v^\beta - \sum_{a=1}^{p} y_k^{\alpha i_1 \ldots i_a} v^k_{i_1 \ldots i_a},$$

т. е.

$$\overset{L}{\underset{v}{D}}\, y^{\alpha} = v^{\alpha} - \sum_{a=1}^{p} y_k^{\alpha i_1 \ldots i_a}\, v^k_{i_1 \ldots i_a} \qquad \text{(III.52)}$$

или, в силу (III.32),

$$\overset{L}{\underset{v}{D}}\, y^{\alpha} = 0. \qquad \text{(III.53)}$$

Таким образом, неголономная производная Ли от опорного объекта равна нулю.

2. Так как система дифференциальных уравненый лиевого лифта (III.33) базисного векторного поля инвариантна относительно замены форм (I.58), (I.58a), (III.31) и (III.45), то

$$\overset{L}{\underset{v}{D}}\, v^i = 0, \quad \overset{L}{\underset{v}{D}}\, v^{\alpha} = 0, \qquad \text{(III.54)}$$

т. е. неголономная производная Ли от лиевого лифта базисного векторного поля равна нулю.

3. Так как горизонтальные и вертикальные дифференциально-геометрические объекты являются частными случаями расщепленных дифференциально-геометрических объектов, то мы ограничимся рассмотрением последних. Если базисное векторное поле v^i имеет вид $v^i = \overset{(s)}{C}\, \underset{(s)}{v^i}$, где $\overset{(s)}{C} = \mathrm{const}$ и $\underset{(s)}{v^i}$ — векторные поля, то лиевый лифт этого поля является суммой соответствующих лиевых лифтов слагаемых векторных полей, т. е.

$$v^i = \overset{(s)}{C}\, \underset{(s)}{v^i}, \quad v^{\alpha} = \overset{(s)}{C}\, \underset{(s)}{v^{\alpha}}.$$

В силу этих равенств, мы и имеем, что

$$\overset{L}{\underset{v}{D}}\, Z^I = \overset{(s)}{C}\, \overset{L}{\underset{s}{D}}\, Z^I, \qquad \text{(III.55)}$$

где $\overset{L}{\underset{s}{D}}$ — знак неголономной производной Ли относительно векторного поля $\underset{(s)}{v^i}$.

4. Так как коммутатор двух векторных полей является векторным полем, то лиевый лифт коммутатора двух векторных полей будем называть коммутатором лиевых лифтов исходных векторных полей. Неголономная производная Ли лифта векторного поля $\underset{2}{v^i}$ относительно векторного поля $\underset{1}{v^i}$ $\left(\text{точнее относительно лифта } (\underset{1}{v^i}, \underset{1}{v^{\alpha}})\right)$ имеет вид

$$\overset{L}{\underset{1}{D}}\, \underset{2}{v^i} = \underset{2}{v^i_k}\, \underset{1}{v^k} - \underset{2}{v^k}\, \underset{1}{v^i_k},$$

$$\overset{L}{\underset{1}{D}}\, \underset{2}{v^{\alpha}} = \underset{2}{v^{\alpha}_k}\, \underset{1}{v^k} - \underset{1}{v^{\alpha}_k}\, \underset{2}{v^k} + \underset{2}{v^{\alpha}_{\beta}}\, \underset{1}{v^{\beta}} - \underset{1}{v^{\alpha}_{\beta}}\, \underset{2}{v^{\beta}}. \qquad \text{(III.56)}$$

Очевидно, что

$$\overset{L}{\underset{1}{D}}\, \underset{2}{v^i} = -\overset{L}{\underset{2}{D}}\, \underset{1}{v^i} = \underset{12}{v^i},$$

$$\overset{L}{\underset{1}{D}}\, \underset{2}{v^\alpha} = -\overset{L}{\underset{2}{D}}\, \underset{1}{v^\alpha} = \underset{12}{v^\alpha}, \tag{III.57}$$

т. е. коммутатор двух лиевых лифтов базисных векторных полей равняется неголономной производной Ли от лиевого лифта второго векторного поля относительно первого.

5. Если $\underset{1}{v^i}$, $\underset{2}{v^i}$, $\underset{3}{v^i}$ — векторные поля, то

$$\overset{L}{\underset{3}{D}}\, (\overset{L}{\underset{1}{D}}\, \underset{2}{v^i}) = \underset{12}{v^i_k}\, \underset{3}{v^k} - \underset{12}{v^k}\, \underset{3}{v^i_k},$$

$$\overset{L}{\underset{3}{D}}\, (\overset{L}{\underset{1}{D}}\, \underset{2}{v^\alpha}) = \underset{12}{v^\alpha_k}\, \underset{3}{v^k} - \underset{3}{v^\alpha_k}\, \underset{12}{v^k} + \underset{12}{v^\alpha_\beta}\, \underset{3}{v^\beta} - \underset{3}{v^\alpha_\beta}\, \underset{12}{v^\beta}.$$

Циклируя эти выражения по индексам 1, 2, 3 и складывая полученные равенства, будем иметь

$$\overset{L}{\underset{1}{D}}\, (\overset{L}{\underset{2}{D}}\, \underset{3}{v^i}) + \overset{L}{\underset{2}{D}}\, (\overset{L}{\underset{3}{D}}\, \underset{1}{v^i}) + \overset{L}{\underset{3}{D}}\, (\overset{L}{\underset{1}{D}}\, \underset{2}{v^i}) = 0,$$

$$\overset{L}{\underset{1}{D}}\, (\overset{L}{\underset{2}{D}}\, \underset{3}{v^\alpha}) + \overset{L}{\underset{2}{D}}\, (\overset{L}{\underset{3}{D}}\, \underset{1}{v^\alpha}) + \overset{L}{\underset{3}{D}}\, (\overset{L}{\underset{1}{D}}\, \underset{2}{v^\alpha}) = 0. \tag{III.58}$$

Эти равенства являются тождеством Бианки для лиевых лифтов данных векторных полей.

6. Продолжая систему дифференциальных уравнений (III.47) относительно линейно независимых форм $\overline{\omega}^i$, $\overline{\Theta}^\alpha$ и Θ, мы получим

$$dZ^I_k - Z^I_l\, \overline{\omega}^l_k - Z^I_\beta\, \overline{\omega}^\beta_\alpha + \sum_{a=1}^{p} Z^{Ii_1 \dots i_a}_l\, \overline{\omega}^l_{i_1 \dots i_a k} +$$

$$+ \sum_{b=1}^{q} Z^{I\alpha_1 \dots \alpha_b}_\beta\, \overline{\omega}^\beta_{\alpha_1 \dots \alpha_b} + \Big(\sum_{a=1}^{p} \partial_L Z^{Ii_1 \dots i_a}_l\, \overline{\omega}^l_{i_1 \dots i_a} +$$

$$+ \sum_{b=1}^{q} \partial_L Z^{I\alpha_1 \dots \alpha_b}_\beta\, \overline{\omega}^\beta_{\alpha_1 \dots \alpha_b} \Big) Z^L_k = \overline{Z}^I_{kl}\, \overline{\omega}^l + \overline{Z}^I_{k\alpha}\, \overline{\Theta}^\alpha + A^I_k\, \Theta, \tag{III.59}$$

$$dZ^I_\alpha - Z^I_\beta\, \overline{\omega}^\beta_\alpha + \sum_{b=1}^{q} Z^{I\alpha_1 \dots \alpha_b}_\beta\, \overline{\omega}^\beta_{\alpha_1 \dots \alpha_b \alpha} + \Big(\sum_{a=1}^{p} \partial_L Z^{Ii_1 \dots i_a}_l\, \overline{\omega}^l_{i_1 \dots i_a} +$$

$$+ \sum_{b=1}^{q} \partial_L Z^{I\alpha_1 \dots \alpha_b}_\beta\, \overline{\omega}^\beta_{\alpha_1 \dots \alpha_b} \Big) Z^L_\alpha = \overline{Z}^I_{k\alpha}\, \omega^k + \overline{Z}^I_{\alpha\beta}\, \overline{\Theta}^\beta + A^I_\alpha\, \Theta, \tag{III.60}$$

$$d(\overset{L}{\underset{v}{D}}\, Z^I) + \Big(\sum_{a=1}^{p} \partial_K Z^{Ii_1 \dots i_a}_l\, \overline{\omega}^l_{i_1 \dots i_a} + \sum_{b=1}^{q} \partial_K Z^{I\alpha_1 \dots \alpha_b}_\beta\, \overline{\omega}^\beta_{\alpha_1 \dots \alpha_b} \Big) \times$$

$$\times\, \overset{L}{\underset{v}{D}}\, Z^K = B^I_k\, \overline{\omega}^k + B^I_\alpha\, \tilde{\Theta}^\alpha + B^I\, \Theta. \tag{III.61}$$

Из (III.27) и (III.28) следует, что

$$dZ^I_k - Z^I_l\,\overline{\omega}^l_k - Z^I_\beta\,\overline{\omega}^\beta_k + \sum_{a=1}^{p} Z^{Ii_1\ldots i_a}_l\,\overline{\omega}^l_{i_1\ldots i_a k} +$$

$$+ \sum_{b=1}^{q} Z^{I\alpha_1\ldots\alpha_b}_\beta\,\overline{\omega}^\beta_{\alpha_1\ldots\alpha_b k} + \Big(\sum_{a=1}^{p} \partial_K Z^{Ii_1\ldots i_a}_l\,\overline{\omega}^l_{i_1\ldots i_a} +$$

$$+ \sum_{b=1}^{q} \partial_K Z^{I\alpha_1\ldots\alpha_b}_\beta\,\overline{\omega}^\beta_{\alpha_1\ldots\alpha_b}\Big) Z^K_k = Z^I_{kl}\,\overline{\omega}^l + Z^I_{k\alpha}\,\overline{\Theta}^\alpha + \overset{L}{\underset{v}{D}}(Z^I_k)\,\Theta, \qquad \text{(III.62)}$$

$$dZ^I_\alpha - Z^I_\beta\,\overline{\omega}^\beta_\alpha + \sum_{a=1}^{q} Z^{I\alpha_1\ldots\alpha_b}_\beta\,\overline{\omega}^\beta_{\alpha_1\ldots\alpha_b\alpha} + \Big(\sum_{a=1}^{p} \partial_K Z^{Ii_1\ldots i_a}_l \times$$

$$\times\,\overline{\omega}^l_{i_1\ldots i_a} + \sum_{b=1}^{q} \partial_K Z^{I\alpha_1\ldots\alpha_b}_\beta\,\overline{\omega}^\beta_{\alpha_1\ldots\alpha_b}\Big) Z^K_\alpha = Z^I_{k\alpha}\,\overline{\omega}^k +$$

$$+ Z^I_{\alpha\beta}\,\overline{\Theta}^\beta + \overset{L}{\underset{v}{D}}(Z^I_\alpha)\,\Theta, \qquad \text{(III.63)}$$

где

$$\overset{L}{\underset{v}{D}}(Z^I_k) = Z^I_{kl}\,v^l + Z^I_l\,v^l_k + Z^I_{k\alpha}\,v^\alpha + Z^I_\beta\,v^\beta_k -$$

$$- \sum_{a=1}^{p}\Big(Z^{Ii_1\ldots i_a}_l\,v^l_{i_1\ldots i_a k} + \partial_K Z^{Ii_1\ldots i_a}_l\,Z^K_k\,v^l_{i_1\ldots i_a}\Big) -$$

$$- \sum_{b=1}^{q}\Big(Z^{I\alpha_1\ldots\alpha_b}_\beta\,v^\beta_{k\alpha_1\ldots\alpha_b} + \partial_K Z^{I\alpha_1\ldots\alpha_b}_\beta\,Z^K_k\,v^\beta_{\alpha_1\ldots\alpha_b}\Big), \qquad \text{(III.64)}$$

$$\overset{L}{\underset{v}{D}}(Z^I_\alpha) = Z^I_{k\alpha}\,v^k + Z^I_\beta\,v^\beta_\alpha + Z^I_{\beta\alpha}\,v^\beta - \sum_{a=1}^{p} \partial_K Z^{Ii_1\ldots i_a}_k\,Z^K_\alpha \times$$

$$\times\,v^k_{i_1\ldots i_a} - \sum_{b=1}^{q}\Big(Z^{I\alpha_1\ldots\alpha_b}_\beta\,v^\beta_{\alpha_1\ldots\alpha_b\alpha} + \partial_K Z^{I\alpha_1\ldots\alpha_b}_\beta\,Z^K_\alpha\,v^\beta_{\alpha_1\ldots\alpha_b}\Big). \qquad \text{(III.65)}$$

Сравнивая (III.59) и (III.62), а также (III.60) и (III.63), мы получим (левые части одинаковы):

$$\overline{Z}^I_{kl} = Z^I_{kl}, \quad \overline{Z}^I_{k\alpha} = Z^I_{k\alpha}, \quad \overline{Z}^I_{\alpha\beta} = Z^I_{\alpha\beta},$$

$$A^I_k = \overset{L}{\underset{v}{D}}\,Z^I_k, \quad A^I_\alpha = \overset{L}{\underset{v}{D}}\,Z^I_\alpha. \qquad \text{(III.66)}$$

Дифференцируя соотношения (III.50), мы получим

$$d(\overset{L}{\underset{v}{D}}\,Z^I) + \Big(\sum_{a=1}^{p} \partial_K Z^{Ii_1\ldots i_a}_l\,\omega^l_{i_1\ldots i_a} + \sum_{b=1}^{q} \partial_K Z^{I\alpha_1\ldots\alpha_b}_\beta\,\omega^\beta_{\alpha_1\ldots\alpha_b}\Big) \times$$

$$\times\,\overset{L}{\underset{v}{D}}\,Z^K = (\overset{L}{\underset{v}{D}}\,Z^I)_k\,\omega^k + (\overset{L}{\underset{v}{D}}\,Z^I)_\alpha\,\Theta^\alpha, \qquad \text{(III.67)}$$

где

$$(\overset{L}{\underset{v}{D}} Z^I)_k = Z^I_{kl}\, v^l + Z^I_l\, v^l_k + Z^I_{k\alpha}\, v^\alpha + Z^I_\beta\, v^\beta_k -$$

$$- \sum_{a=1}^{p} (Z_l^{I i_1 \dots i_a}\, v^l_{i_1 \dots i_a k} + \partial_K Z_l^{I i_1 \dots i_a}\, Z^K_k\, v^l_{i_1 \dots i_a}) -$$

$$- \sum_{b=1}^{q} (Z_\beta^{I \alpha_1 \dots \alpha_b}\, v^\beta_{k\alpha_1 \dots \alpha_b} + \partial_K Z_\beta^{I \alpha_1 \dots \alpha_b}\, Z^K_k\, v^\beta_{\alpha_1 \dots \alpha_b}), \qquad \text{(III.68)}$$

$$(\overset{L}{\underset{v}{D}} Z^I)_\alpha = Z^I_{k\alpha}\, v^k + Z^I_\beta\, v^\beta_\alpha + Z^I_{\beta\alpha}\, v^\beta - \sum_{a=1}^{p} \partial_K Z_l^{I i_1 \dots i_a}\, Z^K_\alpha \times$$

$$\times\, v^l_{i_1 \dots i_a} - \sum_{b=1}^{q} (Z_\beta^{I\alpha_1 \dots \alpha_b}\, v^\beta_{\alpha_1 \dots \alpha_b \alpha} + \partial_K Z_\beta^{I\alpha_1 \dots \alpha_b}\, Z^K_\alpha\, v^\beta_{\alpha_1 \dots \alpha_b}). \qquad \text{(III.69)}$$

Из (III.65), (III.66), (III.68) и (III.69) следует, что

$$\overset{L}{\underset{v}{D}} (Z^I_k) = (\overset{L}{\underset{v}{D}} Z^I)_k, \quad \overset{L}{\underset{v}{D}} (Z^I_\alpha) = (\overset{L}{\underset{v}{D}} Z^I)_\alpha.$$

Эти соотношения означают коммутативность операции неголономного дифференцирования Ли и операции продолжения системы дифференциальных уравнений поля расщепленного дифференциально-геометрического объекта в пространстве опорных элементов.

7. Имея систему дифференциальных уравнений (III.67), мы можем найти вторую неголономную производную Ли от объекта Z^I. Выполнив обычную замену форм, мы получим

$$d(\overset{L}{\underset{v}{D}} Z^I) + \Big(\sum_{a=1}^{p} \partial_K Z_l^{I i_1 \dots i_a}\, \overline{\omega}^l_{i_1 \dots i_a} + \sum_{b=1}^{q} \partial_K Z_\beta^{I\alpha_1 \dots \alpha_b} \times$$

$$\times\, \overline{\omega}^\beta_{\alpha_1 \dots \alpha_b} \Big) \overset{L}{\underset{v}{D}} Z^K = (\overset{L}{\underset{v}{D}} Z^I)_k\, \overline{\omega}^k + (\overset{L}{\underset{v}{D}} Z^I)_\alpha\, \overline{\Theta}^\alpha + \overset{L}{\underset{v}{D}}{}^2 Z^I\, \Theta, \qquad \text{(III.67')}$$

где

$$\overset{L}{\underset{v}{D}}{}^2 Z^I = (\overset{L}{\underset{v}{D}} Z^I)_k v^k + (\overset{L}{\underset{v}{D}} Z^I)_\alpha\, v^\alpha -$$

$$- \Big(\sum_{a=1}^{p} \partial_K Z_l^{I i_1 \dots i_a}\, v^l_{i_1 \dots i_a} + \sum_{b=1}^{q} \partial_K Z_\beta^{I\alpha_1 \dots \alpha_b}\, v^\beta_{\alpha_1 \dots \alpha_b} \Big) \overset{L}{\underset{v}{D}} Z^K. \qquad \text{(III.70)}$$

Сравнивая (III.61) и (III.67′), мы получим, что

$$B^I_k = (\overset{L}{\underset{v}{D}} Z^I)_k, \quad B^I_\alpha = (\overset{L}{\underset{v}{D}} Z^I)_\alpha, \quad B^I = \overset{L}{\underset{v}{D}}{}^2 Z^I. \qquad \text{(III.71)}$$

Таким образом мы получили правило для получения неголономных производных Ли высшего порядка. Для того, чтобы получить вторую неголономную производную Ли дифференциально-геометрического объекта Z^I, нужно продолжить преобразованную систему дифференциальных уравнений (III.47) относительно форм $\bar\omega^k$, $\bar\Theta^\alpha$ и Θ. Полученная система дифференциальных уравнений для $\underset{v}{\overset{L}{D}} Z^I$ характеризуется тем, что коэффициенты при $\bar\omega^k$ и $\bar\Theta^\alpha$ являются значениями неголономных производных Ли для один раз продолженного объекта, а коэффициент при Θ и является второй неголономной производной Ли. Желая получить явное выражение для второй неголономной производной Ли, мы должны в системе (III.61), учитывая (III.71), заменить новые формы старыми и в полученных уравнениях приравнять коэффициент при Θ нулю. Из полученных соотношений однозначно определяется $\underset{v}{\overset{L}{D^2}} Z^I$ и получается формула (III.70).

Продолжая систему (III.67), в силу соотношений (III.71), мы получим

$$d\big(\underset{v}{\overset{L}{D^2}} Z^I\big) + \Big(\sum_{a=1}^{p} \partial^2_{K_1K_2} Z_I^{Ii_1\dots i_a}\, \bar\omega^I_{i_1\dots i_a} + \sum_{b=1}^{q} \partial^2_{K_1K_2} Z_\beta^{I\alpha_1\dots\alpha_b} \times$$

$$\times\, \bar\omega^\beta_{\alpha_1\dots\alpha_b}\Big) \underset{v}{\overset{L}{D}} Z^{K_1}\, \underset{v}{\overset{L}{D}} Z^{K_2} + \Big(\sum_{a=1}^{p} \partial_K Z_I^{Ii_1\dots i_a}\, \bar\omega^I_{i_1\dots i_a} +$$

$$+ \sum_{b=1}^{q} \partial_K Z_\beta^{I\alpha_1\dots\alpha_b}\, \bar\omega^\beta_{\alpha_1\dots\alpha_b}\Big) \underset{v}{\overset{L}{D^2}} Z^K = \underset{v}{\overset{L}{D^2}} Z^I_k\, \bar\omega^k +$$

$$+ \underset{v}{\overset{L}{D^2}} Z^I_\alpha\, \bar\Theta^\alpha + \underset{v}{\overset{L}{D^3}} Z^I\, \Theta. \qquad \text{(III.72)}$$

Отсюда легко получается формула для вычисления $\underset{v}{\overset{L}{D^3}} Z^I$ через известные величины и предыдущие неголономные производные. Последовательное частичное продолжение системы (III.72) дает:

$$d\big(\underset{v}{\overset{L}{D^r}} Z^I\big) + r! \sum_{c=1}^{r} \frac{1}{c!} \sum_{(r_1+\dots+r_c=r)} \frac{1}{r_1!\cdots r_c!} \Big\{ \partial^c_{K_1\dots K_c} Z_I^{Ii_1\dots i_a}\, \bar\omega^I_{i_1\dots i_a} +$$

$$+ \sum_{b=1}^{q} \partial^c_{K_1\dots K_c} Z_\beta^{I\alpha_1\dots\alpha_b}\, \bar\omega^\beta_{\alpha_1\dots\alpha_b}\Big\} \underset{v}{\overset{L}{D^{r_1}}} Z^{K_1} \dots \underset{v}{\overset{L}{D^{r_c}}} Z^{K_c} =$$

$$= \underset{v}{\overset{L}{D^r}} Z^I_k\, \bar\omega^k + \underset{v}{\overset{L}{D^r}} Z^I_\alpha \bar\Theta^\alpha + \underset{v}{\overset{L}{D^{(r+1)}}} Z^I\, \Theta \qquad (r = 1,\ 2,\ 3,\ \dots). \qquad \text{(III.73)}$$

Выполнив соответствующие вычисления, мы получаем рекуррентную формулу для вычисления неголономных производных Ли высших порядков через предыдущие неголономные производные Ли:

$$\overset{L}{\underset{v}{D}}{}^{(r+1)} Z^I = \overset{L}{\underset{v}{D}}{}^{r} Z^I_k\, v^k + \overset{L}{\underset{v}{D}}{}^{r} Z^I_\alpha\, v^\alpha - r! \sum_{c=1}^{r} \frac{1}{c!} \times$$

$$\times \sum_{(r_1+\dots+r_c=r)} \frac{1}{r_1!\dots r_c!} \left\{ \sum_{a=1}^{p} \partial^c_{K_1\dots K_c} Z^{I i_1\dots i_a}_l\, v^l_{i_1\dots i_a} + \right.$$

$$\left. + \sum_{b=1}^{q} \partial^c_{K_1\dots K_c} Z^{I\alpha_1\dots\alpha_b}_\beta\, v^\beta_{\alpha_1\dots\alpha_b} \right\} \overset{L}{\underset{v}{D}}{}^{r_1} Z^{K_1} \dots \overset{L}{\underset{v}{D}}{}^{r_c} Z^{K_c}. \tag{III.74}$$

Из (III.73) следует, что в пространстве опорных элементов, в общем случае, система величин $\overset{L}{\underset{v}{D}}{}^{r} Z^I$ не образует самостоятельного дифференциально-геометрического объекта. Только для квазитензорного поля неголономная производная Ли любого порядка является обобщенным тензором, ибо в этом случае

$$Z^{I i_1\dots i_a}_k (Z) = H^{I i_1\dots i_a}_{kL} Z^L + H^{I i_1\dots i_a}_k,$$

$$Z^{I\alpha_1\dots\alpha_b}_\beta (Z) = H^{I\alpha_1\dots\alpha_b}_{\beta L} Z^L + H^{I\alpha_1\dots\alpha_b}_\beta$$

и дифференциальные уравнения (III.73) принимают вид

$$d\,(\overset{L}{\underset{v}{D}}{}^{r} Z^I) + \left(\sum_{a=1}^{p} H^{I i_1\dots i_a}_{lK}\, \bar\omega^l_{i_1\dots i_a} + \sum_{b=1}^{q} H^{I\alpha_1\dots\alpha_b}_{\beta K}\, \bar\omega^\beta_{\alpha_1\dots\alpha_b} \right) \times$$

$$\times \overset{L}{\underset{v}{D}}{}^{r} Z^K = \overset{L}{\underset{v}{D}}{}^{r} Z^I_k\, \bar\omega^k + \overset{L}{\underset{v}{D}}{}^{r} Z^I_\alpha\, \bar\Theta^\alpha + \overset{L}{\underset{v}{D}}{}^{(r+1)} Z^I\, \Theta. \tag{III.75}$$

Структура дифференциальных уравнений (III.23) и (III.73) показывает, что система величин

$$Z^I,\quad \overset{L}{\underset{v}{D}} Z^I,\quad \overset{L}{\underset{v}{D}}{}^{2} Z^I,\ \dots,\ \overset{L}{\underset{v}{D}}{}^{r} Z^I$$

образует дифференциально-геометрический объект того же двойного порядка, что и исходный.

§ 4. Вертикальные неголономные производные Ли

Если в пространстве опорных элементов $V^{(p)}_{n,N}$ определено векторное поле

$$dz^\alpha + z^\beta \omega^\alpha_\beta = z^\alpha_k\, \omega^k + z^\alpha_\beta\, \Theta^\beta,$$

то, продолжая эту систему дифференциальных уравнений, мы получим

$$dz^{\alpha}_{p_1\dots p_a}-\sum_{s=1}^{p}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\left\{\omega^{\beta}_{(p_1\dots p_s}z^{\alpha}_{p_{s+1}\dots p_a)\beta}+\omega^{k}_{(p_1\dots p_s}z^{\alpha}_{p_{s+1}\dots p_a)k}-\right.$$

$$\left.-z^{\beta}_{(p_1\dots p_s}\omega^{\alpha}_{p_{s+1}\dots p_a)\beta}\right\}+z^{\beta}\omega^{\alpha}_{p_1\dots p_s\beta}=z^{\alpha}_{p_1\dots p_a k}\omega^{k}+z^{\alpha}_{p_1\dots p_a\beta}\Theta^{\beta},$$

$$dz^{\alpha}_{\beta_1\dots\beta_a}-\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\left\{\omega^{\gamma}_{(\beta_1\dots\beta_s}z^{\alpha}_{\beta_{s+1}\dots\beta_a)\gamma}-z^{\gamma}_{(\beta_1\dots\beta_s}\omega^{\alpha}_{\beta_{s+1}\dots\beta_a)\gamma}\right\}+$$

$$+z^{\gamma}\omega^{\alpha}_{\beta_1\dots\beta_a\gamma}=z^{\alpha}_{k\beta_1\dots\beta_a}\omega^{k}+z^{\alpha}_{\beta_1\dots\beta_a\gamma}\Theta^{\gamma},$$

$$dz^{\alpha}_{p_1\dots p_a\beta_1\dots\beta_b}-\sum_{k=1}^{b}\frac{b!}{k!\,(b-k)!}\left\{\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\left[\omega^{\gamma}_{(p_1\dots p_s\beta_1\dots\beta_k}\times\right.\right.$$

$$\times z^{\alpha}_{p_{s+1}\dots p_a\beta_{k+1}\dots\beta_b)\gamma}-z^{\gamma}_{(p_1\dots p_s\beta_1\dots\beta_k}\omega^{\alpha}_{p_{s+1}\dots p_a\beta_{k+1}\dots\beta_b)\gamma}\times$$

$$\times\left.\omega^{t}_{(p_1\dots p_s\beta_1\dots\beta_k}z^{\alpha}_{p_{s+1}\dots p_a\beta_{k+1}\dots\beta_b)t}\right]+$$

$$\left.+\omega^{\gamma}_{(\beta_1\dots\beta_k}z^{\alpha}_{|p_1\dots p_a|\beta_{k+1}\dots\beta_b)\gamma}-z^{\gamma}_{(\beta_1\dots\beta_k}\omega^{\alpha}_{|p_1\dots p_a|\beta_{k+1}\dots\beta_b)\gamma}\right\}+$$

$$+\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\left\{\omega^{\gamma}_{(p_1\dots p_s}z^{\alpha}_{p_{s+1}\dots p_a)\beta_1\dots\beta_b\gamma}-z^{\gamma}_{(p_1\dots p_s}\omega^{\alpha}_{p_{s+1}\dots p_a)\beta_1\dots\beta_b}+\right.$$

$$\left.+\omega^{k}_{(p_1\dots p_s}z^{\alpha}_{p_{s+1}\dots p_a)k\beta_1\dots\beta_b}\right\}+z^{\gamma}\omega^{\alpha}_{p_1\dots p_a\beta_1\dots\beta_b\gamma}=$$

$$=z^{\alpha}_{p_1\dots p_a k\beta_1\dots\beta_b}\omega^{k}+z^{\alpha}_{p_1\dots p_a\beta_1\dots\beta_b\gamma}\Theta^{\gamma}.$$

Определим преобразование форм Θ^{α}:

$$\overset{\bullet}{\Theta}{}^{\alpha}=\Theta^{\alpha}-z^{\alpha}\Theta, \tag{III.76}$$

где $D\Theta=0$. Очевидно, что

$$D\overset{\bullet}{\Theta}{}^{\alpha}=[\overset{\bullet}{\Theta}{}^{\beta},\ \overset{\bullet}{\omega}{}^{\alpha}_{\beta}]+[\omega^{k},\ \overset{\bullet}{\omega}{}^{\alpha}_{k}], \tag{III.77}$$

где

$$\overset{\bullet}{\omega}{}^{\alpha}_{\beta}=\omega^{\alpha}_{\beta}-z^{\alpha}_{\beta}\Theta,\quad \overset{\bullet}{\omega}{}^{\alpha}_{k}=\omega^{\alpha}_{k}-z^{\alpha}_{k}\Theta.$$

Таким образом, при помощи вертикального векторного поля можно определить преобразование форм

$$\overset{\bullet}{\omega}{}^{\alpha}_{\beta_1\dots\beta_a}=\omega^{\alpha}_{\beta_1\dots\beta_a}-z^{\alpha}_{\beta_1\dots\beta_a}\Theta,$$

$$\overset{\bullet}{\omega}{}^{\alpha}_{k_1\dots k_a}=\omega^{\alpha}_{k_1\dots k_a}-z^{\alpha}_{k_1\dots k_a}\Theta, \tag{III.78}$$

$$\overset{\bullet}{\omega}{}^{\alpha}_{k_1\dots k_{a-b}\beta_{a-b+1}\dots\beta_a}=\omega^{\alpha}_{k_1\dots k_{a-b}\beta_{a-b+1}\dots\beta_a}-z^{\alpha}_{k_1\dots k_{a-b}\beta_{a-b+1}\dots\beta_a}\Theta,$$

причем новые формы имеют такую же структуру, как и старые. Неголономные производные Ли, получаемые при помощи вертикальных векторных полей, будем называть вертикальными производными Ли. Выполняя замену соответствующих форм в системах дифференциальных уравнений рассматриваемых объектов, мы получим ($\overset{L}{\underset{z}{{}^*D}}$ — символ вертикальной производной Ли):

$$dY^I + \sum_{a=1}^{p} Y_k^{I i_1 \ldots i_a} \overset{\bullet}{\omega}{}^k_{i_1 \ldots i_a} = Y_k^I \omega^k + Y_\alpha^I \overset{\bullet}{\Theta}{}^\alpha + {}^*\overset{L}{\underset{z}{D}} Y^I \Theta, \tag{III.79}$$

$$dZ^I + \sum_{a=1}^{p} Z_k^{I i_1 \ldots i_a} \overset{\bullet}{\omega}{}^k_{i_1 \ldots i_a} + \sum_{b=1}^{q} Z_\beta^{I \alpha_1 \ldots \alpha_b} \overset{\bullet}{\omega}{}^\beta_{\alpha_1 \ldots \alpha_b} =$$

$$= Z_k^I \omega^k + Z_\alpha^I \overset{\bullet}{\Theta}{}^\alpha + {}^*\overset{L}{\underset{z}{D}} Z^I \Theta, \tag{III.80}$$

$$dU^I + \sum_{b=1}^{q} U_\beta^{I \alpha_1 \ldots \alpha_b} \overset{\bullet}{\omega}{}^\beta_{\alpha_1 \ldots \alpha_b} = U_k^I \omega^k + U_\alpha^I \overset{\bullet}{\Theta}{}^\alpha + {}^*\overset{L}{\underset{z}{D}} U^I \Theta, \tag{III.81}$$

где

$$^*\overset{L}{\underset{z}{D}} Y^I = Y_\alpha^I z^\alpha,$$

$$^*\overset{L}{\underset{z}{D}} Z^I = Z_\alpha^I z^\alpha - \sum_{a=1}^{q} Z_\beta^{I\alpha_1 \ldots \alpha_b} z^\beta_{\alpha_1 \ldots \alpha_b},$$

$$^*\overset{L}{\underset{z}{D}} U^I = U_\alpha^I z^\alpha - \sum_{a=1}^{q} U_\beta^{I\alpha_1 \ldots \alpha_b} z^\beta_{\alpha_1 \ldots \alpha_b}.$$

Для этих вертикальных производных Ли справедливы свойства, аналогичные свойствам 2—5. Неголономные вертикальные производные Ли высшего порядка образуются по таким же правилам, как и неголономные производные Ли. Так как $\Theta^\alpha = \delta_k^\alpha \omega^k + \delta_\beta^\alpha \Theta^\beta$, то вертикальная неголономная производная Ли опорного объекта имеет вид

$$^*\overset{L}{\underset{z}{D}} y^\alpha = z^\alpha. \tag{III.82}$$

Система дифференциальных уравнений вертикального векторного поля инвариантна относительно рассматриваемой замены форм, т. е.

$$^*\overset{L}{\underset{z}{D}} z^\alpha = 0,$$

и отсюда, в силу предыдущего равенства, следует, что вторая неголономная вертикальная производная Ли от опорного объекта всегда равна нулю:

$$^*\overset{L}{\underset{z}{D^2}} y^\alpha = 0. \tag{III.83}$$

§ 5. Первая и вторая вариации интеграла

Пусть мы имеем интеграл

$$\mathrm{I} = \underbrace{\int \cdots \int}_{m} F(x^i, y^\alpha, x^i_{\hat{a}}, \ldots, x^i_{\hat{a}_1 \ldots \hat{a}_m}) \, [dt^1 \ldots dt^m], \tag{III.84}$$

который распространен по m-мерной поверхности

$$x^i = \varphi^i(t^{\hat{\alpha}}) \tag{III.85}$$

базисного пространства V_n и содержит частные производные

$$x^i_{\hat{\alpha}_1 \ldots \hat{\alpha}_a} = \frac{\partial^a x^i}{\partial t^{\hat{\alpha}_1} \ldots \partial t^{\hat{\alpha}_a}}, \quad a = 1, 2, \ldots, m.$$

Предположим, что пространство переменных $(x^i, x^i_{\hat{\alpha}_1}, \ldots, x^i_{\hat{\alpha}_1 \ldots \alpha_m})$ подвергается преобразованиям группы $G^{(m)}$, а пространство параметров $t^{\hat{\alpha}}$ — группе $\Gamma^{(m)}$, определенной инвариантными формами

$$\vartheta^{\hat{\alpha}}, \ \vartheta^{\hat{\alpha}}_{\hat{\alpha}_1}, \ \ldots, \ \vartheta^{\hat{\alpha}}_{\hat{\alpha}_1 \ldots \hat{\alpha}_m}.$$

Структура этих пфаффовых форм такая же, как и форм $\omega^i, \omega^i_{j_1}, \ldots, \omega^i_{j_1 \ldots j_m}$. Дифференциальные уравнения поверхности (III.85) имеют вид

$$\omega^i = \lambda^i_{\hat{\alpha}} \vartheta^{\hat{\alpha}}. \tag{III.86}$$

Интеграл (III.84) можно привести к инвариантной форме

$$\mathrm{I} = \int \cdots \int F[\vartheta^1 \ldots \vartheta^m]. \tag{III.84'}$$

Последовательные продолжения системы дифференциальных уравнений поверхности (III.86) дают

$$\vartheta^i_{\hat{\alpha}} \equiv d\lambda^i_{\hat{\alpha}_1} + \lambda^k_{\hat{\alpha}_1} \omega^i_k - \lambda^i_{\hat{\beta}} \vartheta^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}_1} = \lambda^i_{\hat{\alpha}_1 \hat{\beta}} \vartheta^{\hat{\beta}},$$

$$\begin{aligned} \vartheta^i_{\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2} \equiv d\lambda^k_{\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2} + \lambda^k_{\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2} \omega^i_k - 2\lambda^i_{\hat{\beta}(\hat{\alpha}_2} \vartheta^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}_1)} - \lambda^i_{\hat{\beta}} \vartheta^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2} + \\ + \lambda^k_{\hat{\alpha}_1} \lambda^l_{\hat{\alpha}_2} \omega^i_{kl} = \lambda^i_{\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \hat{\beta}} \vartheta^{\beta}, \end{aligned} \tag{III.87}$$

$$\cdot \quad \cdot$$

$$\begin{aligned} \vartheta^i_{\hat{\alpha}_1 \ldots \hat{\alpha}_a} \equiv d\lambda^i_{\hat{\alpha}_1 \ldots \hat{\alpha}_a} + \\ + \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!} \omega^i_{k_1 \ldots k_s} \sum_{(j_1 + \cdots + j_s = a)} \frac{1}{j_1! \cdots j_s!} \lambda^{k_1}_{(\hat{\alpha}_1 \ldots \hat{\alpha}_{j_1}} \cdots \lambda^{k_s}_{\hat{\alpha}_{j_1 + \cdots + j_{s-1} + 1} \ldots \hat{\alpha}_a)} - \\ - \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!(a-s)!} \vartheta^{\beta}_{(\hat{\alpha}_1 \ldots \hat{\alpha}_s} \lambda^i_{\hat{\alpha}_{s+1} \ldots \hat{\alpha}_a) \hat{\beta}} = \lambda^i_{\hat{\alpha}_1 \ldots \hat{\alpha}_a \hat{\beta}} \vartheta^{\beta}, \\ \lambda^k_{[\hat{\alpha}_1 \ldots \hat{\alpha}_a \gamma]} = 0. \end{aligned}$$

Система форм

$$\omega^i, \quad \Theta^\alpha, \quad \vartheta^{\hat{\alpha}}, \quad \vartheta^i_{\hat{\alpha}_1}, \ \ldots, \ \vartheta^i_{\hat{\alpha}_1 \ldots \hat{\alpha}_m}$$

вполне интегрируема и определяет пространство представления

$$(x^i, \quad y^\alpha, \quad t^\alpha, \quad x^i_{\hat{\alpha}_1}, \ \ldots, \ x^i_{\hat{\alpha}_1 \ldots \hat{\alpha}_m})$$

подгруппы прямого произведения групп $G^{(m)}$ и $\Gamma^{(m)}$. Система форм

$$\omega^i, \quad \Theta^\alpha, \quad \vartheta^{\hat{\alpha}}, \quad \vartheta^i_{\hat{\alpha}_1}, \ \ldots, \ \vartheta^i_{\hat{\alpha}_1 \ldots \hat{\alpha}_m}, \quad dF - F\vartheta^{\hat{\alpha}}_{\hat{\alpha}}$$

также вполне интегрируема и определяет пространство представления

$$(x^i,\ y^\alpha,\ t^{\hat\alpha},\ x^i_{\hat\alpha_1},\ \ldots,\ x^i_{\hat\alpha_1\ldots\hat\alpha_m},\ F).$$

Следует заметить, что система форм

$$\omega^i,\ \vartheta^{\hat\alpha},\ \vartheta^i_{\hat\alpha_1},\ \ldots,\ \vartheta^i_{\hat\alpha_1\ldots\alpha_p}$$

тоже вполне интегрируема, первые интегралы ее определяют локальные координаты пространства поверхностных элементов высшего порядка $K^{(p)}_{n,m}$. Если функция F известна, то при помощи этой функции можно в пространстве переменных построить гиперповерхность, дифференциальное уравнение которой имеет вид:

$$dF - F\vartheta^{\hat\alpha}_{\hat\alpha} = F_k\,\omega^k + F_\alpha\,\Theta^\alpha + F_{\hat\alpha}\,\vartheta^{\hat\alpha} + \sum_{a=1}^{m} F_k^{\hat\alpha_1\ldots\hat\alpha_a}\,\vartheta^k_{\hat\alpha_1\ldots\hat\alpha_a}. \qquad (\text{III}.88)$$

Дифференцируя внешним образом равенства

$$\vartheta^i_{\hat\alpha_1\ldots\hat\alpha_a} = d\lambda^i_{\hat\alpha_1\ldots\hat\alpha_a} +$$
$$+\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!}\,\omega^i_{k_1\ldots k_s}\sum_{(j_1+\cdots+j_s=a)}\frac{1}{j_1!\cdots j_s!}\,\lambda^{k_1}_{(\hat\alpha_1\ldots\hat\alpha_{j_1}}\cdots\lambda^{k_s}_{\hat\alpha_{j_1+\cdots+j_{s-1}+1}\ldots\hat\alpha_a)} -$$
$$-\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\,\vartheta^{\hat\beta}_{(\hat\alpha_1\ldots\hat\alpha_s}\,\lambda^i_{\hat\alpha_{s+1}\ldots\hat\alpha_a)\hat\beta},$$

мы получим

$$D\vartheta^i_{\hat\alpha_1\ldots\hat\alpha_a} = [\omega^l,\ \vartheta^i_{\hat\alpha_1\ldots\hat\alpha_a,l}] + [\vartheta^{\hat\gamma},\ \vartheta^i_{\hat\alpha_1\ldots\hat\alpha_a,\hat\gamma}] +$$
$$+\sum_{c=1}^{a}[\vartheta^k_{\hat\beta_1\ldots\hat\beta_c},\ \vartheta^{i\hat\beta_1\ldots\hat\beta_c}_{\hat\alpha_1\ldots\hat\alpha_a,k}], \qquad (\text{III}.89)$$

где

$$\vartheta^i_{\hat\alpha_1\ldots\hat\alpha_a,l} = \sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!}\,\omega^i_{k_1\ldots k_s l}\sum_{(j_1+\cdots+j_s=a)}\frac{1}{j_1!\cdots j_s!}\,\lambda^{k_1}_{(\hat\alpha_1\ldots\hat\alpha_{j_1}}\cdots\lambda^{k_s}_{\hat\alpha_{j_1+\cdots+j_{s-1}+1}\ldots\hat\alpha_a)},$$

$$\vartheta^i_{\hat\alpha_1\ldots\hat\alpha_a,\hat\gamma} = -\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\,\vartheta^{\hat\beta}_{(\hat\alpha_1\ldots\hat\alpha_s,\hat\gamma}\,\lambda^i_{\hat\alpha_{s+1}\ldots\hat\alpha_a)\hat\beta},$$

$$\vartheta^{i\hat\beta_1\ldots\hat\beta_c}_{\hat\alpha_1\ldots\hat\alpha_a,k} = \sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!}\,\omega^i_{k_1\ldots k_s}\sum_{(j_1+\cdots+j_s=a)}\Big(\delta^{k_1}_k\,\delta^{\hat\beta_1\ldots\hat\beta_c}_{(\hat\alpha_1\ldots\hat\alpha_{j_1}}\cdots\lambda^{k_s}_{\hat\alpha_{j_1+\cdots+j_{s-1}+1}\ldots\hat\alpha_a)} +$$
$$+\cdots+\lambda^{k_1}_{(\hat\alpha_1\ldots\hat\alpha_{j_1}}\cdots\delta^{k_s}_{|k|}\,\delta^{\hat\beta_1\ldots\hat\beta_c}_{\hat\alpha_{j_1+\cdots+j_{s-1}+1}\ldots\hat\alpha_a)}\Big) -$$
$$-\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\,\delta^i_k\,\vartheta^{\hat\beta}_{(\hat\alpha_1\ldots\hat\alpha_s}\,\delta^{\hat\beta_1\ldots\hat\beta_c}_{\hat\alpha_{s+1}\ldots\hat\alpha_a)\hat\beta}$$

и

$$\delta^{\hat\beta_1\ldots\hat\beta_c}_{\hat\alpha_1\ldots\hat\alpha_a} = \begin{cases}\delta^{\hat\beta_1}_{\hat\alpha_1}\cdots\delta^{\hat\beta_a}_{\hat\alpha_a} & \text{при}\quad c=a,\\ 0 & \text{при}\quad c\neq a.\end{cases}$$

Продолжение системы (III.88) дает:

$$\nabla F_k - F_k \vartheta^{\hat\varphi}_{\varphi} - F_\beta \omega^\beta_k - \sum_{a=1}^{m} F_l^{\hat\alpha_1 \ldots \hat\alpha_a} \vartheta^l_{\hat\alpha_1 \ldots \hat\alpha_a} =$$

$$= F_{lk}\,\omega^l + F_{\alpha k}\,\Theta^\alpha + F_{\hat\alpha k}\,\vartheta^{\hat\alpha} + \sum_{a=1}^{m} F_{lk}^{\hat\alpha_1 \ldots \hat\alpha_a} \vartheta^l_{\hat\alpha_1 \ldots \hat\alpha_a}, \qquad \text{(III.90)}$$

$$\nabla F_\alpha - F_\alpha \vartheta^{\hat\varphi}_{\varphi} = F_{\alpha k}\,\omega^k + F_{\beta\alpha}\,\Theta^\beta + F_{\hat\alpha\alpha}\,\vartheta^{\hat\alpha} + \sum_{a=1}^{m} F_{k\alpha}^{\hat\beta_1 \ldots \hat\beta_a} \vartheta^k_{\hat\beta_1 \ldots \hat\beta_a}, \qquad \text{(III.91)}$$

$$\nabla F_{\hat\alpha} - F_{\hat\alpha} \vartheta^{\hat\varphi}_{\varphi} - F \vartheta^{\varphi}_{\hat\alpha\varphi} - \sum_{a=1}^{m} F_l^{\hat\beta_1 \ldots \hat\beta_a} \vartheta^l_{\hat\beta_1 \ldots \hat\beta_a, \hat\alpha} =$$

$$= F_{\hat\alpha k}\,\omega^k + F_{\hat\alpha\beta}\,\Theta^\beta + F_{\hat\beta\hat\alpha}\,\vartheta^{\hat\beta} + \sum_{a=1}^{m} F_{k\hat\alpha}^{\hat\beta_1 \ldots \hat\beta_a} \vartheta^k_{\hat\beta_1 \ldots \hat\beta_a}, \qquad \text{(III.92)}$$

$$dF_k^{\hat\alpha_1 \ldots \hat\alpha_c} - F_k^{\hat\alpha_1 \ldots \hat\alpha_c} \vartheta^{\hat\varphi}_{\varphi} - \sum_{a=c}^{m} F_l^{\hat\beta_1 \ldots \hat\beta_a} \vartheta^{l\hat\alpha_1 \ldots \hat\alpha_c}_{\hat\beta_1 \ldots \hat\beta_a, k} =$$

$$= F_{kl}^{\hat\alpha_1 \ldots \hat\alpha_c}\,\omega^l + F_{k\alpha}^{\hat\alpha_1 \ldots \hat\alpha_c}\,\Theta^\alpha + F_{k\hat\alpha}^{\hat\alpha_1 \ldots \hat\alpha_c}\,\vartheta^{\hat\alpha} +$$

$$+ \sum_{a=1}^{m} F_{lk}^{\hat\alpha_1 \ldots \hat\alpha_c \hat\beta_1 \ldots \hat\beta_a} \vartheta^l_{\hat\beta_1 \ldots \hat\beta_c}, \qquad \text{(III.93)}$$

где

$$F_{lk} = F_{kl}, \quad F_{\alpha\beta} = F_{\beta\alpha}, \quad F_{\hat\alpha\hat\beta} = F_{\hat\beta\hat\alpha}, \quad F_{lk}^{\hat\alpha_1 \ldots \hat\alpha_c \hat\beta_1 \ldots \hat\beta_a} = F_{kl}^{\hat\beta_1 \ldots \hat\beta_a \hat\alpha_1 \ldots \hat\alpha_c}.$$

Величины F_α образуют ковектор. Если $F_\alpha = 0$, то рассматриваемый интеграл не зависит от компонент опорного объекта y^α. В этом случае при $m=2$ уравнения (III.90) – (III.98) были получены Л. Е. Евтушиком [6].

Условия независимости рассматриваемого интеграла от параметрического представления имеют вид:

$$F_{\hat\alpha} = 0,$$

$$F\vartheta^{\varphi}_{\hat\theta\varphi} - \sum_{s=1}^{m} \sum_{a=s}^{m} \frac{a!}{s!\,(a-s)!} F_k^{\hat\beta_1 \ldots \hat\beta_a} \vartheta^{\hat\beta}_{\hat\theta(\hat\beta_1 \ldots \hat\beta_s} \lambda^i_{\hat\beta_{s+1} \ldots \hat\beta_a)\hat\beta} = 0.$$

Так как формы $\vartheta^{\hat\beta}_{\hat\alpha_1 \ldots \hat\alpha_a}$ – линейно независимы, то эти условия принимают вид:

$$F_{\hat\alpha} = 0,$$

$$\sum_{a=1}^{m} a F_l^{\hat\alpha_1 \hat\alpha_2 \ldots \hat\alpha_a} \lambda^l_{\hat\alpha_2 \ldots \hat\alpha_a \hat\beta} = \delta^{\hat\alpha_1}_{\hat\beta} F,$$

$$\sum_{a=s}^{m} \frac{a!}{s!\,(a-s)!} F_l^{\hat\alpha_1 \ldots \hat\alpha_s \hat\alpha_{s+1} \ldots \hat\alpha_a} \lambda^l_{\hat\alpha_{s+1} \ldots \hat\alpha_a \hat\beta} = 0, \qquad s = 2, 3, \ldots, m. \qquad \text{(III.94)}$$

Эти условия в голономном репере при $m=1$ впервые получил Цермело и при любом m – А. Кавагути, а в неголономном репере при $m=2$ – Л. Е. Евтушик [6].

К любому преобразованию (I.58) и (I.58а) форм ω^i, $\omega^i_{j_1 \ldots j_a}$ однозначно присоединяется преобразование форм $\vartheta^i_{\hat{\alpha}_1 \ldots \hat{\alpha}_a}$:

$$\bar{\vartheta}^i_{\hat{\alpha}_1 \ldots \hat{\alpha}_a} = \vartheta^i_{\hat{\alpha}_1 \ldots \hat{\alpha}_a} - \Lambda^i_{\hat{\alpha}_1 \ldots \hat{\alpha}_a} \Theta, \tag{III.95}$$

где

$$\Lambda^i_{\hat{\alpha}_1 \ldots \hat{\alpha}_a} = \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!} v^i_{k_1 \ldots k_s} \sum_{(j_1+\cdots+j_s=a)} \frac{1}{j_1! \cdots j_s!} \lambda^{k_1}_{(\hat{\alpha}_1 \ldots \hat{\alpha}_{j_1}} \cdots \lambda^{k_s}_{\hat{\alpha}_{j_1+\cdots+j_{s-1}+1} \ldots \hat{\alpha}_a)}. \tag{III.96}$$

Первая неголономная производная Ли для функции F имеет вид (при $F_{\hat{\alpha}} = 0$):

$$\overset{L}{\underset{v}{D}} F = F_i v^i + F_\alpha v^\alpha + \sum_{a=1}^{m} F_k^{\hat{\alpha}_1 \ldots \hat{\alpha}_a} \lambda^k_{\hat{\alpha}_1 \ldots \hat{\alpha}_a} \tag{III.97}$$

и первая вариация интеграла (III.84) принимает форму

$$\delta \mathrm{I} = \int \cdots \int \left(F_i v^i + F_\alpha v^\alpha + \sum_{a=1}^{m} F_k^{\hat{\alpha}_1 \ldots \hat{\alpha}_a} \Lambda^k_{\hat{\alpha}_1 \ldots \hat{\alpha}_a} \right) [\vartheta^1 \cdots \vartheta^m]. \tag{III.98}$$

Неголономные производные Ли для величин F_k, F_α и $F_k^{\hat{\alpha}_1 \ldots \hat{\alpha}_a}$, как это следует из (III.90) – (III.93), имеют вид

$$\overset{L}{\underset{v}{D}} F_k = F_{lk} v^l + F_{\alpha k} v^\alpha + \sum_{a=1}^{m} F_{lk}^{\hat{\alpha}_1 \ldots \hat{\alpha}_a} \Lambda^l_{\hat{\alpha}_1 \ldots \hat{\alpha}_a} +$$

$$+ F_l v^l_k + F_\beta v^\beta_k + \sum_{a=1}^{m} F_l^{\hat{\alpha}_1 \ldots \hat{\alpha}_a} \Lambda^l_{\hat{\alpha}_1 \ldots \hat{\alpha}_a, k}, \tag{III.99}$$

$$\overset{L}{\underset{v}{D}} F_\alpha = F_{\alpha k} v^k + F_{\beta\alpha} v^\beta + \sum_{a=1}^{m} F_{k\alpha}^{\hat{\beta}_1 \ldots \hat{\beta}_a} \Lambda^k_{\hat{\beta}_1 \ldots \hat{\beta}_a} + F_\beta v^\beta_\alpha, \tag{III.100}$$

$$\overset{L}{\underset{v}{D}} F_k^{\hat{\alpha}_1 \ldots \hat{\alpha}_c} = F_{kl}^{\hat{\alpha}_1 \ldots \hat{\alpha}_c} v^l + F_{k\alpha}^{\hat{\alpha}_1 \ldots \hat{\alpha}_c} v^\alpha +$$

$$+ F_{kl}^{\hat{\alpha}_1 \ldots \hat{\alpha}_c \hat{\beta}_1 \ldots \hat{\beta}_a} \Lambda^l_{\hat{\beta}_1 \ldots \hat{\beta}_a} - \sum_{a=c}^{m} F_l^{\hat{\beta}_1 \ldots \hat{\beta}_a} \Lambda^{l \hat{\alpha}_1 \ldots \hat{\alpha}_c}_{\hat{\beta}_1 \ldots \hat{\beta}_a, k}, \tag{III.101}$$

где

$$\Lambda^i_{\hat{\alpha}_1 \ldots \hat{\alpha}_a, l} = \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!} v^i_{k_1 \ldots k_s l} \sum_{(j_1+\cdots+j_s=a)} \frac{1}{j_1! \cdots j_s!} \lambda^{k_1}_{(\hat{\alpha}_1 \ldots \hat{\alpha}_{j_1}} \cdots \lambda^{k_s}_{\hat{\alpha}_{j_1+\cdots+j_{s-1}+1} \ldots \hat{\alpha}_a)},$$

$$\Lambda^{i \hat{\beta}_1 \ldots \hat{\beta}_c}_{\hat{\alpha}_1 \ldots \hat{\alpha}_a, k} =$$

$$= \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!} v^i_{k_1 \ldots k_s} \sum_{(j_1+\cdots+j_s=a)} \frac{1}{j_1! \cdots j_s!} \left(\delta^{k_1}_k \delta^{\hat{\beta}_1 \ldots \hat{\beta}_c}_{(\hat{\alpha}_1 \ldots \hat{\alpha}_{j_1}} \cdots \lambda^{k_s}_{\hat{\alpha}_{j_1+\cdots+j_{s-1}+1} \ldots \hat{\alpha}_a)} + \right.$$

$$\left. + \cdots + \lambda^{k_1}_{(\hat{\alpha}_1 \ldots \hat{\alpha}_{j_1}} \cdots \delta^{k_s}_{|k|} \delta^{\hat{\beta}_1 \ldots \hat{\beta}_c}_{\hat{\alpha}_{j_1+\cdots+j_{s-1}+1} \ldots \hat{\alpha}_a)} \right).$$

Тогда вторая вариация интеграла (III.84) принимает следующий вид:

$$\delta^2 \mathrm{I} = \int \cdots \int \left(\overset{L}{\underset{v}{D}} F_i v^i + \overset{L}{\underset{v}{D}} F_\alpha v^\alpha + \sum_{a=1}^{m} \overset{L}{\underset{v}{D}} F_k^{\hat{\alpha}_1 \ldots \hat{\alpha}_a} \Lambda^k_{\hat{\alpha}_1 \ldots \hat{\alpha}_a} \right) [\vartheta^1 \cdots \vartheta^m]. \tag{III.102}$$

Эта формула была получена Л. Е. Евтушиком при $F_\alpha = 0$ и $m = 2$ [6].

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

О СВЯЗНОСТЯХ ПРОСТРАНСТВА ОПОРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

§ 1. Линейные связности

Если в пространстве опорных элементов задан некоторый дифференциально-геометрический объект, то при помощи этого объекта можно развить геометрию как теорию инвариантов и инвариантных операций, присоединенных к этому объекту и инвариантных относительно преобразований, определенных системой $\overset{\bullet}{\omega}{}^i=\omega^i$, $\overset{\bullet}{\Theta}{}^\alpha=\Theta^\alpha$. Мы рассмотрим некоторые вопросы таких геометрий, соответствующих объекту линейной дифференциально-геометрической связности и объектам других связностей.

1. *Объект линейной дифференциально-геометрической связности в* $V^{(p)}_{n,N}$. Если $T^*_{n+N}(x, y)$ касательное дуальное векторное пространство пространства $V^{(p)}_{n,N}$, подвижный корепер которого составлен из форм ω^i и Θ^α, то оснащение пространства $T^*_{n+N}(x, y)$ можно определить при помощи форм

$$\tilde{\Theta}^\alpha=\Theta^\alpha+\Gamma^\alpha_k\omega^k, \tag{IV.1}$$

причем величины Γ^α_k должны образовать дифференциально-геометрический объект следующей структуры:

$$d\Gamma^\alpha_k-\Gamma^\alpha_l\omega^l_k+\Gamma^\beta_k\omega^\alpha_\beta-\omega^\alpha_k=\Gamma^\alpha_{lk}\omega^l+\Gamma^\alpha_{\beta k}\Theta^\beta. \tag{IV.2}$$

Этот объект называется объектом линейной дифференциально-геометрической связности пространства $V^{(p)}_{n,N}$. В работе [5] приведен конечный закон преобразования компонент объекта Γ^α_k.

Последовательное продолжение уравнений (IV.2) дает $(a+b=c)$:

$$\begin{gathered}
d\Gamma^\alpha_{kp_1\ldots p_c}-\sum_{s=1}^{c}\frac{c!}{s!\,(c-s)!}\left\{\omega^l_{(p_1\ldots p_s}\Gamma^\alpha_{|k|p_{s+1}\ldots p_c)l}+\omega^\beta_{(p_1\ldots p_s}\Gamma^\alpha_{|\beta k|p_{s+1}\ldots p_c)}-\right.\\
\left.-\Gamma^\beta_{k(p_1\ldots p_s}\omega^\alpha_{|\beta|p_{s+1}\ldots p_c)}\right\}-\Gamma^\alpha_{lp_1\ldots p_c}\omega^l_k-\Gamma^\gamma_k\omega^\alpha_{\gamma p_1\ldots p_c}-\omega^\alpha_{kp_1\ldots p_c}=\\
=\Gamma^\alpha_{lkp_1\ldots p_c}\omega^l+\Gamma^\alpha_{\beta kp_1\ldots p_c}\Theta^\beta,
\end{gathered} \tag{IV.3}$$

$$\begin{gathered}
d\Gamma^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_b kp_1\ldots p_a}-\sum_{t=1}^{b}\frac{b!}{t!\,(b-t)!}\left\{\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\left(\Gamma^\gamma_{(\beta_1\ldots\beta_t|k|p_1\ldots p_s}\times\right.\right.\\
\left.\times\,\omega^\alpha_{|\gamma|\beta_{t+1}\ldots\beta_b p_{s+1}\ldots p_a)}-\omega^\gamma_{(\beta_1\ldots\beta_t p_1\ldots p_s}\Gamma^\alpha_{|\gamma|\beta_{t+1}\ldots\beta_b|k|p_{s+1}\ldots p_a)}\right)+\\
\left.+\Gamma^\gamma_{(\beta_1\ldots\beta_t|k|}\omega^\alpha_{|\gamma|\beta_{t+1}\ldots\beta_b)p_1\ldots p_a}-\omega^\gamma_{(\beta_1\ldots\beta_t}\Gamma^\alpha_{|\gamma|\beta_{t+1}\ldots\beta_b)kp_1\ldots p_a}\right\}-\\
-\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\left\{\Gamma^\gamma_{(p_1\ldots p_s|k|}\omega^\alpha_{|\gamma\beta_1\ldots\beta_b|p_{s+1}\ldots p_a)}-\omega^\gamma_{(p_1\ldots p_s}\Gamma^\alpha_{|\gamma\beta_1\ldots\beta_b k|p_{s+1}\ldots p_a)}+\right.\\
\left.+\Gamma^\gamma_{\beta_1\ldots\beta_b k(p_1\ldots p_s}\omega^\alpha_{|\gamma|p_{s+1}\ldots p_a)}-\omega^\gamma_{\beta_1\ldots\beta_b(p_1\ldots p_s}\Gamma^\alpha_{|\gamma k|p_{s+1}\ldots p_a)}\right\}-\\
-\Gamma^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_b lp_1\ldots p_a}\omega^l_k+\Gamma^\gamma_k\omega^\alpha_{\gamma\beta_1\ldots\beta_b p_1\ldots p_a}-\omega^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_b kp_1\ldots p_a}=\\
=\Gamma^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_b lkp_1\ldots p_a}\omega^l+\Gamma^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_b\gamma kp_1\ldots p_a}\Theta^\gamma
\end{gathered} \tag{IV.4}$$

и

$$d\Gamma^{\alpha}_{\beta_1\dots\beta_c k}-\sum_{s=1}^{c}\frac{c!}{s!\,(c-s)!}\left\{\Gamma^{\gamma}_{(\beta_1\dots\beta_s\;k\,|}\,\omega^{\alpha}_{|\gamma|\,\beta_{s+1}\dots\beta_c)}-\omega^{\gamma}_{(\beta_1\dots\beta_s}\,\Gamma^{\alpha}_{|\gamma|\,\beta_{s+1}\dots\beta_c)\,k}\right\}+$$
$$+\Gamma^{\gamma}_{k}\,\omega^{\alpha}_{\beta_1\dots\beta_c\gamma}-\Gamma^{\alpha}_{\beta_1\dots\beta_c l}\,\omega^{l}_{k}-\omega^{\alpha}_{\beta_1\dots\beta_c k}=\Gamma^{\alpha}_{\beta_1\dots\beta_c lk}\,\omega^{l}+\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta_1\dots\beta_c k}\,\Theta^{\gamma}. \qquad \text{(IV.5)}$$

Дифференциальные уравнения (IV.2) и (IV.3) можно переписать в виде:

$$d\Gamma^{\alpha}_{k}-\Gamma^{\alpha}_{s}\,\omega^{s}_{k}+\Gamma^{\beta}_{k}\,\omega^{\alpha}_{\beta}-\omega^{\alpha}_{k}=G^{\alpha}_{lk}\,\omega^{l}+\Gamma^{\alpha}_{\beta k}\,\tilde{\Theta}^{\beta} \qquad \text{(IV.2')}$$

и

$$d\Gamma^{\alpha}_{kp_1\dots p_c}-\sum_{s=1}^{c}\frac{c!}{s!\,(c-s)!}\left\{\omega^{l}_{(p_1\dots p_s}\,\Gamma^{\alpha}_{|k\;p_{s+1}\dots p_c)\,l}+\omega^{\beta}_{(p_1\dots p_s}\,\Gamma^{\alpha}_{|\beta k|\,p_{s+1}\dots p_a)}-\right.$$
$$\left.-\Gamma^{\beta}_{k\,(p_1\dots p_s}\,\omega^{\alpha}_{|\beta|\,p_{s+1}\dots p_a)}\right\}-\Gamma^{\alpha}_{lp_1\dots p_c}\,\omega^{l}_{k}-\Gamma^{\gamma}_{k}\,\omega^{\alpha}_{\gamma p_1\dots p_c}-\omega^{\alpha}_{kp_1\dots p_c}=$$
$$=G^{\alpha}_{klp_1\dots p_c}\,\omega^{l}+\Gamma^{\alpha}_{\beta kp_1\dots p_c}\,\tilde{\Theta}^{\beta}, \qquad \text{(IV.3')}$$

где

$$G^{\alpha}_{lkp_1\dots p_c}=\Gamma^{\alpha}_{lkp_1\dots p_c}-\Gamma^{\alpha}_{\beta kp_1\dots p_c}\,\Gamma^{\beta}_{l}. \qquad \text{(IV.6)}$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (IV.1), мы получим

$$D\tilde{\Theta}^{\alpha}-[\tilde{\Theta}^{\beta},\ \omega^{\alpha}_{\beta}+\Gamma^{\alpha}_{\beta k}\,\omega^{k}]=\frac{1}{2}\,R^{\alpha}_{pq}\,[\omega^{p},\ \omega^{q}], \qquad \text{(IV.7)}$$

где

$$R^{\alpha}_{pq}=2G^{\alpha}_{[pq]}. \qquad \text{(IV.8)}$$

Эти величины образуют тензор, который называется тензором кривизны объекта связности Γ^{α}_{k}.

2. *Индуцированные вертикальные линейные связности высшего порядка.* Мы видим, что преобразование форм Θ^{α}, определенных равенствами (IV.1), индуцирует преобразование форм ω^{α}_{β}:

$$\tilde{\omega}^{\alpha}_{\beta}=\omega^{\alpha}_{\beta}+\Gamma^{\alpha}_{\beta k}\,\omega^{k}. \qquad \text{(IV.9)}$$

Из системы дифференциальных уравнений (IV.2) и (IV.5) следует, что каждая из систем

$$\begin{array}{l}\Gamma^{\alpha}_{k},\ \Gamma^{\alpha}_{\beta_1 k},\\ \Gamma^{\alpha}_{k},\ \Gamma^{\alpha}_{\beta_1 k},\ \Gamma^{\alpha}_{\beta_1\beta_2 k},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \Gamma^{\alpha}_{k},\ \Gamma^{\alpha}_{\beta_1 k},\ \dots,\ \Gamma^{\alpha}_{\beta_1\dots\beta_c k}\end{array} \qquad \text{(IV.10)}$$

образует дифференциально-геометрический объект. Конечный закон преобразования компонент объекта $(\Gamma^{\alpha}_{k},\ \Gamma^{\alpha}_{\beta k})$, который называется объектом индуцированной вертикальной связности пространства $V^{(p)}_{n,N}$, был получен в работе [5]. Дифференциально-геометрический объект $(\Gamma^{\alpha}_{k},\ \Gamma^{\alpha}_{\beta_1 k},\ \dots,\ \Gamma^{\alpha}_{\beta_1\dots\beta_c k})$ будем называть объектом линейной индуцированной вертикальной связности порядка c пространства $V^{(p)}_{n,N}$. Формы этой связности имеют вид

$$\tilde{\omega}^{\alpha}_{\beta_1\dots\beta_c}=\omega^{\alpha}_{\beta_1\dots\beta_c}+\Gamma^{\alpha}_{\beta_1\dots\beta_c k}\,\omega^{k}. \qquad \text{(IV.11)}$$

Дифференцируя внешним образом эти соотношения, в силу (III.13) и (IV.5), мы получим

$$D\tilde{\omega}^{\alpha}_{\beta_1\dots\beta_c}-\sum_{s=1}^{c}\frac{c!}{s!\,(c-s)!}\,[\tilde{\omega}^{\gamma}_{(\beta_1\dots\beta_s},\ \tilde{\omega}^{\alpha}_{\beta_{s+1}\dots\beta_c)\gamma}]=$$
$$=\frac{1}{2}\,R^{\alpha}_{\beta_1\dots\beta_c lk}[\omega^{l},\ \omega^{k}]+[\tilde{\Theta}^{\gamma},\ \tilde{\omega}^{\alpha}_{\beta_1\dots\beta_c\gamma}], \qquad \text{(IV.12)}$$

где

$$R^{\alpha}_{\beta_1 \ldots \beta_c lk} = 2\left(\Gamma^{\alpha}_{\beta_1 \ldots \beta_c [lk]} - \Gamma^{\alpha}_{\beta_1 \ldots \beta_c \gamma [k} \Gamma^{\gamma}_{l]}\right) -$$

$$-\sum_{s=1}^{c} \frac{c!}{s!\,(c-s)!} \left\{ \Gamma^{\gamma}_{(\beta_1 \ldots \beta_s | l |} \Gamma^{\alpha}_{\beta_{s+1} \ldots \beta_c) \gamma k} - \Gamma^{\gamma}_{(\beta_1 \ldots \beta_s | k |} \Gamma^{\alpha}_{\beta_{s+1} \ldots \beta_c) \gamma l} \right\}. \quad \text{(IV.13)}$$

Эти величины являются решениями системы

$$d R^{\alpha}_{\beta_1 \ldots \beta_c lk} - R^{\alpha}_{\beta_1 \ldots \beta_c tk} \omega^t_l - R^{\alpha}_{\beta_1 \ldots \beta_c lt} \omega^t_k +$$

$$+\sum_{s=1}^{c} \frac{c!}{s!\,(c-s)!} \left\{ R^{\gamma}_{\beta_1 \ldots \beta_s | lk} \omega^{\alpha}_{\gamma | \beta_{s+1} \ldots \beta_a)} - \omega^{\gamma}_{(\beta_1 \ldots \beta_s} R^{\alpha}_{| \gamma | \beta_{s+1} \ldots \beta_c) lk} \right\} +$$

$$+ R^{\gamma}_{lk} \omega^{\alpha}_{\gamma \beta_1 \ldots \beta_c} = R^{\alpha}_{\beta_1 \ldots \beta_c lk, r} \omega^r + R^{\alpha}_{\beta_1 \ldots \beta_c \gamma lk} \Theta^{\gamma}. \quad \text{(IV.14)}$$

Отсюда следует, что каждая из систем величин

$$R^{\alpha}_{lk},\ R^{\alpha}_{\beta_1 lk},$$

$$R^{\alpha}_{lk},\ R^{\alpha}_{\beta_1 lk},\ R^{\alpha}_{\beta_1 \beta_2 lk},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$R^{\alpha}_{lk},\ R^{\alpha}_{\beta_1 lk},\ \ldots,\ R^{\alpha}_{\beta_1 \ldots \beta_c lk} \quad \text{(IV.15)}$$

образует дифференциально-геометрический объект. Его будем называть первым объектом кривизны линейной индуцированной вертикальной связности высшего порядка (порядка c) пространства $V^{(p)}_{n,N}$.

3. *Лифт объекта линейной связности высшего порядка.* Если на базисном пространстве пространства опорных элементов задан объект линейной дифференциально-геометрической связности высшего порядка (I.14), то преобразование форм $\omega^i_{j_1 \ldots j_a}$, определенное равенствами (I.11), индуцирует преобразование форм Θ^α:

$$\tilde{\Theta}^\alpha = \Theta^\alpha + \Gamma^\alpha_k \omega^k, \quad \text{(IV.16)}$$

где

$$\Gamma^\alpha_k = \sum_{a=1}^{p} y^{\alpha i_1 \ldots i_a}_h \omega^h_{k i_1 \ldots i_a}. \quad \text{(IV.17)}$$

Дифференцируя эти соотношения мы получим такую же систему дифференциальных уравнений как и (IV.2), причем

$$\Gamma^\alpha_{lk} = \sum_{a=1}^{p} y^{\alpha i_1 \ldots i_a}_h \Gamma^h_{lk i_1 \ldots i_a}, \quad \text{(IV.18)}$$

$$\Gamma^\alpha_{\beta k} = -\sum_{a=1}^{p} \partial_\beta y^{\alpha i_1 \ldots i_a}_h \Gamma^h_{k i_1 \ldots i_a}. \quad \text{(IV.19)}$$

Таким образом, любому объекту линейно дифференциально-геометрической связности высшего порядка, определенному на базисном пространстве, однозначно соответствует объект линейной дифференциально-геометрической связности пространства опорных элементов. Этот объект будем называть лифтом объекта линейной связности высшего порядка.

§ 2. Неголономное базисное дифференцирование

1. *Вычислительные формулы.* Если в пространстве опорных элементов задан объект дифференциально-геометрической связности Γ^{α}_{k}, то при помощи объекта индуцированной линейной вертикальной связности высшего порядка можно определить неголономное базисное дифференцирование следующим образом. Если в системе дифференциальных уравнений дифференциально-геометрического объекта (III.23) заменим формы Θ^{α}, $\omega^{\alpha}_{\alpha_1 \ldots \alpha_b}$ формами $\bar{\Theta}^{\alpha}$ и $\bar{\omega}^{\alpha}_{\alpha_1 \ldots \alpha_b}$, то получим

$$dZ^I + \sum_{a=1}^{p} Z^{Ii_1 \ldots i_a}_{k} \omega^{k}_{i_1 \ldots i_a} + \sum_{a=1}^{q} Z^{I\alpha_1 \ldots \alpha_b}_{\beta} \bar{\omega}^{\beta}_{\alpha_1 \ldots \alpha_a} = \mathring{\nabla}_k Z^I \omega^k + Z^I_{\alpha} \bar{\Theta}^{\alpha}, \qquad \text{(IV.19)}$$

где

$$\mathring{\nabla}_k Z^I = Z^I_k - Z^I_{\alpha} \Gamma^{\alpha}_{k} + \sum_{b=1}^{q} Z^{I\alpha_1 \ldots \alpha_b}_{\beta} \Gamma^{\beta}_{\alpha_1 \ldots \alpha_b k}. \qquad \text{(IV.20)}$$

Систему величин $\mathring{\nabla}_k Z^I$ будем называть неголономной базисной инвариантной производной рассматриваемого объекта Z^I. Неголономная базисная производная продолженного объекта $(Z^I, Z^I_k, Z^I_{\alpha})$ имеет вид

$$\mathring{\nabla}_l (Z^I_k) = Z^I_{kl} - Z^I_{k\alpha} \Gamma^{\alpha}_{l} - Z^I_{\alpha} \Gamma^{\alpha}_{lk} +$$
$$+ \sum_{b=1}^{q} (Y^{I\alpha_1 \ldots \alpha_b}_{\beta} \Gamma^{\beta}_{\alpha_1 \ldots \alpha_b lk} + \partial_L Z^{I\alpha_1 \ldots \alpha_b}_{\beta} Z^L_k \Gamma^{\beta}_{\alpha_1 \ldots \alpha_b l}), \qquad \text{(IV.21)}$$

$$\mathring{\nabla}_k (Z^I_{\alpha}) = Z^I_{k\alpha} - Z^I_{\alpha\beta} \Gamma^{\beta}_{k} - Z^I_{\beta} \Gamma^{\beta}_{\alpha k} +$$
$$+ \sum_{b=1}^{q} (Z^{I\alpha_1 \ldots \alpha_b}_{\beta} \Gamma^{\beta}_{\alpha_1 \ldots \alpha_b \alpha k} + \partial_L Z^{I\alpha_1 \ldots \alpha_b}_{\beta} Z^L_{\alpha} \Gamma^{\beta}_{\alpha_1 \ldots \alpha_b k}). \qquad \text{(IV.22)}$$

Продолжая систему дифференциальных уравнений (IV.19), мы получим (считаем, что формы ω^k и $\bar{\Theta}^{\alpha}$ – линейно независимы):

$$d(\mathring{\nabla}_k Z^I) - \mathring{\nabla}_l Z^I \omega^l_k + \sum_{a=1}^{p} \partial_L Z^{Ii_1 \ldots i_a}_{l} \mathring{\nabla}_k Z^L \omega^l_{i_1 \ldots i_a} + \sum_{a=1}^{p} Z^{Ii_1 \ldots i_a}_{l} \omega^l_{i_1 \ldots i_a k} +$$
$$+ \sum_{b=1}^{q} \partial_L Z^{I\alpha_1 \ldots \alpha_b}_{\beta} \mathring{\nabla}_k Z^L \bar{\omega}^{\beta}_{\alpha_1 \ldots \alpha_b} = E^I_{kl} \omega^l + E^I_{k\alpha} \bar{\Theta}^{\alpha} \qquad \text{(IV.23)}$$

и

$$dZ^I_{\alpha} - Z^I_{\beta} \bar{\omega}^{\beta}_{\alpha} + \sum_{a=1}^{p} \partial_L Z^{Ii_1 \ldots i_a}_{k} Z^L_{\alpha} \omega^k_{i_1 \ldots i_a} + \sum_{b=1}^{q} \partial_L Z^{I\alpha_1 \ldots \alpha_b}_{\beta} Z^L_{\alpha} \bar{\omega}^{\beta}_{\alpha_1 \ldots \alpha_b} +$$
$$+ \sum_{b=1}^{q} Z^{I\alpha_1 \ldots \alpha_b}_{\beta} \bar{\omega}^{\beta}_{\alpha_1 \ldots \alpha_b \alpha} = E^I_{k\alpha} \omega^k + E^I_{\alpha\beta} \bar{\Theta}^{\beta}, \qquad \text{(IV.24)}$$

где

$$E^I_{[kl]} = \frac{1}{2} \left(R^{\gamma}_{kl} Z^I_{\gamma} - \sum_{b=1}^{q} R^{\beta}_{\alpha_1 \ldots \alpha_b kl} Z^{I\alpha_1 \ldots \alpha_b}_{\beta} \right) \qquad \text{(IV.25)}$$

и $E^I_{\alpha\beta}=E^I_{\beta\alpha}$. Если заменим формы Θ^α, $\omega^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_c}$ формами $\tilde{\Theta}^\alpha$ и $\omega^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_c}$, то система (III.28) примет вид

$$dZ^I_\alpha - Z^I_\beta\omega^\beta_\alpha + \sum_{a=1}^{p} \partial_L Z^{Ii_1\ldots i_a}_k Z^L_\alpha \omega^k_{i_1\ldots i_a} +$$

$$+\sum_{b=1}^{q} (\partial_L Z^{I\alpha_1\ldots\alpha_b}_\beta Z^L_\alpha \tilde{\omega}^\beta_{\alpha_1\ldots\alpha_b} + Z^{I\alpha_1\ldots\alpha_b}_\beta \tilde{\omega}^\beta_{\alpha_1\ldots\alpha_b\alpha}) =$$

$$= \mathring{\nabla}_k (Z^I_\alpha)\,\omega^k + Z^I_{\alpha\beta}\tilde{\Theta}^\beta. \tag{IV.26}$$

Из (IV.24) и (IV.26) следует, что

$$E^I_{k\alpha} = \mathring{\nabla}_k Z^I_\alpha, \quad E^I_{\alpha\beta} = Z^I_{\alpha\beta}. \tag{IV.27}$$

Дифференцируя равенства (IV.20), в силу (III.23), (III.27), (III.28), (IV.2) и (IV.4), мы получим

$$d(\mathring{\nabla}_k Z^I) - \mathring{\nabla}_l Z^I\omega^l_k + \sum_{a=1}^{p} \partial_L Z^{Ii_1\ldots i_a}_l \mathring{\nabla}_k Z^L \omega^l_{i_1\ldots i_a} + \sum_{a=1}^{p} Z^{Ii_1\ldots i_a}_l \omega^l_{i_1\ldots i_a k} +$$

$$+\sum_{b=1}^{q} \partial_L Z^{I\alpha_1\ldots\alpha_b}_\beta \mathring{\nabla}_k Z^L \omega^\beta_{\alpha_1\ldots\alpha_b} = (\mathring{\nabla}_k Z^I)_l\,\omega^l + (\mathring{\nabla}_k Z^I)_\alpha \Theta^\alpha, \tag{IV.28}$$

где

$$(\mathring{\nabla}_k Z^I)_l = Z^I_{kl} - Z^I_{k\alpha}\Gamma^\alpha_l - Z^I_\alpha \Gamma^\alpha_{lk} +$$

$$+\sum_{b=1}^{q} (Z^{I\alpha_1\ldots\alpha_b}_\beta \Gamma^\beta_{\alpha_1\ldots\alpha_b lk} + \partial_L Z^{I\alpha_1\ldots\alpha_b}_\beta Z^L_k \Gamma^\beta_{\alpha_1\ldots\alpha_b l}) \tag{IV.29}$$

и

$$(\mathring{\nabla}_k Z^I)_\alpha = Z^I_{k\alpha} - Z^I_{\alpha\beta}\Gamma^\beta_k - Z^I_\beta \Gamma^\beta_{\alpha k} +$$

$$+\sum_{b=1}^{q} (Z^{I\beta_1\ldots\beta_b}_\gamma \Gamma^\gamma_{\beta_1\ldots\beta_b\alpha k} + \partial_L Z^{I\beta_1\ldots\beta_b}_\gamma Z^L_\alpha \Gamma^\gamma_{\beta_1\ldots\beta_b k}). \tag{IV.30}$$

Отсюда, в силу (IV.21) и (IV.22), следует, что

$$\mathring{\nabla}_l (Z^I_k) = (\mathring{\nabla}_k Z^I)_l, \quad \mathring{\nabla}_k (Z^I_\alpha) = (\mathring{\nabla}_k Z)_\alpha. \tag{IV.31}$$

Эти соотношения означают коммутативность операции неголономного базисного дифференцирования и операции продолжения системы дифференциальных уравнений поля дифференциально-геометрического объекта (III.23) в пространстве опорных элементов (относительно слоевых форм).

2. *Обобщение тождества Риччи и Бианки.* Систему (IV.28) можно переписать в виде

$$d(\mathring{\nabla}_k Z^I) - \mathring{\nabla}_l Z^I\omega^l_k + \sum_{a=1}^{p} Z^{Ii_1\ldots i_a}_l \mathring{\nabla}_k Z^L \omega^l_{i_1\ldots i_a} + \sum_{a=1}^{p} Z^{Ii_1\ldots i_a}_l \omega^l_{i_1\ldots i_a k} +$$

$$+\sum_{b=1}^{q} \partial_L Z^{I\alpha_1\ldots\alpha_b}_\beta \mathring{\nabla}_k Z^L \tilde{\omega}^\alpha_{\alpha_1\ldots\alpha_b} = \mathring{\nabla}_l(\mathring{\nabla}_k Z^I)\,\omega^l + \mathring{\nabla}_k Z^I_\alpha \tilde{\Theta}^\alpha, \tag{IV.28'}$$

где

$$\mathring{\nabla}_l(\mathring{\nabla}_k Z^I) = \mathring{\nabla}_k Z^I_l - \Gamma^\alpha_l \mathring{\nabla}_k Z^I_\alpha + \sum_{b=1}^{q} \partial_L Z^{I\alpha_1\ldots\alpha_b}_\beta \mathring{\nabla}_k Z^L \Gamma^\beta_{\alpha_1\ldots\alpha_b l}. \tag{IV.32}$$

Из (IV.22) и (IV.32) следует, что

$$E^I_{kl}=\overset{\circ}{\nabla}_l(\overset{\circ}{\nabla}_k Z^I). \tag{IV.33}$$

Отсюда, в силу (IV.25), мы получаем обобщенные тождества Риччи для вторых базисных неголономных производных:

$$\overset{\circ}{\nabla}_l\overset{\circ}{\nabla}_k Z^I-\overset{\circ}{\nabla}_k\overset{\circ}{\nabla}_l Z^I=-R^{\gamma}_{lk}Z^I_{\gamma}+\sum_{b=1}^{q}R^{\gamma}_{\alpha_1\ldots\alpha_b lk}Z^{I\alpha_1\ldots\alpha_b}_{\gamma}. \tag{IV.34}$$

На основании этих тождеств, следуя В. В. Вагнеру [31], можно ввести понятие неголономной производной Риччи для дифференциально-геометрического объекта Z^I при помощи равенств

$$\mathfrak{R}_{lk}Z^I=R^{\gamma}_{lk}Z^I_{\gamma}-\sum_{b=1}^{q}R^{\gamma}_{\alpha_1\ldots\alpha_b lk}Z^{I\alpha_1\ldots\alpha_b}_{\gamma}. \tag{IV.35}$$

Следует отметить, что неголономные базисные инвариантные производные высшего порядка от рассматриваемого дифференциально-геометрического объекта можно получить последовательным продолжением системы (IV.19) (они являются коэффициентами при ω^k).

Так как

$$\overset{\circ}{\nabla}_k R^{\alpha}_{ij}=2(\Gamma^{\alpha}_{k[ij]}+\Gamma^{\alpha}_{\beta k[i}\Gamma^{\beta}_{j]}+\Gamma^{\alpha}_{\beta[i}\Gamma^{\beta}_{|k|j]})-2(\Gamma^{\alpha}_{\gamma[ij]}+\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta[i}\Gamma^{\beta}_{j]}+\Gamma^{\alpha}_{\beta[i}\Gamma^{\beta}_{|\gamma|j]})\Gamma^{\gamma}_{k},$$

то, альтернируя по индексам i, j и k, получаем обобщенные тождества Бианки для неголономных базисных инвариантных производных тензора R^{α}_{ij} (учитываем, что $\Gamma^{\alpha}_{kij}=\Gamma^{\alpha}_{ikj}$):

$$\overset{\circ}{\nabla}_k R^{\alpha}_{ij}+\overset{\circ}{\nabla}_i R^{\alpha}_{jk}+\overset{\circ}{\nabla}_j R^{\alpha}_{ki}=0. \tag{IV.36}$$

В частности, если имеем горизонтальное тензорное поле, определенное системой

$$\nabla T^{(i)}_{(j)}=T^{(i)}_{(j)k}\omega^k+T^{(i)}_{(j)\alpha}\Theta^{\alpha},$$

то обобщенные тождества Риччи (IV.34) принимают для этого поля вид

$$2\overset{\circ}{\nabla}_{[l}\overset{\circ}{\nabla}_{k]}T^{(i)}_{(j)}=-R^{\alpha}_{lk}T^{(i)}_{(j)\alpha}. \tag{IV.37}$$

Эти же обобщенные тождества Риччи для вертикального тензорного поля $T^{(\alpha)}_{(\beta)}$, определенного уравнениями

$$\nabla T^{(\alpha)}_{(\beta)}=T^{(\alpha)}_{(\beta)k}\omega^k+T^{(\alpha)}_{(\beta)\gamma}\Theta^{\gamma},$$

имеют вид

$$\begin{gathered}2\overset{\circ}{\nabla}_{[l}\overset{\circ}{\nabla}_{k]}T^{(\alpha)}_{(\beta)}=-R^{\gamma}_{lk}T^{(\alpha)}_{(\beta)\gamma}+\\+\sum_{a=1}^{p}T^{\alpha_1\ldots\gamma\ldots\alpha_p}_{(\beta)}R^{\alpha_a}_{\gamma lk}-\sum_{a=1}^{q}T^{(\alpha)}_{\beta_1\ldots\gamma\ldots\beta_q}R^{\gamma}_{\beta_a lk}.\end{gathered} \tag{IV.38}$$

Если на $V^{(n)}_{n,N}$ определено поле вертикального линеара $\overset{a}{L}{}^{(\alpha)}_{(\beta)}$ с типовой матрицей $C^a_b(a=1,\ 2,\ \ldots,\ R)$, то определяющую систему дифференциальных уравнений этого поля можно представить в виде

$$\begin{gathered}d\overset{a}{L}{}^{(\alpha)}_{(\beta)}+\sum_{s=1}^{p}\overset{a}{L}{}^{\alpha_1\ldots\gamma\ldots\alpha_p}_{(\beta)}\omega^{\alpha_s}_{\gamma}-\sum_{s=1}^{q}\overset{a}{L}{}^{(\alpha)}_{\beta_1\ldots\gamma\ldots\beta_q}\omega^{\gamma}_{\beta_s}+\\+C^a_b\overset{b}{L}{}^{(\alpha)}_{(\beta)}\omega^{\gamma}_{\gamma}=\overset{a}{L}{}^{(\alpha)}_{(\beta)k}\omega^k+\overset{a}{L}{}^{(\alpha)}_{(\beta)\gamma}\Theta^{\gamma}.\end{gathered} \tag{IV.39}$$

Понятие линеара введено А. Е. Либером (см. [20]). В этом случае тождества Риччи имеют вид:

$$2\mathring{\nabla}_{[l}\mathring{\nabla}_{k]}\overset{a}{L}{}^{(\alpha)}_{(\beta)} = -R^{\gamma}_{lk}\overset{a}{L}{}^{(\alpha)}_{(\beta)\gamma} + \sum_{s=1}^{p} R^{\alpha_s}_{\gamma lk}\overset{a}{L}{}^{\alpha_1\ldots\gamma\ldots\alpha_p}_{(\beta)} -$$

$$-\sum_{s=1}^{q} R^{\gamma}_{\beta_s lk}\overset{a}{L}{}^{(\alpha)}_{\beta_1\ldots\gamma\ldots\beta_q} + R^{\gamma}_{\gamma lk}C^{a}_{b}\overset{b}{L}{}^{(\alpha)}_{(\beta)}. \qquad \text{(IV.40)}$$

3. *Тождество В. В. Вагнера.* Так как

$$\overset{L}{D}_v\Gamma^{\alpha}_{k} = \mathring{\nabla}_k v^{\alpha}, \quad \overset{L}{D}_v\Gamma^{\alpha}_{\beta_1\ldots\beta_a k} = \mathring{\nabla}_k v^{\alpha}_{\beta_1\ldots\beta_a},$$

где (v^k, v^{α}) – лифт базисного векторного поля v^k, то изменение порядка неголономного базисного инвариантного дифференцирования и неголономного дифференцирования Ли характеризуется соотношениями

$$\overset{L}{D}_v(\mathring{\nabla}_k Z^I) - \mathring{\nabla}_k(\overset{L}{D}_v Z^I) = \sum_{b=1}^{q} Z^{I\alpha_1\ldots\alpha_b}_{\beta}\overset{L}{D}_v\Gamma^{\beta}_{\alpha_1\ldots\alpha_b k} - Z^{I}_{\beta}\overset{L}{D}_v\Gamma^{\beta}_{k}. \qquad \text{(IV.41)}$$

Для частного случая пространств опорных элементов, т. е. когда опорным объектом является тензор, с аффинной связностью эта формула для произвольного тензорного поля (линейного и однородного дифференциально-геометрического объекта первого и второго класса) была получена Б. Л. Лаптевым [14], а для вертикальных объектов составного многообразия – В. В. Вагнером [10], и поэтому формулу (IV.41) будем называть тождеством В. В. Вагнера.

4. *Тензор деформации.* Пусть в пространстве опорных элементов заданы две дифференциально-геометрические связности Γ^{α}_{k} и $\check{\Gamma}^{\alpha}_{k}$, причем

$$d\check{\Gamma}^{\alpha}_{k} - \check{\Gamma}^{\alpha}_{k}\omega^{l}_{k} + \check{\Gamma}^{\beta}_{k}\omega^{\alpha}_{\beta} - \omega^{\alpha}_{k} = \check{\Gamma}^{\alpha}_{lk}\omega^{l} + \check{\Gamma}^{\alpha}_{\beta k}\Theta^{\beta}. \qquad \text{(IV.42)}$$

Тогда величины

$$T^{\alpha}_{k} = \check{\Gamma}^{\alpha}_{k} - \check{\Gamma}^{\alpha}_{k}, \qquad \text{(IV.43)}$$

в силу (IV.2) и (IV.22), образуют обобщенный тензор, т. е.

$$\nabla T^{\alpha}_{k} = T^{\alpha}_{lk}\omega^{l} + T^{\alpha}_{\beta k}\Theta^{\beta}, \qquad \text{(IV.44)}$$

где

$$T^{\alpha}_{lk} = \check{\Gamma}^{\alpha}_{lk} - \Gamma^{\alpha}_{lk}, \qquad \text{(IV.45)}$$

$$T^{\alpha}_{\beta k} = \check{\Gamma}^{\alpha}_{\beta k} - \Gamma^{\alpha}_{\beta k}. \qquad \text{(IV.46)}$$

Обобщенный тензор T^{α}_{k} мы будем называть тензором деформации рассматриваемой связности Γ^{α}_{k}. Тензоры кривизны связностей $\check{\Gamma}^{\alpha}_{k}$ и Γ^{α}_{k} связаны соотношениями:

$$\check{R}^{\alpha}_{ij} = R^{\alpha}_{ij} + 2\mathring{\nabla}_{[i}T^{\alpha}_{j]} + 2T^{\alpha}_{\beta[i}T^{\beta}_{j]}, \qquad \text{(IV.47)}$$

где $\mathring{\nabla}_i T^{\alpha}_{j}$ – неголономная базисная производная тензора деформации T^{α}_{j} относительно объекта связности Γ^{α}_{k}. Отсюда следует, что две линейные связности $\check{\Gamma}^{\alpha}_{k}$ и Γ^{α}_{k} имеют одинаковые тензоры кривизны тогда и только тогда, когда тензор деформации удовлетворяет соотношениям

$$\mathring{\nabla}_{[i}T^{\alpha}_{j]} + T^{\alpha}_{\beta[i}T^{\beta}_{j]} = 0. \qquad \text{(IV.48)}$$

§ 3. Горизонтальные линейные связности высшего порядка

1. *Усеченные горизонтальные линейные связности высшего порядка.* Дифференциально-геометрический объект $\overset{\circ}{H}{}^i_{kj_1\ldots j_a}$ $(a=1,\ 2,\ \ldots,\ p)$, определенный на $V^{(p)}_{n,N}$ при помощи системы дифференциальных уравнений

$$d\overset{\circ}{H}{}^i_{kj_1\ldots j_a}-\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\,(\omega^l_{(j_1\ldots j_s}\overset{\circ}{H}{}^i_{|k|j_{s+1}\ldots j_a)l}-\overset{\circ}{H}{}^l_{k(j_1\ldots j_s}\omega^i_{j_{s+1}\ldots j_a)l})-$$

$$-\overset{\circ}{H}{}^i_{lj_1\ldots j_a}\omega^l_k-\omega^i_{j_1\ldots j_a k}=\overset{\circ}{H}{}^i_{lkj_1\ldots j_a}\omega^l+\overset{\circ}{H}{}^i_{\alpha kj_1\ldots j_a}\Theta^\alpha,\qquad\text{(IV.49)}$$

будем называть горизонтальным усеченным объектом линейной связности высшего порядка (порядка p) пространства $V^{(p)}_{n,N}$. Продолжая систему (IV.49), мы получим

$$d\overset{\circ}{H}{}^i_{hkj_1\ldots j_a}-\overset{\circ}{H}{}^i_{lkj_1\ldots j_a}\omega^l_h-\overset{\circ}{H}{}^i_{hlj_1\ldots j_a}\omega^l_k-\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\,(\omega^l_{h(j_1\ldots j_s}\overset{\circ}{H}{}^i_{|k|j_{s+1}\ldots j_a)l}-$$

$$-\overset{\circ}{H}{}^l_{hk(j_1\ldots j_s}\omega^i_{j_{s+1}\ldots j_a)l}+\overset{\circ}{H}{}^l_{k(j_1\ldots j_s}\omega^i_{j_{s+1}\ldots j_a)hl}-\omega^l_{(j_1\ldots j_s}\overset{\circ}{H}{}^i_{|kh|j_{s+1}\ldots j_a)l})-$$

$$-\overset{\circ}{H}{}^i_{lj_1\ldots j_a}\omega^l_{kh}-\omega^i_{j_1\ldots j_a kh}-{}'\overset{\circ}{H}{}^i_{\beta kj_1\ldots j_a}\omega^\beta_h=\overset{\circ}{H}{}_{lihkj_1\ldots j_a}\omega^l+{}'\overset{\circ}{H}{}^i_{\alpha hkj_1\ldots j_a}\Theta^\alpha,\qquad\text{(IV.50)}$$

$$d'\overset{\circ}{H}{}^i_{\alpha kj_1\ldots j_a}-{}'\overset{\circ}{H}{}^i_{\beta kj_1\ldots j_a}\omega^\beta_\alpha-{}'\overset{\circ}{H}{}^i_{\alpha lj_1\ldots j_a}\omega^l_k-\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\,(\omega^l_{(j_1\ldots j_s}{}'\overset{\circ}{H}{}^i_{|\alpha k|j_{s+1}\ldots j_a)l}-$$

$$-{}'\overset{\circ}{H}{}^l_{\alpha k(j_1\ldots j_s}\omega^i_{j_{s+1}\ldots j_a)l})={}'\overset{\circ}{H}{}^i_{\alpha khj_1\ldots j_a}\omega^h+{}''\overset{\circ}{H}{}^i_{\beta\alpha kj_1\ldots j_a}\Theta^\beta.\qquad\text{(IV.51)}$$

Формы линейной связности высшего порядка в этом случае имеют вид

$$\overset{\circ}{\omega}{}^i_{j_1\ldots j_a}=\omega^i_{j_1\ldots j_a}+\overset{\circ}{H}{}^i_{kj_1\ldots j_a}\omega^k.\qquad\text{(IV.52)}$$

На основании этих соотношений можно определить формы $\overset{\circ}{\Theta}{}^\alpha$:

$$\overset{\circ}{\Theta}{}^\alpha=\Theta^\alpha+\overset{\circ}{H}{}^\alpha_k\,\omega^k,\qquad\text{(IV.53)}$$

где

$$\overset{\circ}{H}{}^\alpha_k=\sum_{a=1}^{p}y_l^{\alpha i_1\ldots i_a}\overset{\circ}{H}{}^l_{ki_1\ldots i_a}.\qquad\text{(IV.54)}$$

Дифференцируя эти равенства, в силу (I.10) и (IV.49), получим систему дифференциальных уравнений, структура которых такая же как и структура дифференциальных уравнений линейной дифференциально-геометрической связности пространства $V^{(p)}_{n,N}$. Таким образом, если в пространстве $V^{(p)}_{n,N}$ задан усеченный объект линейной связности высшего порядка (порядок совпадает с классом опорного элемента), то к ней всегда однозначно присоеди няется объект линейной дифференциально-геометрической связности и, согласно результатам § 1 гл. IV, индуцированный объект вертикальной связности высшего порядка.

2. *Картановые объекты кривизны.* Дифференцируя внешним образом (IV.51), мы получим

$$D\mathring{\omega}^i_{j_1\ldots j_a}-\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\,[\mathring{\omega}^k_{(j_1\ldots j_s},\ \mathring{\omega}^i_{j_{s+1}\ldots j_a)k}]=$$

$$=\frac{1}{2}\,\mathring{R}^i_{j_1\ldots j_a kl}[\omega^k,\ \omega^l]+\mathring{S}^i_{j_1\ldots j_a k\alpha}[\mathring{\Theta}^\alpha,\ \omega^k],\qquad\text{(IV.55)}$$

где

$$\mathring{R}^i_{j_1\ldots j_a kh}=2\,(\mathring{\nabla}_{[k}\mathring{H}^i_{h]j_1\ldots j_a}-\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\,\mathring{H}^l_{[k.|(j_1\ldots j_s}\mathring{H}^i_{h]j_{s+1}\ldots j_a)l}),\qquad\text{(IV.56)}$$

$$\mathring{S}^i_{j_1\ldots j_a k\alpha}={}'\mathring{H}^i_{\alpha kj_1\ldots j_a}$$

и $\mathring{\nabla}_k$ – символ неголономной базисной производной относительно объекта $\mathring{H}^\alpha_k$. Полученные системы величин, как это следует из (IV.2), (IV.50), (IV.53) и являются решениями (IV.51) и системы

$$d\mathring{R}^i_{j_1\ldots j_a kh}-\mathring{R}^i_{j_1\ldots j_a lh}\,\omega^l_k+\mathring{R}^i_{j_1\ldots j_a kl}\,\omega^l_h+\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\,(\mathring{R}^l_{(j_1\ldots j_s\,|kh}\omega^i_{l\,|\,j_{s+1}\ldots j_a)}-$$

$$-\omega^l_{(j_1\ldots j_s}R^i_{|l\,|\,j_{s+1}\ldots j_a)kh})+R^l_{kh}\,\omega^i_{lj_1\ldots j_a}=\mathring{R}^i_{j_1\ldots j_a kh,\,l}\,\omega^l+\mathring{R}^i_{j_1\ldots j_a kh,\,\alpha}\,\Theta^\alpha,\qquad\text{(IV.57)}$$

из которых и следует, что $\mathring{R}^i_{j_1\ldots j_a kl}$ и $\mathring{S}^i_{j_1\ldots j_a k\alpha}$ являются самостоятельными дифференциально-геометрическими объектами. Дифференциально-геометрический объект $\mathring{R}^i_{j_1\ldots j_a kl}$ будем называть первым картановым объектом кривизны усеченной горизонтальной линейной связности порядка p пространства $V^{(p)}_{n,N}$, а $\mathring{S}^i_{j_1\ldots j_a k\alpha}$ – вторым картановым объектом кривизны рассматриваемой связности.

3. *Горизонтальные линейные связности высшего порядка.* Произвольную горизонтальную линейную связность высшего порядка определим формами ω^i, Θ^α и

$$\breve{\omega}^i_{j_1\ldots j_a}=\omega^i_{j_1\ldots j_a}+H^i_{kj_1\ldots j_a}\,\omega^k+C^i_{\alpha j_1\ldots j_a}\,\Theta^\alpha.\qquad\text{(IV.58)}$$

Дифференцируя эти соотношения внешним образом, мы получим

$$D\breve{\omega}^i_{j_1\ldots j_a}-\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\,[\breve{\omega}^l_{(j_1\ldots j_s},\ \breve{\omega}^i_{j_{s+1}\ldots j_a)l}]=[\Delta H^i_{kj_1\ldots j_a},\ \omega^k]+$$

$$+[\Delta C^i_{\alpha j_1\ldots j_a},\ \Theta^\alpha]-\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\,(H^l_{k(j_1\ldots j_s}H^i_{|h|j_{s+1}\ldots j_a)l}-$$

$$-H^l_{h(j_1\ldots j_s}H^i_{|k|j_{s+1}\ldots j_a)l})[\omega^k,\ \omega^h]-\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\,(H^l_{k(j_1\ldots j_s}C^i_{|\alpha|j_{s+1}\ldots j_a)l}-$$

$$-C^l_{\alpha(j_1\ldots j_s}H^i_{|k|j_{s+1}\ldots j_a)l})[\omega^k,\ \Theta^\alpha]-\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\,(C^l_{\alpha(j_1\ldots j_s}C^i_{|\beta|j_{s+1}\ldots j_a)l}-$$

$$-C^l_{\beta(j_1\ldots j_s}C^i_{|\alpha|j_{s+1}\ldots j_a)l})[\Theta^\alpha,\ \Theta^\beta],\qquad\text{(IV.59)}$$

где

$$\Delta H^i_{kj_1\ldots j_a}=dH^i_{kj_1\ldots j_a}-H^i_{lj_1\ldots j_a}\omega^l_k-\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\,(H^i_{k|l\ldots j_s}\omega^l_{j_{s+1}\ldots j_a)l}-$$

$$-\omega^l_{(j_1\ldots j_s}H^i_{|k|j_1\ldots j_a)l})-C^i_{\alpha j_1\ldots j_a}\omega^\alpha_k-\omega^i_{kj_1\ldots j_a}, \qquad \text{(IV.60)}$$

$$\Delta C^i_{\alpha j_1\ldots j_a}=dC^i_{\alpha j_1\ldots j_a}-C^i_{\beta j_1\ldots j_a}\omega^\beta_\alpha$$

$$-\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\,(C^l_{\alpha(j_1\ldots j_s}\omega^i_{j_{s+1}\ldots j_a)l}-\omega^l_{(j_1\ldots j_s}C^i_{|\alpha|j_{s+1}\ldots j_a)l}). \qquad \text{(IV.61)}$$

Отсюда следует, что в пространстве $V^{(p)}_{n,N}$ определена горизонтальная линейная связность высшего порядка тогда и только тогда, когда задано поле дифференциально-геометрического объекта

$$\Delta H^i_{kj_1\ldots j_a}=H^i_{lkj_1\ldots j_a}\omega^l+{}'H^i_{\alpha kj_1\ldots j_a}\Theta^\alpha,$$

$$\Delta C^i_{\alpha j_1\ldots j_a}=C^i_{k\alpha j_1\ldots j_a}\omega^k+{}'C^i_{\beta\alpha j_1\ldots j_a}\Theta^\beta. \qquad \text{(IV.62)}$$

Этот объект мы будем называть объектом горизонтальной линейной связности высшего порядка пространства $V^{(p)}_{n,N}$.

Введем формы

$$\breve{\Theta}^\alpha=\breve{H}^\alpha_\beta\Theta^\beta+\breve{H}^\alpha_k\omega^k, \qquad \text{(IV.63)}$$

где

$$\breve{H}^\alpha_\beta=\delta^\alpha_\beta+\sum_{a=1}^{p}y^{\alpha i_1\ldots i_a}_l C^l_{\beta i_1\ldots i_a}, \qquad \text{(IV.64)}$$

$$\breve{H}^\alpha_k=\sum_{a=1}^{p}y^{\alpha i_1\ldots i_a}_l H^l_{ki_1\ldots i_a}. \qquad \text{(IV.65)}$$

Оказывается, что величины $\breve{H}^\alpha_\beta$ образуют вертикальный тензор, т. е.

$$\nabla\breve{H}^\alpha_\beta=\breve{H}^\alpha_{k\beta}\omega^k+\breve{H}^\alpha_{\gamma\beta}\Theta^\gamma, \qquad \text{(IV.66)}$$

а $\breve{H}^\alpha_k$ — объект линейной дифференциально-геометрической связности, т. е.

$$\nabla\breve{H}^\alpha_k-\breve{H}^\alpha_\beta\omega^\beta_k=\breve{H}^\alpha_{lk}\omega^l+\breve{H}^\alpha_{\beta k}\Theta^\beta. \qquad \text{(IV.67)}$$

Объект горизонтальной линейной связности высшего порядка будем называть нормальным, если

$$\breve{H}^\alpha_\beta=\delta^\alpha_\beta, \qquad \text{(IV.68)}$$

т. е.

$$\sum_{a=1}^{p}y^{\alpha i_1\ldots i_a}_k C^k_{\beta i_1\ldots i_a}=0. \qquad \text{(IV.69)}$$

Последовательно продолжая систему дифференциальных уравнений объекта $\dot{H}^\alpha_k={}^*\breve{H}^\alpha_\beta\breve{H}^\beta_k$, где ${}^*\breve{H}^\alpha_\beta\breve{H}^\beta_\gamma=\delta^\alpha_\gamma$ и $\det\|\breve{H}^\alpha_\beta\|\neq 0$, мы получим индуцированный объект вертикальной линейной связности высшего порядка, т. е.

$$\nabla\dot{H}^\alpha_k-\omega^\alpha_k=\dot{H}^\alpha_{lk}\omega^l+\dot{H}^\alpha_{\beta k}\Theta^\beta,$$

$$\Delta\dot{H}^\alpha_{kp_1\ldots p_c}=\dot{H}^\alpha_{lkp_1\ldots p_c}\omega^l+\dot{H}^\alpha_{\beta kp_1\ldots p_c}\Theta^\beta,$$

$$\Delta\dot{H}^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_b kp_1\ldots p_a}=\dot{H}^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_b lkp_1\ldots p_a}\omega^l+\dot{H}^\alpha_{\gamma\beta_1\ldots\beta_c kp_1\ldots p_a}\Theta^\gamma,$$

$$\Delta\dot{H}^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_c k}=\dot{H}^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_c lk}\omega^l+\dot{H}^\alpha_{\gamma\beta_1\ldots\beta_c k}\Theta^\gamma, \qquad \text{(IV.70)}$$

причем структура форм $\Delta \overset{\bullet}{H}{}^{\alpha}_{kp_1\ldots p_c}$, $\Delta \overset{\bullet}{H}{}^{\alpha}_{\beta_1\ldots\beta_b kp_1\ldots p_a}$ и $\Delta \overset{\bullet}{H}{}^{\alpha}_{\beta_1\ldots\beta_c k}$ такая же как и левых частей уравнений (IV.3)–(IV.5).

4. *Картановые объекты кривизны нормальной связности.* Формы вертикальной аффинной связности, индуцированной нормальной горизонтальной линейной связностью, имеют вид ($\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\alpha}_{k}=\check{\Gamma}^{\alpha}_{k}$):

$$\check{\omega}^{\alpha}_{\beta_1\ldots\beta_a}=\omega^{\alpha}_{\beta_1\ldots\beta_a}+\overset{\bullet}{H}{}^{\alpha}_{\beta_1\ldots\beta_a k}\,\omega^k. \tag{IV.71}$$

В силу (IV.63) и (IV.68), соотношения (IV.58) можно переписать следующим образом

$$\check{\omega}^{i}_{j_1\ldots j_a}=\omega^{i}_{j_1\ldots j_a}+G^{i}_{kj_1\ldots j_a}\,\omega^k+C^{i}_{\alpha j_1\ldots j_a}\,\check{\Theta}^{\alpha}, \tag{IV.72}$$

где

$$G^{i}_{j_1\ldots j_a k}=H^{i}_{kj_1\ldots j_a}-C^{i}_{\alpha j_1\ldots j_a}\check{H}^{\alpha}_{k} \tag{IV.73}$$

и (IV.59) принимает вид:

$$D\check{\omega}^{i}_{j_1\ldots j_a}-\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\,[\check{\omega}^{l}_{(j_1\ldots j_s},\ \check{\omega}^{i}_{j_{s+1}\ldots j_a\,l]}=$$

$$=\frac{1}{2}\,R^{i}_{j_1\ldots j_a kh}[\omega^k,\ \omega^h]+S^{i}_{j_1\ldots j_a k\alpha}[\omega^k,\ \check{\Theta}^{\alpha}]+\frac{1}{2}\,P^{i}_{j_1\ldots j_a\alpha\beta}[\check{\Theta}^{\alpha},\ \check{\Theta}^{\beta}], \tag{IV.74}$$

где

$$R^{i}_{j_1\ldots j_a kh}=2\check{\nabla}_{[k}\,G^{i}_{h]j_1\ldots j_a}-\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\,(G^{l}_{k\,(j_1\ldots j_s}\,G^{i}_{|h|\,j_{s+1}\ldots j_a)\,l}-$$
$$-G^{l}_{h\,(j_1\ldots j_s}\,G^{i}_{|k|\,j_{s+1}\ldots j_a)\,l})+C^{i}_{\alpha j_1\ldots j_a}\check{R}^{\alpha}_{kh}, \tag{IV.75}$$

$$S^{i}_{j_1\ldots j_a k\alpha}=\check{\nabla}_k\,C^{i}_{\alpha j_1\ldots j_a}-\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\,(G^{l}_{k\,(j_1\ldots j_s}\,C^{i}_{|\alpha|\,j_{s+1}\ldots j_a)\,l}-$$
$$-C^{l}_{\alpha\,(j_1\ldots j_s}\,G^{i}_{|k|\,j_{s+1}\ldots j_a)\,l})-{}'G^{i}_{\alpha kj_1\ldots j_a}-C^{i}_{\beta j_1\ldots j_a}\check{H}^{\beta}_{\alpha k} \tag{IV.76}$$

и

$$P^{i}_{j_1\ldots j_a\alpha\beta}=2\,{}'C^{i}_{[\alpha\beta]\,j_1\ldots j_a}-\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\,(C^{l}_{\alpha\,(j_1\ldots j_s}\,C^{i}_{|\beta|\,j_{s+1}\ldots j_a)\,l}-$$
$$-C^{l}_{\beta\,(j_1\ldots j_s}\,C^{i}_{|\alpha|\,j_{s+1}\ldots j_a)\,l}), \tag{IV.77}$$

а $\check{\nabla}_k$ – символ неголономного частного базисного дифференцирования относительно объекта $\check{H}^{\alpha}_{k}$ и $\check{R}^{\alpha}_{kh}$ – тензор кривизны связности $\check{H}^{\alpha}_{k}$.

Структурные уравнения (I.1) в этом случае можно переписать в виде

$$D\omega^i-[\omega^k,\ \overset{\bullet}{\omega}{}^{i}_{k}]=\frac{1}{2}\,R^{i}_{kh}[\omega^k,\ \omega^h]+C^{i}_{\alpha k}[\check{\Theta}^{\alpha},\ \omega^k], \tag{IV.78}$$

где

$$R^{i}_{kh}=2\,(H^{i}_{[kh]}+C^{i}_{\alpha\,[k}\,\check{H}^{\alpha}_{h]}). \tag{IV.79}$$

Тензор R^{i}_{kh} называется тензором горизонтального кручения пространства $V^{(p)}_{n,N}$ с горизонтальной линейной связностью высшего порядка, а $C^{i}_{\alpha k}$ – тензором кручения (см. [5], стр. 18–19). Дифференциально-геометрический объект

$$\begin{array}{c} R^{i}_{j_1 kh},\\ R^{i}_{j_1 kh},\ R^{i}_{j_1 j_2 kh},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ R^{i}_{j_1 kh},\ R^{i}_{j_1 j_2 kh},\ \ldots,\ R^{i}_{j_1\ldots j_p kh} \end{array} \tag{IV.80}$$

будем называть первым картановым объектом горизонтальной кривизны пространства $V_{n,N}^{(p)}$. Этот объект в качестве подобъекта имеет тензор $R^i_{j_1\,kh}$, который называется первым картановым тензором горизонтальной кривизны (см. [5]).

Дифференциально-геометрический объект

$$\begin{gathered} S^i_{j_1\,k\alpha}, \\ S^i_{j_1\,k\alpha},\ S^i_{j_1 j_2\,k\alpha}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ S^i_{j_1\,k\alpha},\ S^i_{j_1 j_2\,k\alpha},\ \ldots,\ S^i_{j_1\ldots j_p\,k\alpha} \end{gathered} \tag{IV.81}$$

будем называть третьим картановым объектом горизонтальной кривизны. Величины $S^i_{j_1\,k\alpha}$ образуют тензор, который называется третьим картановым тензором горизонтальной кривизны (см. [5]). А дифференциально-геометрический объект

$$\begin{gathered} P^i_{j_1\,\alpha\beta}, \\ P^i_{j_1\,\alpha\beta},\ P^i_{j_1 j_2\,\alpha\beta}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P^i_{j_1\,\alpha\beta},\ P^i_{j_1 j_2\,\alpha\beta},\ \ldots,\ P^i_{j_1\ldots j_p\,\alpha\beta} \end{gathered} \tag{IV.82}$$

назовем вторым картановым объектом горизонтальной кривизны (он в качестве подобъекта содержит второй картановый тензор горизонтальной кривизны).

В этом случае так же имеется и первый объект кривизны индуцированной линейной вертикальной связности высшего порядка, который имеет такую же структуру, как и (IV.15).

Вильнюсский Государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
1.X.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Е. Беклемишев, Дифференциальная геометрия пространств с почти комплексной структурой. Итоги науки, Геометрия, 1963, 1965, 165—212.
2. В. И. Близникас, О некоторых многообразиях опорных элементов, Лит. мат. сб., т. 3, № 2, 221—222, 1963.
3. В. И. Близникас, Полный объект центро-проективной связности и объект кручения-кривизны пространства центральных копункторов, Лит. мат. сб., т. 4, № 4, 457—475, 1964.
4. В. И. Близникас, Аффинная связность в пространстве опорных элементов, Доклады третьей Сибирской конференции по математике и механике, Томск, 1964.
5. В. И. Близникас, К теории кривизны пространства опорных элементов, Лит. мат. сб., т. 5, № 1, 9—24, 1965.
6. Л. Е. Евтушик, Производная Ли и дифференциальные уравнения поля геометрического объекта, ДАН СССР, т. 132, № 5, 998—1001, 1960.
7. В. В. Вагнер, Геометрия Финслера как теория поля локальных гиперповерхностей в X_n, Труды сем. по векторн. и тензор. анал., вып. VII, 65—166, 1949.
8. В. В. Вагнер, Обобщенные тождества Риччи и Бианки для связности в составном многообразии, ДАН СССР, т. 46, № 8, 335—338, 1945.

9. В. В. Вагнер, Теория геометрических объектов и теория конечных и бесконечных групп преобразований, ДАН СССР, т. 46, № 9, 383—386, 1945.
10. В. В. Вагнер, Постоянные поля локальных геометрических объектов в составном многообразии с линейной связностью, ДАН СССР, т. 53, № 3, 187—190, 1946.
11. В. В. Вагнер, Классификация простых геометрических дифференциальных объектов, ДАН СССР, т. 69, № 3, 293—296, 1949.
12. В. В. Вагнер, Теория составного многообразия, Труды сем. по векторн. и тензорн. анал., вып. 8, 11—72, 1950.
13. Б. Л. Лаптев, Аффинная связность в пространстве тензорных опорных элементов, Учен. записки Казанского ун-та, т. 109, кн. 4, 187—216, 1949.
14. Б. Л. Лаптев, Производная Ли в пространстве опорных элементов, Труды сем. по векторн. и тензорн. анал., вып. 10, 227—248, 1956.
15. Б. Л. Лаптев, Ковариантный дифференциал и теория дифференциальных инвариантов в пространстве тензорных опорных элементов, Учен. записки Казанского ун-та, т. 118, кн. 4, 75—147, 1958.
16. Б. Л. Лаптев, Пространство опорных элементов, Диссертация на соискание учен. ст. докт. физ.-мат. наук, Москва, МГУ, 1959.
17. Г. Ф. Лаптев, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Труды Московского мат. об-ва, т. 2, 275—382, 1953.
18. Г. Ф. Лаптев, Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований, Труды III всесоюзн. мат. съезда, т. 3, 409—418, Москва, 1958.
19. Г. Ф. Лаптев, Многообразия, погруженные в обобщенные пространства, Труды IV всесоюзн. мат. съезда, т. 2, 226—233, Ленинград, 1964.
20. А. Е. Либер, О дифференциальных комитантах некоторых линейных объектов, Извест. высш. учебн. зав., мат., 1960, № 6 (19), 158—162.
21. А. Лихнерович, Теория связностей в целом и группы голономии, ИИЛ, Москва, 1960.
22. L. Berwald, Über Parallelübertragung in Räumen mit allgemeiner Massbestimmung, Jahresber. Deutsch. Math. Vereinig., 34, 213—220, 1926.
23. L. Berwald, Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus, Math. Z., 25, 40—73, 1926.
24. E. Cartan, Les espaces de Finsler, Paris, 1934.
25. A. Cossu, Connessioni che conservano una structura quasi complessa, Atti Accad. naz. Lincei. Rend. cl. sci. fis., mat. e natur., 30, № 6, 863—873, 1961.
26. J. Douglas, The general geometry of paths, Ann. of Math., 29, 143—168, 1928.
27. J. Douglas, Systems of K-dimensional manifelds in a N-dimensional space, Ann. of Math., 105, 703—733, 1931.
28. Hu Hou-Sung, A new geometry of a space of K-spreads, Sci. Rec., 3, № 3, 107—111, 1959.
29. M. Kucharzewski, Über die Tensorübertragung, Annali di matematica pura ed applicata, 54, 65—84, 1961.
30. O. Veblen, T. Y. Thomas, The geometry of paths, Transactions of the American Mathematical Society, 25, 551—608, 1923.
31. V. V. Wagner, Geometria del calcolo delle variazioni, Centro Internazionale matematics estivo, 1965.
32. A. G. Walker, Derivation torsionelle et seconde torsion pour une structure presque complexe, C. r. Acad. sci., 245, № 15, 1213—1215, 1957.
33. S. Tachibana, S. Koto, On almost-analytic functions, tensors and invariant subspaces, Tohoku Math. J., 14, № 2, 177—186, 1962.
34. K. Yano, Quelques remarques sur les variétés à structure presque complexe, Bull. Soc. Math. France, 83, 57—80, 1955.

NEHOLONOMINIS LI DIFERENCIAVIMAS IR TIESINIAI SĄRYŠIAI ATRAMINIŲ ELEMENTŲ ERDVĖJE

V. BLIZNIKAS

(Reziumė)

Pirmame skyriuje yra išdėstoma invariantinių operacijų ir sąryšių teorija diferencijuojamoje daugdaroje V_n. Dalis šio skyriaus rezultatų yra referatyvinio pobūdžio ir išdėstomi G. Laptevo metodu (§ 1—6). Surasta nauja schema neholonominio Li diferenciavimo, kuri yra skirtinga nuo L. Evtušiko schemos [6]. Tenzorinių sąryšių teorija G. Laptevo metodu yra išdėstoma pirmą kartą.

Antrame skyriuje yra nagrinėjama tenzorinių atraminių elementų erdvė. Išnagrinėta tiesinių elementų erdvės tiesinių sąryšių teorija, beveik kompleksinės struktūros tiesinių elementų erdvėje, tenzorinių atraminių elementų erdvės įvairūs tiesiniai sąryšiai, tiesinio tenzorinio sąryšio Kartano kreivumo tenzoriai.

Trečiame skyriuje yra nagrinėjama erdvė $V^{(p)}_{n,N}$. Pateikiama nauja neholonominio Li diferenciavimo schema, o taip pat ir vertikalinio neholonominio Li diferenciavimo schema.

Ketvirtame skyriuje yra nagrinėjami įvairūs erdvės $V^{(p)}_{n,N}$ sąryšiai (tiesiniai sąryšiai, indukuoti vertikaliniai tiesiniai sąryšiai aukštesnės eilės, bazinių aukštesnės eilės tiesinių sąryšių liftai, horizontaliniai aukštesnės eilės tiesiniai sąryšiai, Kartano kreivumo objektai).

NICHT-HOLONOME LIESCHE DIFFERENZIERUNG UND LINEARE ZUSAMMENHÄNGE IM STÜTZELEMENTENRAUM

V. BLIZNIKAS

(Zusammenfassung)

Im ersten Kapitel werden wir die inwariantische Operationen und Theorie der Zusammenhänge in differenzierbare Mannigfaltigkeit V_n entwickeln.

Zunächst im Kapitel 2 versuchen wir das tensorische Stützelementenraum. Es seien x^i die Koordinaten eines Punktes in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit V_n. Adjungieren wir nun in jedem Punkte von V_n ein beliebiges Tensor $w^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$, so kommt die Mannigfaltigkeit, die aus allen tensorischen Stützelementen $(x^i, w^{(i)}_{(j)})$ besteht. Diese Mannigfaltigkeit nennt man einen tensorischen Stützelementenraum. Der erste systematische Aufbau einer Geometrie des tensorischen Stützelementenraumes ist von B. L. Laptew mit Hilfe der Tensorrechnung entwickelt. Wir werden die Theorie der verschiedenen linearen Zusammenhänge der Linienelement- und tensorischen Stützelementenraumes mit Hilfe der Methode von G. F. Laptew begründen, und dann entsprechende Cartanische Krümmungstensoren definieren. Auch ist von uns die Theorie der fastkomplexen Strukturen des Linienelementraumes entwickelt.

Das dritte Kapitel behandelt die neue Herleitung der nicht-holonomen Liesche Differenzierung im willkürliche Stützelementenraum.

Im letzten Kapitel haben wir die Theorie verschiedener Zusammenhänge, d. h. linearer Zusammenhänge induzierter vertikalen Zusammenhänge von höheren Ordnung, horizontaler Zusammenhänge von höheren Ordnung u.s.w., der Stützelementenraumes begründet.