VI ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1966

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ДВУМЯ ТОЧКАМИ ВНУТРИ ОВАЛА

Э. ГЯЧЯУСКАС

Определим функцию $P(x)=P\{r\leqslant x\}$ распределения расстояния r между двумя точками, расположенными внутри овала K площади F.

Овалом называется выпуклая фигура на плоскости, ограниченная спрямляемой кривой.

Для определения $P(x)$ используем дифференциальное уравнение Крофтона в терминах некоторого параметра подобного изменения овала K (см. [2])

$$dP=2\,[P_1-P]\,F^{-1}\,dF, \tag{1}$$

где P_1 – функция распределения величины r при условии, что одна из точек лежит на контуре овала.

Удобнее рассматривать дифференциальное уравнение (1) в виде

$$dp=2\,[p_1-p]\,F^{-1}\,dF, \tag{2}$$

где p и p_1 – соответствующие плотности.

Введем параметр подобного изменения овала – коэффициент подобия λ и определим плотность $p_1(x,\ \lambda)$ для подобного овала $K(\lambda)$.

Обозначим через $p(x,\ \lambda)\,d\lambda$ вероятность того, что $x\leqslant r\leqslant x+dx$ для овала $K(\lambda)$. Тогда $p_1(x,\ \lambda)$ (одна точка лежит на контуре овала $K(\lambda)$) равна

$$p_1(x,\ \lambda)=\frac{x\Theta(x,\ \lambda)}{F(\lambda)}, \tag{3}$$

где $F(\lambda)=\lambda^2F$, $\Theta(x,\ \lambda)$ – среднее значение суммы углов $\Theta(s,\ x,\ \lambda)$ тех секторов круга радиуса x с центром в точке s контура овала $K(\lambda)$, которые полностью помещаются в овале $K(\lambda)$, по всем точкам контура.

Подставляем выражение (3) в дифференциальное уравнение (2)

$$dp(x,\ \lambda)=2\left[\frac{x\Theta(x,\ \lambda)}{F(\lambda)}-p(x,\ \lambda)\right]\frac{dF(\lambda)}{F(\lambda)},$$

$$dp(x,\ \lambda)=4\left[\frac{x\Theta(x,\ \lambda)}{\lambda^2F}-p(x,\ \lambda)\right]\frac{d\lambda}{\lambda},$$

$$dp\ (x,\ \lambda)+p(x,\ \lambda)\,\frac{d\lambda^4}{\lambda^4}=\frac{4x\,\Theta(x,\ \lambda)}{\lambda^3F}\,d\lambda,$$

$$d\lambda^4p(x,\ \lambda)=\frac{4x\lambda\Theta(x,\ \lambda)}{F}\,d\lambda,$$

$$p(x,\ \lambda)=\frac{4x}{\lambda^4F}\int\lambda\Theta(x,\ \lambda)\,d\lambda, \tag{4}$$

$$p(x,\ \lambda)=\frac{4x}{\lambda^4F}\,[A(x,\ \lambda)+C_1(x)].$$

Из (4) видно, что $[p(x, \lambda)]_{x=D\lambda}=0$, где D – наибольшая хорда овала K. Из равенства $p\left(x, \frac{x}{D}\right)=0$ определив $C_1(x)$ и подставив $\lambda=1$, получаем искомую плотность.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Функция $P(x)=P\{r\leqslant x\}$ распределения расстояния r между двумя точками, случайно расположенными внутри овала K площади F, равна*

$$\left.\begin{aligned} &P(x)=\frac{4}{F}\,[B(x)+C_2],\\ &B(x)+C_2=\int x\,[A(x,\ 1)+C_1(x)]\,dx,\\ &A(x,\ \lambda)+C_1(x)=\int \lambda\Theta(x,\ \lambda)\ d\lambda,\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где $\Theta(x, \lambda)$ – среднее значение суммы углов $\Theta(s, x, \lambda)$ тех секторов круга радиуса x с центром в точке s контура овала $K(\lambda)$, которые полностью помещаются в овале $K(\lambda)$, по всем точкам контура. K и $K(\lambda)$ – подобные овалы с коэффициентом подобия λ. $C_1(x)$ определяется из равенства

$$A\left(x,\ \frac{x}{D}\right)+C_1(x)=0,$$

а C_2 – из равенства $P(D)=1$, где D – наибольшая хорда овала K.

Раньше рассматривались только конкретные овалы. Э. Борелем [1] была получена функция распределения для круга и вычислены неокончательные функции распределения для квадрата, треугольника и многоугольника методом прямого подсчета. Неокончательность заключается в том, что функции распределения получены только для части интервала $[0, D]$ значений r.

Пример. В качестве примера применения теоремы вычислим $P(x)$ для квадрата со стороной a. Для удобства сперва определим $P_D(x)$, когда $a\leqslant x\leqslant a\sqrt{2}$.

$$\Theta(s,\ x)=\begin{cases}\arcsin\dfrac{a}{x}-\arccos\dfrac{a-s}{x}, & 0\leqslant s\leqslant a-\sqrt{x^2-a^2},\\[2mm] \arcsin\dfrac{s}{x}-\arccos\dfrac{a}{x}, & \sqrt{x^2-a^2}\leqslant s\leqslant a.\end{cases}$$

$$a\Theta(x)=\int\limits_0^{a-\sqrt{x^2-a^2}}\left(\arcsin\frac{a}{x}-\arccos\frac{a-s}{x}\right)ds+\int\limits_{\sqrt{x^2-a^2}}^{a}\left(\arcsin\frac{s}{x}-\right.$$

$$\left.-\arccos\frac{a}{x}\right)ds=2\sqrt{x^2-a^2}-2a-\pi a+4a\arcsin\frac{a}{x}.$$

$$\Theta(x,\ \lambda)=\frac{2}{a\lambda}\sqrt{x^2-a^2\lambda^2}-2-\pi+4\arcsin\frac{a\lambda}{x}.$$

$$\int\lambda\Theta(x,\ \lambda)\,d\lambda=\frac{2}{a}\int\sqrt{x^2-a^2\lambda^2}\,d\lambda-\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\lambda^2+4\int\lambda\arcsin\frac{a\lambda}{x}\,d\lambda=$$

$$=\frac{2\lambda}{a}\sqrt{x^2-a^2\lambda^2}-\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\lambda^2+2\lambda^2\arcsin\frac{a\lambda}{x}+C_1(x).$$

Имеем $F=a^2$, $D=a\sqrt{2}$. Определяем, что $C_1(x)=-\frac{x^2}{2a^2}$.

Следовательно

$$P_D(x)=\frac{4}{a^2}\int x\left[\frac{2}{a}\sqrt{x^2-a^2}-1-\frac{\pi}{2}+2\arcsin\frac{a}{x}-\frac{x^2}{2a^2}\right]dx=$$

$$=\frac{8}{3a^3}\sqrt{(x^2-a^2)^3}-(2+\pi)\frac{x^2}{a^2}+\frac{4x^2}{a^2}\arcsin\frac{a}{x}+\frac{4}{a}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{x^4}{2a^4}+C_2.$$

Взяв $P_D(a\sqrt{2})=1$, находим, что $C_2=\frac{1}{3}$. Теперь определим $P_a(x)$ при $0\leqslant x\leqslant a$.

$$\Theta(s,\ x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{s}{x}, & 0\leqslant s\leqslant x,\\ \pi, & x\leqslant s\leqslant a-x,\\ \frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{a-s}{x}, & a-x\leqslant s\leqslant a,\end{cases}$$

$$a\Theta(x)=\pi(a-2x)+2\int_0^x\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{s}{x}\right)ds,$$

$$a\Theta(x)=\pi a-2x,\qquad \Theta(x,\ \lambda)=\pi-\frac{2x}{a\lambda},$$

$$\int\lambda\Theta(x,\ \lambda)\,d\lambda=\frac{\pi\lambda^2}{2}-\frac{2x\lambda}{a}+C(x),$$

$$P_a(x,\ \lambda)=\frac{4}{a^2}\left[\frac{\pi x^2}{4\lambda^2}-\frac{2x^3}{3a^3\lambda^3}+\frac{1}{\lambda^4}\int xC(x)\,dx\right].$$

Так как $P_D(a)=\pi-\frac{13}{6}$, то и $[P_a(x,\ \lambda)]_{x=a\lambda}=\pi-\frac{13}{6}$. Следовательно $P_a\left(x,\ \frac{x}{a}\right)=\pi-\frac{13}{6}$, откуда определяем, что $\int xC(x)\,dx=\frac{x^4}{8a^2}$. Получаем

$$P_a(x)=\frac{\pi x^2}{a^2}-\frac{8x^3}{3a^3}+\frac{x^4}{2a^4}.$$

Точно такая функция была получена Э. Борелем в [1].

Таким образом функция распределения расстояния между двумя точками внутри квадрата со стороной a равна

$$P(x)=\begin{cases}\frac{\pi x^2}{a^2}-\frac{8x^3}{3a^3}+\frac{x^4}{2a^4}, & 0\leqslant x\leqslant a,\\ \frac{1}{3}+\frac{4}{a}\sqrt{x^2-a^2}-(2+\pi)\frac{x^2}{a^2}+\frac{4x^2}{a^2}\arcsin\frac{a}{x}+\frac{8}{3a^3}\sqrt{(x^2-a^2)^3}-\frac{x^4}{2a^4}, & \\ & a\leqslant x\leqslant a\sqrt{2}.\end{cases}$$

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
8.XII.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Borel, Traité du calcul des probabilités et de ses applications T. I. Les principes de la théorie des probabilités, Fasc. 1. Principes et formules classiques du calcul des probabilités, Paris, 1925.
2. M. G. Kendall, P. A. P. Moran, Geometrical probability, London, 1963.

ATSTUMO TARP DVIEJŲ OVALO VIDAUS TAŠKŲ PASISKIRSTYMO FUNKCIJA

E. GEČIAUSKAS

(Reziumė)

Atstumo tarp dviejų ovalo K vidaus taškų pasiskirstymo funkcija turi (5) pavidalą, kur F – ovalo plotas, $\Theta(x, \lambda)$ – skritulio su spinduliu x ir centru ovalo $K(\lambda)$ kontūro taške s sektorių, telpančių ovale $K(\lambda)$, kampų sumos $\Theta(s, x, \lambda)$ vidurkis. K ir $K(\lambda)$ – panašūs ovalai su panašumo koeficientu λ. Šis rezultatas gautas, panaudojus Kroftono diferencialinę lygtį. Teoremos iliustravimui išspręstas pavyzdys.

DISTRIBUTION FUNCTION OF A DISTANCE BETWEEN TWO RANDOM POINTS IN AN OVAL

E. GEČIAUSKAS

(Summary)

Distribution function of a distance between two random points in the oval K has a form given by the expression (5), where F denote the area of the oval K, $\Theta(x, \lambda)$ is the mean value of summ of angles of all sectors of circle with radius x and center in the point s, lying on the contour of the oval $K(\lambda)$, which the oval $K(\lambda)$ contains. K and $K(\lambda)$ are similar ovals with the coefficient of similarity λ.

This result is obtained by using Crofton's differential equation.

To illustrate the theorem the example is presented.