VI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

1966

КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ СИММЕТРИЧНЫХ ПОЛУПОЛОС И УГЛОВЫХ ОБЛАСТЕЙ

А. А. ГОЛЬДБЕРГ, Т. В. СТРОЧИК

Пусть $\varphi(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, заданная на $[0, \infty)$, причем $\varphi(x)>0$, $0\leqslant x<\infty$. Рассмотрим в z-плоскости, $z=x+iy$, полуполосу $S=\{|y|<\varphi(x), x>0\}$. Отобразим ее конформно и однолистно на полуполосу $S_0=\left\{|v|<\frac{\pi}{2},\ u>0\right\}$ в w-плоскости $(w=u+iv)$ так, чтобы точки $\big(0,\ \pm\varphi(0)\big)$ перешли в точки $\left(0,\ \pm\frac{\pi}{2}\right)$, точка $z=\infty$ перешла в точку $w=\infty$. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь взаимно однозначные отображения, специально не отмечая этого. Мы ставим задачу найти асимптотическое выражение для функции $w=w(z)$, осуществляющей это отображение, то есть такую функцию $F(z)$, что разность $F(z)-w(z)$ равномерно стремится к 0, если $x\to+\infty$. Этой задачей занимался С. Е. Варшавский [1]. Наши результаты в некоторой степени дополняют результаты Варшавского*).

С. Е. Варшавский накладывал на S такие ограничения:

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\varphi'(x)=0,$$

$$2)\ \int_0^\infty \frac{\{\varphi'(x)\}^2}{\varphi(x)}\,dx<\infty.$$

При этих условиях С. Е. Варшавский ([1] §§ 7, 18, формулы (7.2) (18.1)) вывел следующую асимптотическую формулу $(z\in\bar S)$:

$$w(z)=w(x+iy)=\lambda+\frac{\pi}{2}\int_0^x\frac{dt}{\varphi(t)}+i\,\frac{\pi}{2}\,\frac{u}{\varphi(x)}+o(1) \tag{1}$$

при $x\to+\infty$ равномерно относительно y, λ – некоторая действительная постоянная.

Мы выведем асимптотическую формулу для $w(z)$, накладывая на $\varphi(x)$ иные ограничения, чем у Варшавского. Мы будем предполагать, что S удовлетворяет следующим трем условиям:

Условие А. Полная вариация функции $\operatorname{arctg}\varphi'(x)$ на $[0, \infty)$ ограничена (полуполоса S имеет в $x=+\infty$ конечное вращение границы, согласно терминологии С. Е. Варшавского).

---

*) С. Е. Варшавский требовал меньшей гладкости от функции $\varphi(x)$ и рассматривал также полуполосы, близкие к симметричным. Мы рассматриваем простейший случай.

Условие Б. Для некоторого постоянного q, $0<q<1$, для всех $x \geqslant x_0$ выполняется

$$\varphi''(x) \geqslant -q \frac{(1+\{\varphi'(x)\}^2)(\sqrt{1+\{\varphi'(x)\}^2}+1)}{\varphi(x)}. \qquad (Б)$$

Условие В. Интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(x)\{\varphi''(x)\}^2}{1+|\varphi'(x)|^5}\,dx \qquad (В)$$

сходится. Это условие можно переписать в равносильной форме:

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(x)\{\varphi''(x)\}^2}{(1+\{\varphi'(x)\}^2)^{5/2}}\,dx = \int_C d(s)\,k^2(s)\,ds < \infty,$$

где C — кривая $y=\varphi(x)$, $0 \leqslant x < \infty$, s — натуральный параметр на этой кривой, $A(s)$ — точка на C, которой отвечает параметр s, $d(s)$ — расстояние от $A(s)$ до действительной оси, $k(s)$ — кривизна кривой C в точке $A(s)$.

Как показал Варшавский, если

$$0 < \varliminf_{x\to\infty} \varphi(x) \leqslant \varlimsup_{x\to\infty} \varphi(x) < \infty, \quad \varphi'(x) = O(1), \qquad (2)$$

то из условия А вытекает условие 2).

Как видим, условия С. Е. Варшавского 1) и 2) накладывают ограничения на первую производную $\varphi'(x)$, а наши условия А, Б и В относятся преимущественно ко второй производной $\varphi''(x)$. Уменьшая общность, мы могли бы полностью освободиться от $\varphi'(x)$ в условиях А, Б, В, заменив их, соответственно, на

$$\text{А}')\ \int_0^\infty |\varphi''(x)|\,dx < \infty;$$

$$\text{Б}')\ \varliminf_{x\to\infty} \varphi(x)\varphi''(x) > -2;$$

$$\text{В}')\ \int_0^\infty \varphi(x)\{\varphi''(x)\}^2\,dx < \infty.$$

Из условия А вытекает существование предела

$$0 \leqslant \lim_{x\to\infty} \varphi'(x) \leqslant +\infty.$$

Заметим, что из условий А и 2) следует условие 1). В самом деле если $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi'(x)=\gamma$, $0<\gamma<\infty$, то $\varphi(x)=\big(\gamma+o(1)\big)\,x$, и условие 2) не выполняется. Если же $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi'(x)=+\infty$, то при $x \geqslant x_0\,(K)$ имеем $\varphi'(x) \geqslant K > 0$ и $\varphi(x) \geqslant K(x-x_0)+\varphi(x_0)$, откуда

$$\int_0^x \frac{\{\varphi'(x)\}^2}{\varphi(x)}\,dx \geqslant K \int_{x_0}^x d\ln\varphi(x) \geqslant K\ln\left(1+\frac{K}{\varphi(x_0)}(x-x_0)\right) \to \infty \text{ при } x\to\infty.$$

Если выполняются условия А, Б и В, но не выполняется условие 1) (например, $\varphi(x)=1+\gamma x$, $0<\gamma<\infty$), то мы не можем непосредственно применить теорему Варшавского, а наши формулы применимы. Отметим, что если $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi'(x) > 0$, то область S естественнее назвать не полуполосой, а угловой областью, однако нам будет удобнее придерживаться предыдущей терминологии.

Покажем на примере, что даже если выполняется условие 1), но

$$1 = \varliminf_{x\to\infty} \varphi(x) < \varlimsup_{x\to\infty} \varphi(x) = +\infty,$$

то условие 2) может не выполняться, в то время, как условия А′, Б′ и В′ выполняются. Таким образом, для такой полуполосы мы не можем использовать результат Варшавского, однако можно применить нашу теорему.

Пример. Возьмем последовательность a_n, $n \geqslant 2$, такую, что $a_2 > \frac{\pi}{4}$, $a_{n+1} > a_n + 2n^2 + \frac{\pi}{2}$. Положим $\varphi(x) \equiv 1$, если $x \not\in \bigcup\limits_{n=2}^{\infty} I_n$, где сегменты $I_n = \left[a_n - \frac{\pi}{4},\ a_n + 2n^2 + \frac{\pi}{4}\right]$ не пересекаются. Пусть

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2n\ln^2 n}\left[x - a_n + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin 2\left(x - a_n + \frac{\pi}{4}\right)\right] & \text{при } x \in I_n^{(1)}, \\ 1 + \frac{x - a_n}{n\ln^2 n} & \text{при } x \in I_n^{(2)}, \\ 1 + \frac{1}{n\ln^2 n}\left[n^2 - \frac{\pi}{2} + \cos(x - a_n - n^2)\right] & \text{при } x \in I_n^{(3)}, \\ 1 + \frac{n}{\ln^2 n} - \frac{x - a_n - n^2}{n\ln^2 n} & \text{при } x \in I_n^{(4)}, \\ 1 + \frac{1}{2n\ln^2 n}\left[a_n + 2n^2 + \frac{\pi}{4} - x - \frac{1}{2}\sin 2\left(a_n + 2n^2 + \frac{\pi}{4} - x\right)\right] & \text{при } x \in I_n^{(5)}, \end{cases}$$

где

$$I_n^{(1)} = \left[a_n - \frac{\pi}{4},\ a_n + \frac{\pi}{4}\right],\quad I_n^{(2)} = \left[a_n + \frac{\pi}{4},\ a_n + n^2 - \frac{\pi}{2}\right],$$

$$I_n^{(3)} = \left[a_n + n^2 - \frac{\pi}{2},\ a_n + n^2 + \frac{\pi}{2}\right],\quad I_n^{(4)} = \left[a_n + n^2 + \frac{\pi}{2},\ a_n + 2n^2 - \frac{\pi}{4}\right],$$

$$I_n^{(5)} = \left[a_n + 2n^2 - \frac{\pi}{4},\ a_n + 2n^2 + \frac{\pi}{4}\right],$$

$$I_n = \bigcup_{j=1}^{5} I_n^{(j)}.$$

Легко проверить, что так определенная функция дважды непрерывно дифференцируема. Очевидно, что $|\varphi'(x)| \leqslant (n\ln^2 n)^{-1}$ при $x \in I_n$, поэтому выполняется условие 1). Покажем, что условие 2) не выполняется. Действительно,

$$\int_0^{\infty} \frac{\{\varphi'(x)\}^2}{\varphi(x)}\,dx = \sum_{n=2}^{\infty} \int_{I_n} \frac{\{\varphi'(x)\}^2}{\varphi(x)}\,dx,$$

$$\int_{I_n} \frac{\{\varphi'(x)\}^2}{\varphi(x)}\,dx = \varphi'(x)\ln\varphi(x)\Big|_{a_n - \frac{\pi}{4}}^{a_n + 2n^2 + \frac{\pi}{4}} - \int_{I_n} \varphi''(x)\ln\varphi(x)\,dx =$$

$$= -\int_{I_n^{(1)}} \varphi''\ln\varphi\,dx - \int_{I_n^{(2)}} \varphi''\ln\varphi\,dx - \int_{I_n^{(5)}} \varphi''\ln\varphi\,dx.$$

Легко видеть, что $\ln\varphi(x)\geqslant 0$ на I_n, $\varphi''(x)\geqslant 0$ на $I_n^{(1)}$ и на $I_n^{(5)}$, $\varphi''(x)\leqslant 0$ на $I_n^{(3)}$. Поэтому

$$\int\limits_{I_n}\frac{\{\varphi'(x)\}^2}{\varphi(x)}\,dx\geqslant -\max_{x\in I_n^{(1)}}\ln\varphi\int\limits_{I_n^{(1)}}\varphi''\,dx-\min_{x\in I_n^{(3)}}\ln\varphi\int\limits_{I_n^{(3)}}\varphi''\,dx-$$

$$-\max_{x\in I_n^{(5)}}\ln\varphi\int\limits_{I_n^{(5)}}\varphi''(x)\,dx=-\ln\left(1+\frac{\pi}{4n\ln^2 n}\right)\varphi'\left(a_n+\frac{\pi}{4}\right)-$$

$$-\ln\left(1+\frac{n^2-\frac{\pi^2}{2}}{n\ln^2 n}\right)\left\{\varphi'\left(a_n+n^2+\frac{\pi}{2}\right)-\varphi'\left(a_n+n^2-\frac{\pi}{2}\right)\right\}-$$

$$-\ln\left(1+\frac{\pi}{4n\ln^2 n}\right)\varphi'\left(a_n=2n^2-\frac{\pi}{4}\right).$$

Но

$$\varphi'\left(a_n+\frac{\pi}{4}\right)=-\varphi'\left(a_n+2n^2-\frac{\pi}{4}\right)=\varphi'\left(a_n+n^2-\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=-\varphi'\left(a_n+n^2+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{n\ln^2 n}.$$

Отсюда

$$\int\limits_{I_n}\frac{\{\varphi'(x)\}^2}{\varphi(x)}\,dx\geqslant\frac{2}{n\ln^2 n}\ln\left(1+\frac{n^2-\frac{\pi}{2}}{n\ln^2 n}\right)\sim\frac{2}{n\ln n}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^\infty\frac{\{\varphi'(x)\}^2}{\varphi(x)}\,dx=+\infty$$

и условие 2) не выполняется.

Покажем, что выполняются условия А′, Б′ и В′. Условие А′ имеет место, так как

$$\int\limits_0^\infty|\varphi''(x)|\,dx=\sum_{n=2}^\infty\left\{\int\limits_{I_n^{(1)}\cup I_n^{(3)}\cup I_n^{(5)}}|\varphi''(x)|\,dx\right\}\leqslant 4\sum_{n=2}^\infty\frac{1}{n\ln^2 n}<\infty. \tag{3}$$

Легко видеть, что на I_n выполняется

$$1\leqslant\varphi(x)<1+\frac{n}{\ln^2 n},\quad |\varphi''(x)|\leqslant\frac{1}{n\ln^2 n},$$

а вне $\bigcup\limits_{n=2}^\infty I_n$ имеем $\varphi''(x)\equiv 0$.

Поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\varphi(x)\varphi''(x)=0.$$

Условие Б′, очевидно, выполняется. Так как $|\varphi(x)\varphi''(x)|\leqslant K$, имеем

$$\int\limits_0^\infty\varphi(x)\{\varphi''(x)\}^2\,dx\leqslant K\int\limits_0^\infty|\varphi''(x)|\,dx<\infty,$$

в силу (3), и условие В′ также выполняется.

Условимся считать, что во всех формулах, которые нам будут встречаться, для тех значений аргумента, при которых аналитическое выражение становится неопределенным, значение функции доопределяется по непрерывности.

Определим функции $t=t(x, y)$, $\eta=\eta(x, y)$, $x+iy\in S\cap\{\operatorname{Re} z>x_1\}$, как решение системы уравнений $\left(t\geqslant t_0,\ |\eta|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\varphi(t)\sqrt{1+\{\varphi'(t)\}^2}}{\varphi'(t)}\sin\left(\dfrac{2\eta}{\pi}\operatorname{arctg}\varphi'(t)\right)=y, \\ t-\dfrac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}+\dfrac{\varphi(t)\sqrt{1+\{\varphi'(t)\}^2}}{\varphi'(t)}\cos\left(\dfrac{2\eta}{\pi}\operatorname{arctg}\varphi'(t)\right)=x. \end{cases} \tag{4}$$

Ниже будет показано, что если выполняется условие Б, то при t_0 достаточно большом существует однозначное решение системы (3) $t=t(x, y)$, $\eta=\eta(x, y)$.

Мы докажем такую теорему.

Теорема. *Пусть функция $w=w(z)$ конформно отображает полуполосу S, для которой выполняются условия* А, Б, В *на полуполосу S_0. Тогда при $x\to+\infty$ равномерно относительно y выполняется*

$$w(z)=w(x+iy)=\lambda+\frac{\pi}{2}\int\limits_{t_0}^{t(x,y)}\frac{\varphi'(t)\,dt}{\varphi(t)\operatorname{arctg}\varphi'(t)}+i\eta(x, y)+o(1), \tag{5}$$

где λ — некоторая действительная постоянная.

Чтобы показать связь формулы (5) с формулой С. Е. Варшавского (1), заметим, что если дополнительно к условиям теоремы предположить, что функция $\varphi'(x)$ удовлетворяет условию (2), то формула (5) переходит в формулу (1). В самом деле, в этом случае выполняются условия 1) и 2) и из уравнений (4) получаем

$$x=t+O\left(\varphi(t)\varphi'(t)\right)=t+o(1),\quad t=x+o(1),$$

$$\eta=\left(1+o(1)\right)\frac{\pi}{2}\frac{y}{\varphi(t)}=\frac{\pi}{2}\frac{y}{\varphi(x)}+o(1)=\frac{\pi}{2}\frac{y}{\varphi(x)}+o(1),$$

$$\int\limits_{t_0}^{t(x,y)}\frac{\varphi'(t)\,dt}{\varphi(t)\operatorname{arctg}\varphi'(t)}=\int\limits_0^x\frac{dt}{\varphi(t)}-\int\limits_0^{t_0}\frac{dt}{\varphi(t)}+\int\limits_{t_0}^x\frac{1}{\varphi(t)}\left\{\frac{\varphi'(t)}{\operatorname{arctg}\varphi'(t)}-1\right\}dt+$$

$$+\int\limits_x^{x+o(1)}\frac{\varphi'(t)\,dt}{\varphi(t)\operatorname{arctg}\varphi'(t)}=\int\limits_0^x\frac{dt}{\varphi(t)}-\int\limits_0^{t_0}\frac{dt}{\varphi(t)}+\int\limits_{t_0}^{\infty}\frac{1}{\varphi(t)}\left\{\frac{\varphi'(t)}{\operatorname{arctg}\varphi'(t)}-1\right\}dt+o(1).$$

Здесь интеграл в пределах от t_0 до ∞ сходится, вследствие условия 2).

Для доказательства теоремы нам потребуется несколько лемм.

Введем несколько обозначений. Предположим, что $\varphi'(t)\neq0$. Проведем окружность с центром на $\operatorname{Im} z=y=0$, проходящую через точки $\left(t,\ \pm\varphi(t)\right)$ и ортогональную к кривым $y=\pm\varphi(x)$ в этих точках. Обозначим через Γ_t меньшую из двух дуг, на которые точки $\left(t,\ \pm\varphi(t)\right)$ делят эту окружность, через $\left(x_0(t),\ 0\right)$ и $R(t)$ — соответственно, центр и радиус окружности. Если $\varphi'(t)=0$, то через Γ_t обозначим отрезок, соединяющий точки $\left(t,\ \pm\varphi(t)\right)$. Через $\left(\psi(t),\ 0\right)$ обозначим точку пересечения Γ_t с действительной осью.

Лемма 1. *Для того, чтобы через каждую точку области* $\overline{S}\cap\{\mathrm{Re}\,z\geqslant x_1\}$, *где* x_1 *— достаточно большое число, проходила одна и только одна кривая* Γ_t, *необходимо и достаточно, чтобы функция* $\psi(t)$ *была строго монотонно возрастающей, начиная с некоторого значения* $t=t_1$.

Нетрудно найти аналитическое выражение для $\psi(t)$:

$$\psi(t)=t+\frac{\varphi(t)\varphi'(t)}{1+\sqrt{1+\{\varphi'(t)\}^2}}.$$

Легко видеть, что $\psi(t)$ непрерывная функция. Кроме того, $\varlimsup\limits_{t\to+\infty}\psi(t)=+\infty$. В самом деле, это может не выполняться лишь в том случае, когда $\varphi'(t)<0$ для всех t, начиная с некоторого. Но в этом случае $\varphi(t)=O(1)$ и $\varlimsup\limits_{t\to+\infty}\varphi'(t)=0$, следовательно, $\varlimsup\limits_{t\to+\infty}\psi(t)=+\infty$.

Теперь очевидно, что если функция $\psi(t)$ не является строго монотонно возрастающей, начиная с некоторого t_1, то существуют последовательности t_n' и t_n'' такие, что $t_n'<t_n''$, $t_n'\to+\infty$, $\psi(t_n')=\psi(t_n'')\to+\infty$. Но тогда через точку $\left(\psi(t_n'),\ 0\right)$ проходят кривые $\Gamma_{t_n'}$ и $\Gamma_{t_n''}$.

Необходимость условия доказана.

Предположим теперь, что при $t\geqslant t_1$ функция $\psi(t)$ строго монотонно возрастает. Тогда $\psi(t)\to+\infty$ при $t\to+\infty$. Ясно, что две кривые Γ_t и $\Gamma_{t'}$ не могут пересекаться на действительной оси, если $t\neq t'$, $t\geqslant t_1^0$, $t'\geqslant t_1^0$. Следовательно, если Γ_t и $\Gamma_{t'}$ пересекаются, то в двух различных симметричных относительно действительной оси точках, причем в точке пересечения кривые не касаются. Никакая из пересекающихся кривых Γ_t и $\Gamma_{t'}$ не может быть отрезком прямой. В самом деле, предположим, что $\Gamma_{t'}$ — отрезок прямой, а Γ_t — дуга окружности. Если $t'>t$ $(t'<t)$, то $\psi(t)>t'=\psi(t')$ $\left(\psi(t)<\right.$ $\left.<t'=\psi(t')\right)$. Это противоречит условию строгой монотонности функции $\psi(t)$. Пусть теперь для определенности $t'>t$. Предположим, что $\varphi'(t)>0$. Тогда $t'>\psi(t)$. В самом деле, на сегменте $[t,\ \psi(t)]$ выполняется $\varphi'(t)>0$. В противном случае было бы $\varphi'(t^*)=0$ для некоторого $t^*\in[t,\ \psi(t)]$ и дуга Γ_t пересекалась бы с отрезком прямой Γ_{t^*}. Но если $t'>\psi(t)$, то должно быть $\psi(t')<\psi(t)$, чтобы Γ_t и $\Gamma_{t'}$ пересекались. Это противоречит условию монотонности $\psi(t)$. Пусть теперь $\varphi'(t)<0$. Чтобы кривые Γ_t и $\Gamma_{t'}$ пересекались, необходимо, чтобы $\varphi'(t')<0$. Учитывая условие монотонности, видим, что $\varphi(t')>\varphi(t)$. Но тогда на $(t,\ t')$ существует точка t^*, в которой $\varphi'(t^*)=0$, и дуга $\Gamma_{t'}$ пересекалась бы с отрезком Γ_{t^*}. Опять приходим к противоречию. Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть, начиная с некоторого* t_1, *функция* $\psi(t)$ *строго монотонно стремится к* $+\infty$. *Тогда при* $t>t_0$, $t_0\geqslant\max\left(t_1,\ \psi(t_1)\right)$ *кривая* Γ_t, *кроме своих концов, лежит внутри* S.

В самом деле, если кривая Γ_t проходила бы через точку $\left(t^*,\ \varphi(t^*)\right)$, где t^* лежит между t и $\psi(t)$, то она пересекалась бы с кривой Γ_{t^*}.

Следствие 2. *Если S удовлетворяет условию Б, то $S(t_0)$ – часть S, лежащая направо от кривой Γ_{t_0}, где t_0 – достаточно большое число, равно $\bigcup\limits_{t>t_0} \Gamma_t$, причем через каждую точку из $\bar{S}(t_0)$ проходит одна и только одна кривая Γ_t, $t>t_0$. Для каждой точки $(x, y)\in\bar{S}(t_0)$ система (4) имеет однозначные решения $t=t(x, y)$, $\eta=\eta(x, y)$.*

Действительно,

$$\psi'(t)=\frac{\varphi(t)\varphi''(t)+(1+\{\varphi'(t)\}^2)\left(1+\sqrt{1+\{\varphi'(t)\}^2}\right)}{\sqrt{1+\{\varphi'(t)\}^2}\left(1+\sqrt{1+\{\varphi'(t)\}^2}\right)}$$

и из условия Б вытекает, что $\psi'(t)>0$ при $t\geqslant x_0$. Из леммы 1 и следствия 1 следует первое утверждение следствия 2. Через $(x, y)\in\bar{S}(t_0)$ проходит одна и только одна кривая Γ_t, тем самым определяется однозначная функция $t=t(x, y)$. Обозначим через $\varkappa(x, y)$ отношение длины части кривой Γ_t между точками $(x, \pm y)$ к длине всей кривой Γ_t, $t=t(x, y)$.

Положим

$$\eta(x, y)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\varkappa(x, y), & y\geqslant 0,\\ -\dfrac{\pi}{2}\varkappa(x, y), & y<0.\end{cases}$$

Функция $\eta(x, y)$ также определяется однозначно. Легко убедиться, что уравнения (4) выражают x и y через так определенные величины $t(x, y)$ и $\eta(x, y)$. Таким образом, определенные функции $t(x, y)$ и $\eta(x, y)$ удовлетворяют системе (4). Предположим, что при фиксированных x и y системе (4) удовлетворяет пара точек (t', η'), (t'', η''), $t', t''\geqslant t_0$, $|\eta'|$, $|\eta''|\leqslant\frac{\pi}{2}$. Если $t'\neq t''$, то в точке $(x, y)\in\bar{S}(t_0)$ пересекались бы две кривые $\Gamma_{t'}$ и $\Gamma_{t''}$, что невозможно. Значит, $t'=t''=t$. Но при фиксированном t левые части равенств (4) являются строго монотонными функциями от η и $\eta'=\eta''$. При $\varphi'(x)=0$ система (4) имеет вид:

$$\begin{cases}\dfrac{2\varphi(t)\eta}{\pi}=y,\\ t=x.\end{cases}\tag{4'}$$

Следствие доказано.

Лемма 2. *Пусть полуполоса $S_1=\left\{\xi\geqslant 0,\ |\eta|\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$ в ζ-плоскости ($\zeta=\xi+i\eta$) отображается квазиконформно с характеристикой $p(\zeta)=p_{w/\zeta}$ на полуполосу $S_0=\left\{u\leqslant 0,\ |v|\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$ в w-плоскости ($w=u+iv$). Если*

$$\iint\limits_{S_1}\left(p(\zeta)-1\right)d\xi\,d\eta<\infty,\tag{6}$$

то существует предел

$$\lim_{\xi\to+\infty}(w(\zeta)-\zeta)=\lambda,\tag{7}$$

где λ – действительное число.

Для нашей статьи достаточно рассматривать квазиконформные отображения как однолистные непрерывные отображения, которые всюду в области, за возможным исключением конечного числа гладких кривых, непрерывно дифференцируемы. Основные свойства квазиконформных отображений считаем известными (см., например, [2]). Рассмотрим квазиконформное отображение $w^*(\zeta)$ полуполосы $S_1^* = \left\{ \xi \geqslant 0,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \eta \leqslant \frac{3\pi}{2} \right\}$ на полуполосу $S_0^* = \left\{ u \geqslant 0,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant v \leqslant \frac{3\pi}{2} \right\}$, которое определяется так:

$$w = w^*(\zeta) = \begin{cases} w(\zeta), & \zeta \in S_1, \\ w(\bar{\zeta} + \pi i), & \zeta \in S_1^* \setminus S_1. \end{cases}$$

Очевидно,

$$w^*\left(x - \frac{\pi}{2}\, i\right) = w^*\left(x + \frac{3}{2}\, \pi i\right).$$

Рассмотрим квазиконформное отображение $s = s(t)$ области $D_1 = \{ 0 < |t| \leqslant 1 \}$ на область $D_2 = \{ 0 < |s| \leqslant 1 \}$, $t = t_1 + it_2$, $s = s_1 + is_2$, которое определяется формулой

$$s = s(t) = \exp\left\{ -w^*\left(\ln \frac{1}{t}\right)\right\}, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{Im} \ln \frac{1}{t} \leqslant \frac{3\pi}{2},$$

или в параметрической форме: $s = e^{-w}$, $t = e^{-\zeta}$, $w = w^*(\zeta)$, $\zeta \in S_1^*$. Очевидно, что $p_{s/t} = p_{w^*/\zeta}$ и что $s(-\bar{t}) = \overline{s(t)}$. Легко найти

$$\iint\limits_{D_1} (p_{s/t} - 1) \frac{dt_1\, dt_2}{|t|^2} = 2 \iint\limits_{\substack{0 < |t| \leqslant 1 \\ \operatorname{Re} t > 0}} (p_{s/t} - 1) \frac{dt_1\, dt_2}{|t|^2} =$$

$$= 2 \iint\limits_{S_1} \left(p(\zeta) - 1\right) \left|\frac{dt}{d\zeta}\right|^2 \frac{d\xi\, d\eta}{|e^{-\zeta}|^2} = 2 \iint\limits_{S} \left(p(\zeta) - 1\right) d\xi\, d\eta < \infty.$$

Тогда по теореме П. П. Белинского [3], [4] существует предел

$$\lim_{t \to 0} \frac{s(t)}{t} = A \neq 0,\ \infty. \tag{8}$$

При $\operatorname{Re} t = 0$, $\operatorname{Im} t < 0$ имеем $\operatorname{Re} s(t) = 0$, $\operatorname{Im} s(t) < 0$. Поэтому A — положительное число. Из (8) вытекает

$$\lim_{\xi \to +\infty} \left(w^*(\zeta) - \zeta\right) = -\ln A = \lambda, \quad \operatorname{Im} \lambda = 0.$$

В частности, при $\zeta \in S_1$ получаем (7).

Лемма 3. *При $0 < x < \infty$ функции*

$$\Lambda_1(x) = \frac{3\left[(\operatorname{arc\,tg} x)^2 - x^2\right] + 2x^2 (\operatorname{arc\,tg} x)^2}{x^3 (\operatorname{arc\,tg} x)^3} (1 + x^2)^{1/2},$$

$$\Lambda_2(x) = \frac{2\left(\sqrt{1 + x^2} - 1 + x - \operatorname{arc\,tg} x\right] - x \operatorname{arc\,tg} x}{x (\operatorname{arc\,tg} x)^2}$$

ограничены сверху и имеют положительные пределы при $x \to 0+$.

Методами математического анализа можно установить, что

$$\lim_{x \to +\infty} \Lambda_1(x) = \frac{4(\pi^2 - 6)}{\pi^3}, \quad \lim_{x \to +\infty} \Lambda_2(x) = \frac{2(8 - \pi)}{\pi^2},$$

$$\lim_{x \to 0+} \Lambda_1(x) = \frac{1}{5}, \quad \lim_{x \to 0+} \Lambda_2(x) = \frac{2}{3}.$$

Функции $\Lambda_1(x)$ и $\Lambda_2(x)$ непрерывны на $(0, \infty)$, следовательно, они ограничены. Обозначим $\sup\limits_{x \in (0, \infty)} \Lambda_j(x) = M_j$.

Мы определим

$$\Lambda_1(0)=\frac{1}{5}, \quad \Lambda_2(0)=\frac{2}{3}.$$

Тогда $\Lambda_j(x)$ непрерывны на $[0, \infty)$.

Перейдем теперь к доказательству теоремы. Рассмотрим квазиконформное отображение полуполосы $\bar{S}=\{|y|\leqslant\varphi(x),\ x\geqslant 0\}$ на полуполосу $S_1=\left\{|\eta|\leqslant\frac{\pi}{2},\ \xi\geqslant 0\right\}$, которое определяется так. В $\bar{S}(t_0)\subset\bar{S}$, где t_0 определяется согласно следствию 2, отображение задается формулами

$$\begin{cases} \xi=1+\dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_{t_0}^{t(x,\,y)}\dfrac{\varphi'(t)\,dt}{\varphi(t)\operatorname{arc\,tg}\varphi'(t)}, \\ \eta=\eta(x,\ y), \end{cases} \tag{9}$$

где функции $t=t(x,\ y)$ и $\eta=\eta(x,\ y)$ определяются из системы (4). Это отображение переводит $\bar{S}(t_0)$ в $\left\{\xi\geqslant 1,\ |\eta|\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$.

Действительно, при условиях нашей теоремы

$$\int_{t_0}^{\infty}\frac{\varphi'(t)\,dt}{\varphi(t)\operatorname{arc\,tg}\varphi'(t)}=\infty,$$

так как при $\varphi'(t)\underset{t\to\infty}{\to}0$ имеем $\varphi(t)=o(t)$, а при $\varphi'(t)\to\gamma$, $0<\gamma\leqslant\infty$, выполняется $\varphi(t)\to\infty$ и

$$\int_{t_0}^{t}\frac{\varphi'(t)\,dt}{\varphi(t)\operatorname{arc\,tg}\varphi'(t)}\geqslant\frac{2}{\pi}\ln\frac{\varphi(t)}{\varphi(t_0)}\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}\infty.$$

Замкнутую область $\left(\overline{S\setminus S(t_0)}\right)$ отобразим квазиконформно с ограниченной характеристикой на прямоугольник $\left\{|\eta|\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\xi\leqslant 1\right\}$ так, чтобы на Γ_{t_0} соответствие задавалось формулами (9), а вершины $\left(0,\pm\varphi(0)\right)$ переходили, соответственно, в вершины $\left(0,\ \pm\frac{\pi}{2}\right)$. Рассмотрим квазиконформное отображение S_1 на полуполосу $\bar{S}_0$ при помощи функции $w=w\left(z(\zeta)\right)$. Очевидно, что если мы покажем, что для этого отображения выполняется условие (6), то по лемме 2 будем иметь

$$w\left(z(\zeta)\right)=\zeta+\lambda+o(1) \quad \text{при} \quad \xi\to+\infty,$$

или

$$w(z)=\zeta(z)+\lambda+o(1) \quad \text{при} \quad x\to+\infty.$$

Учитывая (9), сразу получаем утверждение теоремы.

Остается проверить справедливость условия (6). Отображение $w(z)$ конформное, поэтому $p_{w/\zeta}=p_{z/\zeta}=p(\zeta)$. Очевидно, в (6) можно брать интеграл по $\left\{\xi\geqslant 1,\ |\eta|\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$. Поэтому мы можем пользоваться формулами (9). Известно, что

$$p(\zeta)+\frac{1}{p(\zeta)}=\frac{x_\xi'^2+x_\eta'^2+y_\xi'^2+y_\eta'^2}{x_\xi' y_\eta'-x_\eta' y_\xi'}.$$

Отсюда

$$p(\zeta)+\frac{1}{p(\zeta)}-2=\frac{(x'_\xi-y'_\eta)^2+(x'_\eta+y'_\xi)^2}{x'_\xi y'_\eta-x'_\eta y'_\xi}=K^2(\zeta),$$

$$p(\zeta)-1=\frac{K^2(\zeta)}{2}+|K(\zeta)|\sqrt{1+\frac{K^2(\zeta)}{4}}\leqslant|K(\zeta)|+K^2(\zeta).$$

Нам будет удобно перейти от $(\xi,\ \eta)$-плоскости к $(t,\ \eta)$-плоскости, где

$$\xi=1+\frac{\pi}{2}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\varphi'(t)\,dt}{\varphi(t)\operatorname{arctg}\varphi'(t)}.$$

Тогда

$$\int\limits_{1}^{\infty}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(p(\zeta)-1\right)d\xi\,d\eta=\int\limits_{t_0}^{\infty}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{p(t,\ \eta)-1\right\}\frac{d\xi}{dt}\,dt\,d\eta\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{t_0}^{\infty}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{|K|+K^2\right\}\frac{d\xi}{dt}\,dt\,d\eta. \tag{10}$$

Из (4) легко найти

$$x'_\xi=\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dt}{d\xi}=\frac{dt}{d\xi}\left\{\frac{\varphi\varphi''}{\varphi'^2}+\frac{\varphi'^2(1+\varphi'^2)-\varphi\varphi''}{\varphi'^2\sqrt{1+\varphi'^2}}\cos\left(\frac{2\eta}{\pi}\operatorname{arctg}\varphi'\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{2\eta}{\pi}\frac{\varphi\varphi''}{\varphi'\sqrt{1+\varphi'^2}}\sin\left(\frac{2\eta}{\pi}\operatorname{arctg}\varphi'\right)\right\}=\frac{dt}{d\xi}\left\{\sqrt{1+\varphi'^2}\cos\left(\frac{2\eta}{\pi}\operatorname{arctg}\varphi'\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\varphi\varphi''}{\varphi'^2\sqrt{1+\varphi'^2}}\left[\sqrt{1+\varphi'^2}-\cos\left(\frac{2\eta}{\pi}\operatorname{arctg}\varphi'\right)-\frac{2\eta}{\pi}\varphi'\sin\left(\frac{2\eta}{\pi}\operatorname{arctg}\varphi'\right)\right]\right\},$$

$$y'_\xi=\frac{dt}{d\xi}\left\{\frac{\varphi'^2(1+\varphi'^2)-\varphi\varphi''}{\varphi'^2\sqrt{1+\varphi'^2}}\sin\left(\frac{2\eta}{\pi}\operatorname{arctg}\varphi'\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\varphi\sqrt{1+\varphi'^2}}{\varphi'}\cos\left(\frac{2\eta}{\pi}\operatorname{arctg}\varphi'\right)\frac{2\eta}{\pi}\frac{\varphi''}{1+\varphi'^2}\right\}=\frac{dt}{d\xi}\left\{\sqrt{1+\varphi'^2}\sin\left(\frac{2\eta}{\pi}\operatorname{arctg}\varphi'\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\varphi\varphi''}{\varphi'^2\sqrt{1+\varphi'^2}}\left[\sin\left(\frac{2\eta}{\pi}\operatorname{arctg}\varphi'\right)-\frac{2\eta}{\pi}\varphi'\cos\left(\frac{2\eta}{\pi}\operatorname{arctg}\varphi'\right)\right]\right\},$$

$$x'_\eta=-\frac{2\varphi\sqrt{1+\varphi'^2}\operatorname{arctg}\varphi'}{\pi\varphi'}\sin\left(\frac{2\eta}{\pi}\operatorname{arctg}\varphi'\right)=-\frac{dt}{d\xi}\sqrt{1+\varphi'^2}\sin\left(\frac{2\eta}{\pi}\operatorname{arctg}\varphi'\right),$$

$$y'_\eta=\frac{2\varphi\sqrt{1+\varphi'^2}\operatorname{arctg}\varphi'}{\pi\varphi'}\cos\left(\frac{2\eta}{\pi}\operatorname{arctg}\varphi'\right)=\frac{dt}{d\xi}\sqrt{1+\varphi'^2}\cos\left(\frac{2\eta}{\pi}\operatorname{arctg}\varphi'\right),$$

так как

$$\frac{d\xi}{dt}=\frac{\pi\varphi'}{2\varphi\operatorname{arctg}\varphi'}.$$

Теперь, обозначив $\gamma=\frac{2\eta}{\pi}\operatorname{arctg}\varphi'$, имеем после простых, хотя и громоздких, вычислений:

$$(x'_\xi-y'_\eta)^2+(x'_\eta+y'_\xi)^2=\left(\frac{dt}{d\xi}\right)^2\frac{(\varphi\varphi'')^2}{\varphi'^4(1+\varphi'^2)}\left[2+\frac{4\eta^2\varphi'^2}{\pi^2}+\right.$$
$$\left.+\varphi'^2-2\sqrt{1+\varphi'^2}\cos\gamma-\frac{4\eta}{\pi}\varphi'\sqrt{1+\varphi'^2}\sin\gamma\right],$$
$$x'_\xi y'_\eta-x'_\eta y'_\xi=\left(\frac{dt}{d\xi}\right)^2\left\{1+\varphi'^2+\frac{\varphi\varphi''}{\varphi'^2}\left[\sqrt{1+\varphi'^2}\cos\gamma-1\right]\right\}=\left(\frac{dt}{d\xi}\right)^2\Phi.$$
$$K^2=\frac{\varphi^2\varphi''^2\left\{2+\left(\frac{4\eta^2}{\pi^2}+1\right)\varphi'^2-2\sqrt{1+\varphi'^2}\left[\cos\gamma+\frac{2\eta}{\pi}\varphi'\sin\gamma\right]\right\}}{\varphi'^4(1+\varphi'^2)\Phi}.$$

Оценим снизу величину Φ. Очевидно,

$$\sqrt{1+\varphi'^2}\cos\gamma\geqslant\sqrt{1+\varphi'^2}\cos(\operatorname{arctg}\varphi')=1.$$

Поэтому, учитывая условие Б, получаем, что

$$\Phi\geqslant1-\varphi'^2-q\frac{(1+\varphi'^2)\left(\sqrt{1+\varphi'^2}+1\right)}{\varphi'^2}\left(\sqrt{1+\varphi'^2}-1\right)=(1+\varphi'^2)(1-q).$$

Отсюда

$$K^2\leqslant\frac{1}{1-q}\frac{\varphi^2\varphi''^2}{\varphi'^4(1+\varphi'^2)^2}\left\{2+\left(\frac{4\eta^2}{\pi^2}+1\right)\varphi'^2-2\sqrt{1+\varphi'^2}\left[\cos\gamma+\frac{2\eta}{\pi}\varphi'\sin\gamma\right]\right\}=$$
$$=\frac{1}{1-q}\left\{\frac{\varphi\varphi''}{\varphi'^2(1+\varphi'^2)}\right\}^2\left\{\left[\sqrt{1+\varphi'^2}\cos\gamma-1\right]^2+\left[\frac{2\eta}{\pi}\varphi'-\sqrt{1+\varphi'^2}\sin\gamma\right]^2\right\}.\quad(11$$

Теперь получаем

$$\int_1^\infty\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}K^2\frac{d\xi}{dt}\,dt\,d\eta\leqslant\frac{\pi}{2(1-q)}\int_1^\infty\frac{\varphi\varphi''^2\,dt}{\varphi'^3(1+\varphi'^2)^2\operatorname{arctg}\varphi'}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{2+\left(\frac{4\eta^2}{\pi^2}+1\right)\varphi'^2-\right.$$
$$\left.-2\sqrt{1+\varphi'^2}\left[\cos\gamma+\frac{2\eta}{\pi}\varphi'\sin\gamma\right]\right\}d\eta.$$

Но, как показывает элементарный подсчет,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{2+\left(\frac{4\eta^2}{\pi^2}+1\right)\varphi'^2-2\sqrt{1+\varphi'^2}\left[\cos\gamma+\frac{2\eta}{\pi}\varphi'\sin\gamma\right]\right\}d\eta=$$
$$=2\pi\left\{1+\frac{2\varphi'^2}{3}-\frac{\varphi'^2}{(\operatorname{arctg}\varphi')^2}\right\}.$$

Поэтому

$$\int_1^\infty\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}K^2\frac{d\xi}{dt}\,dt\,d\eta\leqslant\frac{\pi^2}{1-q}\int_1^\infty\frac{\varphi\varphi''\left\{3\left[(\operatorname{arctg}\varphi')^2-\varphi'^2\right]+2\varphi'^2(\operatorname{arctg}\varphi')^2\right\}}{3\varphi'^3(1+\varphi'^2)^2(\operatorname{arctg}\varphi')^3}\,dt=$$
$$=\frac{\pi^2}{3(1-q)}\int_1^\infty\Lambda_1\left(|\varphi'(t)|\right)\frac{\varphi\varphi''^2}{(1+\varphi'^2)^{5/2}}\,dt\leqslant\frac{\pi^2M_1}{3(1-q)}\int_1^\infty\frac{\varphi\varphi''^2}{(1+\varphi'^2)^{5/2}}\,dt<\infty,$$

следствие условия Б.

Из (11) выводим, что

$$|K| \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-q}}\ \frac{\varphi|\varphi''|}{\varphi'^2(1+\varphi'^2)}\left\{\left|\sqrt{1+\varphi'^2}\cos\gamma-1\right|+\left|\frac{2\eta}{\pi}\ \varphi'-\sqrt{1+\varphi'^2}\sin\gamma\right|\right\}.$$

Мы уже видели, что $\sqrt{1+\varphi'^2}\cos\gamma-1\geqslant 0$. Поэтому

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\sqrt{1+\varphi'^2}\cos\gamma-1\right|d\eta=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\sqrt{1+\varphi'^2}\cos\gamma-1\right\}d\eta=\pi\left\{\frac{\varphi'(t)}{\operatorname{arctg}\varphi'(t)}-1\right\}.$$

Далее

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{2\eta}{\pi}\ \varphi'-\sqrt{1+\varphi'^2}\sin\left(\frac{2\eta}{\pi}\ \operatorname{arctg}\varphi'\right)\right|d\eta=$$

$$=2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left|\sqrt{1+\varphi'^2}\sin\left(\frac{2\eta}{\pi}\ \operatorname{arctg}|\varphi'|\right)-\frac{2\eta}{\pi}\ |\varphi'|\right|d\eta=$$

$$=2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\sqrt{1+\varphi'^2}\sin\left(\frac{2\eta}{\pi}\ \operatorname{arctg}|\varphi'|\right)-\frac{2\eta}{\pi}\ |\varphi'|\right\}d\eta.$$

Действительно, выражение в фигурных скобках неотрицательное, так как $\left(0\leqslant\eta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$

$$\int\limits_{0}^{\frac{2\eta}{\pi}}\cos(x\operatorname{arctg}|\varphi'|)\,dx\geqslant\int\limits_{0}^{\frac{2\eta}{\pi}}\cos(\operatorname{arctg}|\varphi'|)\,dx,$$

$$\frac{\sin\left(\frac{2\eta}{\pi}\ \operatorname{arctg}|\varphi'|\right)}{\operatorname{arctg}|\varphi'|}\geqslant\frac{2\eta}{\pi}\ \frac{1}{\sqrt{1+\varphi'^2}}.$$

Тогда

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{2\eta}{\pi}\ \varphi'-\sqrt{1+\varphi'^2}\sin\left(\frac{2\eta}{\pi}\ \operatorname{arctg}\varphi'\right)\right|d\eta=\pi\left\{\frac{\sqrt{1+\varphi'^2}-1}{\operatorname{arctg}|\varphi'|}-\frac{|\varphi'|}{2}\right\}.$$

Теперь

$$\int\limits_{1}^{\infty}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|K|\ \frac{d\xi}{dt}\ dt\,d\eta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{1-q}}\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\varphi|\varphi''|}{|\varphi'|^2(1+\varphi'^2)}\left\{\frac{\sqrt{1+\varphi'^2}-1+|\varphi'|}{\operatorname{arctg}|\varphi'|}-\frac{|\varphi'|}{2}-1\right\}\frac{\pi|\varphi'|}{2\varphi\operatorname{arctg}|\varphi'|}\ dt=$$

$$=\frac{\pi^2}{4\sqrt{1-q}}\int\limits_{1}^{\infty}\frac{|\varphi''|\left\{2\left[\sqrt{1+\varphi'^2}-1+|\varphi'|-\operatorname{arctg}|\varphi'|\right]-|\varphi'|\operatorname{arctg}|\varphi'|\right\}}{(1+\varphi'^2)(\operatorname{arctg}|\varphi'|)^2|\varphi'|}\ dt=$$

$$=\frac{\pi^2}{4\sqrt{1-q}}\int\limits_{1}^{\infty}\frac{|\varphi''(t)|}{1+\{\varphi'(t)\}^2}\ \Lambda_2(|\varphi'|)\,dt\leqslant\frac{\pi^2M_2}{4\sqrt{1-q}}\int\limits_{1}^{\infty}\frac{|\varphi''(t)|\,dt}{1+\{\varphi'(t)\}^2}<\infty,$$

вследствие условия А. Из (10) следует, что интеграл

$$\int_1^{\infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \big(p(\zeta)-1\big)\, d\xi\, d\eta < \infty,$$

следовательно, теорема доказана.

Львовский ордена Ленина
Государственный университет
им. И. Франко

Поступило в редакцию
19.XI.1965

ЛИТЕРАТУРА

2. С. Е. Варшавский, Конформное отображение бесконечных полос, сб. переводов „Математика", 2, № 4, 67–116, 1958.
2. Л. И. Волковыский, Квазиконформные отображения, изд-во Львовского ун-та, 1954.
3. П. П. Белинский, Поведение квазиконформного отображения в изолированной точке, ДАН СССР, 91, 709–710, 1953.
4. П. П. Белинский, Поведение квазиконформного отображения в изолированной особой точке, Уч. зап. Львовского ун-та, 29, сер. мех.-матем., вып. 6, 58–70, 1954.

SIMETRIŠKŲ PUSJUOSČIŲ IR KAMPUOTŲ SRIČIŲ KONFORMIŠKAS VAIZDAVIMAS

A. GOLDBERGAS, T. STROČIK

(Reziumė)

Įrodoma sekanti teorema. Sakykime, funkcija $w=w(z)$ konformiškai ir vienvienareikšmiškai atvaizduoja sritį $\{|y|<\varphi(x),\ x>0\}$ į sritį $\left\{|v|<\frac{\pi}{2},\ u>0\right\}$, $z=x+iy$, $w=u+iv$, $w(\infty)=\infty$; $w\big(\pm i\varphi(o)\big)=\pm i\,\frac{\pi}{2}$. Tarkime, kad funkcija $\varphi(x)$, $0\leqslant x<\infty$ yra du kartus tolydiniai diferencijuojama, patenkinanti sekančias sąlygas: A) funkcijos $\operatorname{arctg}\varphi'(x)$ pilna variacija pusašyje $[0, \infty)$ yra aprėžta; B) esant tam tikrai konstantai q, $0<q<1$ visiems $x\geqslant x_1$ yra patenkinta sąlyga (Б): C) integralas (B) konverguoja. Šiomis sąlygomis funkcijai $w(z)$ galioja, kai $x\to\infty$, asimptotiška (5) formulė, kurioje λ yra tam tikra konstanta, o funkcijų $t(x, y)$, $\eta(x, y)$ pora yra apibrėžiama kaip (4) lygčių sistemos sprendinys.

Ši teorema papildo kai kuriuos S. E. Varšavskio rezultatus [1].

KONFORME ABBILDUNG VON SYMMETRISCHEN HALBSTREIFEN UND ECKENGEBIETEN

A. GOLDBERG. T. STROTSCHIK

(Zusammenfassung)

Wir beweisen den folgenden Satz. Es sei $w=w(z)$ die Funktion, die das Gebiet $\{|y|<\varphi(x),\ x>0\}$ auf das Halbstreifen $\left\{|v|<\frac{\pi}{2},\ u>0\right\}$, $z=x+iy$, $w=u+iv$; $w(\infty)=\infty$, $w\big(\pm i\varphi(0)\big)=\pm i\,\frac{\pi}{2}$ konform und schlicht abbildet. Es sei danach $\varphi(x)$; $0\leqslant x<\infty$ eine zweifach stetig differenzierbare Funktion, die die folgenden Eigenschaften besitzt: A) die völlige Variation von $\operatorname{arctg}\varphi'(x)$ ist beschränkt; B) bei geeigneten q, $0<q<1$ für alle $x\geqslant x_1$ gilt die Ungleichung (Б): C) das Integral (B) ist konvergent. Es gilt nun für die Funktion $w(z)$ bei $x\to\infty$ die asymptotische Formel (5), wo λ eine reele Konstante und das Funktionenpaar $t(x, y)$, $\eta(x, y)$ als die Lösung des Systems (4) definiert ist.

Durch diesen Lehrsatz werden manche Ergebnisse von S. E. Warschawski [1] ergänzt.