VI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2

1966

ОЦЕНКА ЧИСЛА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТИПА ГАРДИ—ЛИТТЛВУДА В СЕКТОРАХ

А. А. ПОЛЯНСКИЙ

1. Дисперсионный метод, созданный Ю. В. Линником [1] и усовершенствованный Б. М. Бредихиным [3], оказался весьма эффективным при решении некоторых бинарных аддитивных проблем.

В частности, с помощью дисперсионного метода Ю. В. Линник решил [2] классическую проблему Гарди — Литтлвуда, заключающуюся в нахождении асимптотики для числа решений — $Q(n)$ уравнения

$$p+\xi^2+\eta^2=n. \tag{1}$$

Б. М. Бредихин решил [4] неопределенный аналог проблемы Гарди — Литтлвуда, заключающийся в нахождении асимптотики для числа решений $S(n)$ уравнения

$$p-\xi^2-\eta^2=l. \tag{2}$$

В уравнениях (1) и (2) (ξ, η) независимо пробегают целые числа под условием $0<\xi^2+\eta^2\leqslant n$ (в уравнении (1) это условие выполняется автоматически), p пробегает простые числа, l — фиксированное целое число отличное от нуля, n — достаточно большое натуральное число (основной параметр работы).

В этой заметке рассматриваются теоремы, доставляющие оценки снизу для числа решений уравнений (1) и (2) в секторах.

Доказательство основано на сочетании дисперсионного метода с унимодулярными преобразованиями квадратичной формы $\varphi(\xi, \eta)=\xi^2+\eta^2$.

Рассматриваемый в заметке метод достаточно элементарен в той части, где не используются глубокие результаты, получаемые с помощью дисперсионного метода. Хотя он не позволяет получить асимптотику для числа решений уравнения (1) и (2), тем не менее из оценок снизу для числа таких решений уже следуют интересные результаты о простых числах, являющихся решением уравнений (1) и (2).

2. Пусть $Q_{\Delta\varphi}(n)$ — число решений уравнения (1) при условии, что $(\xi, \eta)\in(\Delta\varphi, \sqrt{n})$, где $(\Delta\varphi, \sqrt{n})$ — круговой сектор радиуса $\sqrt{n}$ с заданным углом раствора

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1, \quad 0\leqslant\varphi_1<\varphi_2\leqslant 2\pi;$$

$S_{\Delta\varphi}(n)$ — число решений уравнения (2) при тех же условиях. Пусть, далее, ε — заданное малое число, $0<\varepsilon<\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2\pi}$, $B_i (i=1, 2)$ — некоторое целое число, зависящее от ε и $\Delta\varphi$, $(B_1, n)=1$, $(B_2, l)=1, B_1=O\left((\ln n)^K\right)$, $K=K(\Delta\varphi, \varepsilon)$ — положительная константа.

Теорема 1. *При* $n \to \infty$

$$Q_{\Delta\varphi}(n) \geqslant \left(\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2} - \varepsilon\right) \frac{1}{B_1} Q(n). \tag{3}$$

Теорема 2. *При* $n \to \infty$

$$S_{\Delta\varphi}(n) \geqslant \left(\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2\pi} - \varepsilon\right) \cdot \frac{1}{B_2} S(n). \tag{4}$$

Как известно (см. [2], [4])

$$Q(n) = Q_0(n) + O\left(n \cdot (\ln n)^{-1{,}042}\right), \tag{5}$$

$$S(n) = S_0(n) + O\left(n \cdot (\ln n)^{-1{,}042}\right), \tag{6}$$

где

$$Q_0(n) = \pi \frac{n}{\ln n} \cdot A_0 \prod_{p \mid n} \frac{(p-1)(p-\chi_4(p))}{p^2-p+\chi_4(p)},$$

$$S_0(n) = \pi \cdot A_0 \frac{n}{\ln n} \prod_{p \mid l} \frac{(p-1)(p-\chi_4(p))}{p^2-p+\chi_4(p)},$$

$\chi_4(m)$ — неглавный характер (mod 4),

$$A_0 = \prod_{p>2} \left(1 + \frac{\chi_4(p)}{p(p-1)}\right).$$

Отметим очевидные следствия, вытекающие из теорем 1 и 2 и доставляющие новые факты в теории простых чисел.

Следствие 1. Всякое достаточно большое число n представимо в виде

$$n = p + \xi^2 + \eta^2,$$

где (ξ, η) принадлежат углу раствора $\Delta\varphi$.

Следствие 2. Существует бесконечно много простых чисел вида

$$p = l + \xi^2 + \eta^2,$$

где (ξ, η) принадлежат углу раствора $\Delta\varphi$.

3. Рассмотрим сначала обобщение уравнений (1) и (2):

$$p + B_1(\xi^2 + \eta^2) = n, \tag{7}$$

$$p - B_2(\xi^2 + \eta^2) = l, \tag{8}$$

где $(B_1, n) = 1$, $(B_2, l) = 1$, причем

$$B_1 = O\left((\ln n)^{C_0}\right), \tag{9}$$

где $C_0 > 0$ — большая константа, $0 < B_2(\xi^2 + \eta_2) \leqslant n$.

Пусть $Q_{B_1}(n)$ — число решений уравнения (7), а $S_{B_2}(n)$ — число решений уравнения (8).

Теорема 3. *При* $n \to \infty$

$$Q_{B_1}(n) \geqslant \frac{1}{B_1} \left[Q(n) \prod_{\substack{p \mid B_1 \\ p>2}} \frac{p^2}{p^2-p+\chi_4(p)} + O\left(\frac{n}{(\ln n)^{1{,}042}}\right)\right]. \tag{10}$$

Теорема 4. *При* $n \to \infty$

$$S_{B_2}(n) \geqslant \frac{1}{B_1} \left[S(n) \prod_{\substack{p \mid B_2 \\ p>2}} \frac{p^2}{p^2-p+\chi_4(p)} + O\left(\frac{n}{(\ln n)^{1{,}042}}\right)\right]. \tag{11}$$

Теоремы 3 и 4 доказываются с помощью дисперсионного метода. Они являются обобщением соответствующих результатов Ю. В. Линника и Б. М. Бредихина, которые рассматривали уравнения (7) и (8), соответственно, при $B_1 = 1$ и $B_2 = 1$.

На основе этих теорем будут доказаны теоремы 1 и 2. Однако теоремы 3 и 4 представляют и самостоятельный интерес.

В настоящей заметке мы ограничимся доказательством теоремы 3. Доказательство теоремы 4 проводится аналогично, но проще, так как B_2 не зависит от основного параметра работы n ($n \to \infty$).

4. Рассмотрим сумму вида

$$Q_K(n) = \sum_{(Q)} \chi_4(x), \tag{12}$$

где (Q) обозначает комплекс условий: $p + Kxy = n$, x, y независимо пробегают натуральные числа, $xy \equiv 1 \pmod 4$, K — заданное число, зависящее от n, причем $K = O\left((\ln n)^{C_0}\right)$, K — нечетное при четном n, K — четное при нечетном n.

Лемма 1.

$$Q_K(n) = 2A(n) + O\left(\frac{1}{K} \cdot \frac{n}{(\ln n)^{1,0425}}\right), \tag{13}$$

где

$$A(n) = \sum_{(Q),\, x < \sqrt{u} \cdot n_1^{-1}} \chi_4(x), \qquad n_1 = \exp(\ln n)^{\xi_0},$$

ξ_0 — достаточно малая положительная константа. Оценка (13) может рассматриваться как частный случай оценки (2, 3, 4) леммы 2, 3, 1 из статьи [3], в которой дано краткое доказательство оценки (2, 3, 4). Надо только положить в лемме указанное статьи $\chi(x) = \chi_4(x)$.

В то же время оценка (13) является уточнением оценки (2, 3, 4) (при указанной специализации последней оценки): остаточный член в (13) оценен точнее, что существенно для применений этой оценки в настоящей статье.

Поэтому мы изложим доказательство леммы 1, следуя с необходимыми уточнениями схеме доказательства леммы 2, 3, 1 [3]. Сумму $Q_K(n)$, в силу равенства (2, 3, 5) из [3] можно разложить на ряд других сумм:

$$Q_K(n) = 2A(n) - B_1(n) + B_2(n) + O\left((n \exp(-2(\ln n)^{\xi_0})\right), \tag{14}$$

где $A(n)$ имеет значение, указанное в (13),

$$B_1(n) = \sum_{\substack{(Q),\, \sqrt{n} \cdot n_1^{-1} \leqslant x \leqslant \sqrt{n} \cdot n_1 \\ y < \sqrt{n} \cdot n_1}} \chi_4(x), \tag{15}$$

$$B_2(n) = \sum_{(Q),\, \sqrt{n}\, n_1^{-1} \leqslant x \leqslant \sqrt{n}\, n_1} \chi_4(x). \tag{16}$$

Оценим суммы $B_1(n)$ и $B^2(n)$. Введем в рассмотрение несколько более общую сумму, чем $B_1(n)$ и $B_2(n)$. Положим

$$B_f(n) = \sum_{\substack{(Q),\, \sqrt{n} \cdot n_1^{-1} \leqslant x \leqslant \sqrt{n}\, n_1 \\ p < f(n) \sqrt{n}}} \chi_4(x), \tag{17}$$

где $f(n)$ определяется неравенствами

$$\frac{n_1^{-1}}{\ln^2 n} \leqslant f(n) \leqslant \frac{n_1}{K}.$$

Суммы $B_1(n)$ и $B_2(n)$ получаются из $B_f(n)$, соответственно, при $f(n)=n_1^{-1}$ и $f(n)=\frac{n_1}{K}$ $\left(\text{в последнем случае с допустимой погрешностью } O\left(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon_1}\right)\right)$.

С допустимой погрешностью $O(n^{\varepsilon_1})$ можем считать, что в (12) $p>x_0=$ $=n^{(\ln\ln n)-2}$.

Условимся, что ν будет обозначать переменную, пробегающую квазипростые числа, не содержащие простых множителей $\leqslant x$.

В (12) сравнение $xy\equiv 1 \pmod 4$ можно заменить эквивалентным ему сравнением $p\equiv n-K \pmod{4K}$.

В силу условий из (12), очевидно, что $(N-K,\ 4K)=1$. Пусть далее

$$D(m)=\sum_{\substack{Kxy=m\\ \sqrt{n}\cdot n_1^{-1}\leqslant x\leqslant\sqrt{n}\cdot n_1,\ y<f(n)\sqrt{n}}} 1,$$

$$F(m)=\sum_{\substack{Kxy=m\\ \sqrt{n}\cdot n_1^{-1}\leqslant x\leqslant\sqrt{n}\cdot n_1,\ y<f(n)\cdot\sqrt{n}}} \chi_4(x).$$

Тогда

$$B_f(n)=\sum_{\substack{x_0<p<n\\ p\equiv n-K \pmod{4K}}} F(n-p)+O(n^{\varepsilon_1}). \tag{18}$$

Применяя к (18) неравенство Коши—Буняковского, получим

$$B_f^2(n)\leqslant 2\left(\sum_{\substack{x_0<p<n\\ p\equiv n-K \pmod{4K}\\ D(n-p)\neq 0}} 1\right)\cdot\left(\sum_{\substack{x_0<p<n\\ p\equiv n-K \pmod{4K}}} F^2(n-p)\right)+O(n^{2\varepsilon_1}). \tag{19}$$

Положим

$$\sum\nolimits_D=\sum_{\substack{p<n,\ D(n-p)\neq 0\\ p\equiv n-K \pmod{4K}}} 1, \tag{20}$$

$$\sum\nolimits_E=\sum_{\substack{x<p<n\\ p\equiv n-K \pmod{4K}}} F^2(n-p). \tag{21}$$

5. Оценим $\sum_E$ сверху. Она оценивается методом С. Хооли.

Если мы суммирование по простым числам распространим на квазипростые числа, то эта сумма только увеличится. Получим

$$\sum\nolimits_E\leqslant\sum_{\nu<n}\left(\sum_{\substack{\nu+Kxy=n\\ \sqrt{n}\cdot n_1^{-1}\leqslant x\leqslant\sqrt{n}\,n_1\\ y<f(n)\sqrt{n}}}\chi_4(x)\right)^2=\sum_{\substack{n-\nu=Kxy=Kz\cdot t\\ \nu<n,\ \sqrt{n}\,n_1^{-1}\leqslant x,\ z<\sqrt{n}\,n_1}}\chi_4(x)\,\chi_4(z). \tag{22}$$

С допустимой погрешностью

$$O\left(\frac{n}{K\ln^3 n}(\ln n)^{2\xi_0}\right) \tag{23}$$

в (22), как это следует из леммы 4 [6], можем считать, что $x\neq z$.

При $x \neq z$ выражении (22) симметрично x и z, поэтому достаточно оценить сумму

$$\sum_{\substack{n-\nu = Kxy = Kzt,\ \nu < n \\ \sqrt{n}\, n_1^{-1} \leqslant x < z \leqslant \sqrt{n}\, n_1;\ y,\ t < f(n)\sqrt{n}}} \chi_4(x)\,\chi_4(z) \tag{24}$$

и полученный результат удвоить.

Освободимся в (24) от условия $y,\ t < f(n)\sqrt{n}$. Это неравенство при выполнении прочих условий из (24) эквивалентно неравенству

$$M(n,\ x) = \max\{1,\ n - Kxf(n)\sqrt{n}\} < \nu < n. \tag{25}$$

Положим

$$Y(n,\ x) \equiv \big(M(n,\ x),\ n\big),$$

$$T(n,\ x) \equiv n - M(n,\ x).$$

Оценка $\sum_E$ сводится, таким образом, к оценке суммы

$$\sum\nolimits_E' = \sum_{\substack{n-\nu = Kxy = Kzt \\ \sqrt{n}\cdot n_1^{-1} \leqslant x < z \leqslant \sqrt{n}\, n_1,\ \nu \in Y(n,\,x)}} \chi_4(x)\cdot\chi_4(z). \tag{26}$$

При данных x, z величина $n-\nu$ в (26) эквивалентна величине, сравнимой с нулем $(\mathrm{mod}\,[x,\ z])$, где $[x,\ z]$ – наименьшее общее краткое x и z. Пусть $d=(x,\ z)$ – наибольший общий делитель x и z, тогда $x = dx_1$, $z = dz_1$, $(x_1,\ z_1) = 1$.

Определим (L_{x_1}), (L_{z_1}), (H), (K_1), (K_2) как условия

$$\left.\begin{aligned}
(L_{x_1}) &\equiv \left\{ \frac{\sqrt{n}\, n_1^{-1}}{d} < x_1 < \frac{\sqrt{n}\, n_1}{d} \right\}, \\
(L_{z_1}) &\equiv \left\{ x_1 < z_1 < \frac{\sqrt{n}\, n_1}{d} \right\}, \\
(H) &\equiv \{(x_1,\ z_1) = 1\}, \\
(K_1) &\equiv \{(Kdx_1 z_1,\ n^{(1)}) = 1\}, \\
(K_2) &\equiv \{Kdx_1,\ n^{(1)}) = 1\},
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

где

$$n = \prod_{p\,|\,n} p^{\alpha}, \qquad n^{(1)} = \prod_{p\,|\,n,\ p \leqslant x_0} p^{\alpha}.$$

Поэтому

$$\sum\nolimits_E = \sum_{\substack{n-\nu = Kdx_1 z_1 m \\ (L_{x_1}),\ (L_{z_1}),\ (H),\ \nu \in Y(n,\,dx_1)}} \chi_4^2(d)\,\chi_4(x_1)\,\chi_4(z_1). \tag{28}$$

Условия (K_1) и (K_2) выполняются автоматически, поскольку ν пробегает квази-простые числа. Положим

$$\sum\nolimits_E' = \sum_{d \geqslant n^{\frac{1}{8}}} + \sum_{d < n^{\frac{1}{8}}} = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2. \tag{29}$$

В $\sum_1$ имеем

$$Kdx_1 z_1 < Knn_1^2 \frac{1}{d} < n^{\frac{7}{8}} n_1 (\ln n)^{C_0}.$$

Поэтому применима лемма 4 С. Хоoли [6]. Получаем

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{\substack{(L_{x_1}),\,(L_{z_1}),\,(H)\\ d \geqslant n^{\frac{1}{8}}}} \chi_4^2(d)\, \chi_4(x_1)\, \chi_4(z_1) \sum_{\nu \equiv n \pmod{Kdx_1 z_1}} 1 =$$

$$= B(n) \sum_{\substack{(L_{x_1}),\,(L_{z_1}),\,(H),\,(K_1)\\ d \geqslant n^{\frac{1}{8}}}} \frac{T(n,\, dx_1)\, \chi_4^2(d)\, \chi_4(x_1)\, \chi_4(z_1)}{\varphi(Kdx_1 z_1)} + O\left(\frac{n}{K \ln^5 n} \cdot \sum_{\substack{(L_{x_1}),\,(L_{z_1}),\\ (H),\, d \geqslant n^{\frac{1}{8}}}} \frac{1}{dx_1 z_1}\right).$$

Отсюда

$$\sum\nolimits_E' = B(n) \sum_{\substack{(L_{x_1}),\,(L_{z_1}),\,(H),\,(K_1),\\ n^{\frac{1}{8}} \leqslant d \leqslant \sqrt{n}\, n_1^{-1}}} \frac{T(n,\, dx_1)\, \chi_4^2(d)\, \chi_4(x_1)\, \chi_4(z_1)}{\varphi(Kdx_1 z_1)} +$$

$$+ B(n) \sum_{\substack{(L_{x_1}),\,(L_{z_1}),\,(H),\,(K_1),\\ \sqrt{n}\, n_1^{-1} < d \leqslant \sqrt{n}\, n_1}} \frac{T(n,\, dx_1)\, \chi_4^2(d)\, \chi_4(x_1)\, \chi_4(z_1)}{\varphi(Kdx_1 z_1)} + O\left(\frac{n}{K \ln^2 n}\right) =$$

$$= B(n) \sum\nolimits_3 + B(n) \sum\nolimits_4 + O\left(\frac{n}{K \ln^2 n}\right). \tag{30}$$

Рассмотрим

$$\sum\nolimits_3 = \sum_{\substack{(L_{x_1}),\,(K_1),\\ n^{\frac{1}{8}} \leqslant d \leqslant \sqrt{n}\, n_1^{-1}}} T(n,\, dx_1)\, \chi_4^2(d)\, \chi_4(x_1) \sum_{\substack{(L_{z_1})\\ (x_1,\, z_1,\, n^{(1)}) = 1}} \frac{\chi_4(z_1)}{\varphi(Kdx_1 z_1)}.$$

Так как $T(n, dx_1) < n$, то имеем

$$\sum\nolimits_3 = O\left(n \sum_{(L_{x_1}),\,(K_1)} \left| \sum_{\substack{(L_{z_1})\\ (x_1,\, z_1,\, n^{(1)}) = 1}} \frac{\chi_4(z_1)}{\varphi(Kdx_1 z_1)} \right|\right) = O\left(n \sum\nolimits_3'\right).$$

Сумма $\sum_3'$ оценивается с помощью некоторого видоизменения лемм 8 и 9 С. Хооли [6]. В результате получим

$$\sum\nolimits_3 = O\left(\frac{n}{K} (\ln n)^{7\xi_0}\right). \tag{31}$$

Имеем также

$$\sum\nolimits_4 = O\left(\frac{n}{K} (\ln n)^{4\xi_0}\right). \tag{32}$$

Принимая во внимание, что

$$B(n) = O\left(\frac{(\ln \ln n)^2}{\ln n}\right),$$

из (30)–(32) находим

$$\sum\nolimits_1 = O\left(\frac{n}{K \ln n} (\ln n)^{8\xi_0}\right). \tag{33}$$

Для оценки $\sum_2$ используем факт, что

$$\sum_{\substack{rt=x_1,\\ st=z_1}} \mu(t)=\begin{cases} 1, & \text{если } (x_1, z_1)=1,\\ 0, & \text{если } (x_1, z_1)>1.\end{cases}$$

Естественно считать $r<s$, так как $x_1<z_1$. Определим условия (R), (S), (D), (DT), как

$$(R)\equiv\left\{\frac{\sqrt{n}\,n_1^{-1}}{dt}<r<\frac{\sqrt{n}\,n_1}{dt}\right\},$$

$$(S)\equiv\left\{r<s<\frac{\sqrt{n}\,n_1}{dt}\right\},$$

$$(D)\equiv\left\{d<n^{\frac{1}{8}}\right\},\quad (DT)\equiv\left\{d<n^{\frac{1}{8}},\quad t<n^{\frac{1}{8}}\right\}.$$

Имеем

$$\sum_2=\sum_{\substack{n-\nu=Kdsrt^2m\\ (R),\,(S),\,(D),\,\nu\in Y(n,\,dtr)}} \mu(t)\,\chi_4^2(d)\,\chi_4^2(t)\,\chi_4(r)\,)\,\chi_4(s)=$$

$$=\sum_{t<n^{\frac{1}{8}}}+\sum_{t\geqslant n^{\frac{1}{8}}}=\sum_5+\sum_6. \tag{34}$$

В $\sum_5$ условия суммирования заключают в себе неравенство

$$Kdrt^2m<\frac{n}{s}<\frac{n}{\sqrt{n}\,n_1^{-1}d^{-1}t^{-1}}<n^{\frac{3}{4}}\cdot n_1. \tag{35}$$

Следовательно

$$\sum_5=\sum_{\substack{Kdrt^2m<n^{\frac{3}{4}}\cdot n_1,\\ (R),\,(DT)}} \mu(t)\,\chi_4^2(d)\,\chi_4^2(t)\,\chi_4(z)\sum_{\substack{\nu=n-Kdsrt^2m\\ (S),\,\nu\in Y(n,\,dtr)}}\chi_4(s). \tag{36}$$

Внутреннюю сумму можно записать в виде

$$\sum_{\substack{\nu=n-Kdrt^2\cdot sm\\ a<\nu<b}}\chi_4(s), \tag{37}$$

где

$$a=\max\{M(n,\ drt),\quad n-Krtm\sqrt{n}\,n_1\},$$

$$b=\min\{n,\quad n-Kr^2t^2m\}.$$

Далее $\chi_4(s)=1$, если $s\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)$, $\chi_4(s)=-1$, если $s\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ 4)$, $\chi_4(s)=0$ в остальных случаях.

Положим $\Lambda=Kdrt^2m$. Таким образом сумма (37) примет вид

$$\sum_{\substack{\nu\equiv n-\Lambda\ (\mathrm{mod}\ 4\Lambda),\\ a<\nu<b}} 1-\sum_{\substack{\nu\equiv n+\Lambda\ (\mathrm{mod}\ 4\Lambda)\\ a<\nu<b}} 1. \tag{38}$$

Из (35) следует, что $4\Lambda\leqslant 4n^{\frac{3}{4}}\cdot n_1$. Поэтому по лемме 4 С. Хооли [6], условия которой выполнены, имеем из (38) оценку

$$B(n)\,\frac{b-a}{\varphi(4\Lambda)}+O\left(\frac{n}{\Lambda\ln^6 n}\right)=O\left(\frac{n}{\Lambda\ln^6 n}\right). \tag{39}$$

Из (37)–(39) находим

$$\sum\nolimits_5 = O\left(\frac{n}{K\ln^6 n}\sum_{d,r,m,t^2<n}\frac{1}{drt^2m}\right) = O\left(\frac{n}{K\ln^2 n}\right). \tag{40}$$

Далее

$$\sum\nolimits_6 = O\left(\sum_{Krst^2dm<n} 1\right) = O\left(\sum_{t>n^{\frac{1}{8}}}\ \sum_{\mu<\frac{n}{Kt^2}} \tau_4(\mu)\right).$$

Применяя лемму 1.1.2 из [1] для оценки внутренней суммы, получим

$$\sum\nolimits_6 = O\left(\frac{n}{K\ln^2 n}\right). \tag{41}$$

Из (40), (41), (34) находим, что

$$\sum\nolimits_2 = O\left(\frac{n}{K\ln^2 n}\right). \tag{42}$$

Теперь из (22), (23), (26), (29), (33), (42) получаем

$$\sum\nolimits_E = O\left(\frac{n}{K\ln n}\cdot(\ln n)^{8\xi_0}\right). \tag{43}$$

6. Оценим $\sum_D$ с помощью комбинации методов С. Хооли и Эрдеша, разработанной Б. М. Бредихиным ([3], [4]).

С допустимой погрешностью равной $O\left(\frac{n}{K\ln^2 n}\right)$ можем считать, что $\frac{\sqrt{n}\cdot n_1^{-1}}{\ln^2 n} < y \leqslant \sqrt{n}\, n_1$. Следовательно из (20) находим

$$\sum\nolimits_D \leqslant \sum_{\substack{p<n\\ (P),(X),(Y)}} 1 + O\left(\frac{n}{K\ln^2 n}\right) = \sum\nolimits_D' + O\left(\frac{n}{K\ln^2 n}\right). \tag{44}$$

Условия (P), (X), (Y) обозначают, соответственно:

$$p+Kxy=n,\qquad \sqrt{n}\cdot n_1^{-1} \leqslant x \leqslant \sqrt{n}\cdot n_1,\qquad \frac{\sqrt{n}\cdot n_1^{-1}}{\ln^2 n} < y < \sqrt{n}\, n_1.$$

Отметим, что нумерацию сумм в этом пункте введем вновь. Через $U(m)$ – обозначим число простых делителей (учитывая кратность). Будем оценивать

$$\sum\nolimits_D = \sum_{\substack{p<n\\ (P),(X),(Y)\\ U(n-p)>C\ln\ln n}} 1 + \sum_{\substack{p<n\\ (P),(X),(Y)\\ U(n-p)\leqslant C\ln\ln n}} 1 = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2, \tag{45}$$

где C – достаточно большая, по сравнению с C_0, положительная константа.

На основании леммы 6 С. Хооли [6] справедлива оценка

$$\sum\nolimits_1 < \sum_{\substack{m<n\\ U(m)>C\ln\ln n}} 1 = O\left(\frac{1}{(\ln n)^{\frac{C}{2}}}\cdot\sum_{m<n}\sqrt{e}^{\,u(m)}\right) = O\left(\frac{n}{K\ln^2 n}\right). \tag{46}$$

Оценим $\sum_2$. Обозначим, следуя С. Хооли, через R_n последовательность чисел m, которые не превосходят n и не имеют простых делителей, превосходящих $n^{\frac{1}{2C\ln\ln n}}$. Тогда

$$\sum\nolimits_2 \leqslant \sum_{\substack{m\in R_n,\\ U(m)\leqslant C\ln\ln n}} 1 + \sum_{\substack{p<n,\\ (P),(X),(Y),\\ n-p\in R_n}} 1 = \sum\nolimits_3 + \sum\nolimits_4. \tag{47}$$

Если $U(m) \leqslant C \ln \ln n$ и $m \in R_n$, то

$$\sum\nolimits_3 = O(\sqrt{n}) = O\left(\frac{n}{K \ln^3 n}\right). \tag{48}$$

Пусть $\frac{n-p}{K} \notin R_n$, где $n-p \equiv 0 \pmod K$. Тогда $\frac{n-p}{K}$ имеет представление

$$n - p = Krp', \tag{49}$$

где p и p' — простые числа, $p < n$, $p' > n^{\frac{1}{2C \ln \ln n}}$. Следовательно

$$Kr < Kn^{1 - \frac{1}{2C \ln \ln n}} < \frac{1}{2} n,$$

так как $K = O(\ln^{C_0} n)$ и n достаточно большое число.

При переменных p и p' число решений уравнения (49) имеет оценку

$$O\left(\frac{n}{Kr} \cdot \frac{\ln \ln n}{\ln^2\left(\frac{n}{Kr}\right)}\right). \tag{50}$$

Эта оценка является видоизменением леммы 5 С. Хооли [6] и доказывается аналогично при помощи метода Бруна.

Из (49), (50) получаем

$$\sum\nolimits_4 = O\left(\frac{n}{K \ln^2 n} \cdot (\ln \ln n)^3 \sum_{\substack{r<n \\ r = x_1 y,\ (X_1),\ (Y)}} \frac{1}{r} + \frac{n}{K \ln^3 n} \sum_{\substack{r<n \\ r = x y_1,\ (X),\ (Y_1)}} \frac{1}{r} = \right.$$

$$\left. = O\left(\frac{n}{K \ln^2 n}\right. (\ln \ln n)^3 \sum\nolimits_5 + \frac{n}{K \ln^2 n} (\ln \ln n)^3 \sum\nolimits_6\right). \tag{51}$$

Условия (X_1) и (Y), (X) и (Y_1) обозначают, соответственно:

$$x_1 < \sqrt{n}\, n_1 \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{n}\, n_1^{-1}}{\ln^2 n} < y \leqslant \sqrt{n}\, n_1,$$

$$\frac{\sqrt{n}\, n_1^{-1}}{\ln^2 n} < x < \sqrt{n}\, n_1 \quad \text{и} \quad y_1 < \sqrt{n}\, n_1.$$

Очевидно

$$\sum\nolimits_6 = O\left(\sum\nolimits_5\right). \tag{52}$$

Используя оценку (17.13) из [4], имеем

$$\sum\nolimits_5 = O\left((\ln n)^{\gamma_0} (\ln n)^{2\xi_0}\right). \tag{53}$$

Из (51) — (53) получаем

$$\sum\nolimits_4 = O\left(\frac{n}{K \ln^2 n} \cdot (\ln n)^{\gamma_0} (\ln n)^{3\xi_0}\right). \tag{54}$$

Из (45), (46), (47), (54) следует оценка

$$\sum\nolimits_D = O\left(\frac{n}{K \ln n} \ln n)^{-\gamma} (\ln n)^{3\xi}\right), \tag{55}$$

где

$$\gamma = 1 - \gamma_0 = 1 - \frac{\ln \ln 2}{\ln 2} = 0{,}0858.$$

Остается собрать полученные оценки. Из (19) — (21), (43), (55) получаем оценку для $B_f(n)$:

$$B_f(n) = O\left(\frac{n}{K (\ln n)^{1{,}0425}}\right). \tag{56}$$

Теперь из (15) — (17), (56) следует (13).

Лемма 1 доказана.

7. Докажем теперь теорему 3. Преобразуем

$$Q_{B_1}(n)=\sum_{p+B_1(\xi^2+\eta^2)=n} 1, \tag{57}$$

используя тот факт, что всякое натуральное число m можно записать в виде $m=2^\lambda m_1$, где $\lambda\geqslant 0$, m_1 — нечетное число. Имеем

$$r(m)=\sum_{\xi^2+\eta^2=m} 1=4\sum_{x\mid m}\chi_4(m)=4\sum_{xy=m_1}\chi_4(x).$$

Поэтому

$$Q_{B_1}(n)=4\sum_{p+2^\lambda B_1 xy=n}\chi_4(x), \tag{58}$$

где $\lambda=0$, если n — четное и $\lambda=1, 2, 3, \ldots$, если n — нечетное.

В случае нечетного n мы можем считать $2^\lambda<(\ln n)^{C_0}$, где C_0 — константа, определенная в (9).

При $(\ln n)^{C_0}<2^\lambda<n$ получаем допустимую для $Q_{B_1}(n)$ погрешность, не превосходящую

$$4\sum_{(\ln n)^{C_0}<2^\lambda<n}\ \sum_{xy<\frac{n}{2^\lambda B_1}} 1=O\left(\frac{n}{B_1}(\ln n)^{-\frac{C_0}{2}}\right). \tag{59}$$

Поэтому имеем

$$Q_{B_1}(n)=4\sum_{2^\lambda\leqslant\ln^{C_0}n} Q(n, \lambda)+O\left(\frac{n}{B_1}(\ln n)^{-\frac{C_0}{2}}\right), \tag{60}$$

где

$$Q(n, \lambda)=\sum_{p+2^\lambda B_1 xy=n}\chi_4(x).$$

Сумма $Q(n, \lambda)$ удовлетворяет условиям леммы 1, если положить $K=2^\lambda B_1$. Имеем

$$Q(n, \lambda)=2A(n, \lambda)+O\left(\frac{n}{2^\lambda B_1(\ln n)^{1{,}0425}}\right), \tag{61}$$

где

$$A(n, \lambda)=\sum_{p+2^\lambda B_1 xy=n,\ x<\sqrt{n}\,n_1^{-1}}\chi_4(x).$$

Сумма $A(n, \lambda)$ вычисляется с помощью дисперсионного метода. При этом мы можем воспользоваться результатами статьи [3].

Поскольку $2^\lambda B_1=O\left((\ln n)^C\right)$, где C — достаточно большая константа по сравнению с C_0, то на основании (5.4.22) из [3] имеем

$$A(n, \lambda)=\int_2^n\frac{dt}{t}\cdot\sum_{\substack{x<\sqrt{n}\,n_1^{-1}\\(x,\,2n)=1}}\frac{\chi^4(x)}{\varphi(2^{\lambda+2}B_1x)}+O\left(\frac{n}{(\ln n)^{\frac{C}{2}}}\right). \tag{62}$$

Применяя лемму (2. 3.2) работы [3] из (62), (61), имеем

$$Q(n, \lambda)=\frac{1}{2^\lambda B_1}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot A_0\prod_{p\mid n}\frac{(p-1)(p-\chi_4(p))}{p^2-p+\chi_4(p)}\prod_{\substack{p\mid B_1\\p>2}}\frac{p^2}{p^2-p+\chi_4(p)}\cdot\frac{n}{\ln n}+$$

$$+O\left(\frac{n}{2^\lambda B_1(\ln n)^{1{,}0425}}\right)+O\left(\frac{n}{B_1(\ln n)^{\frac{C}{3}}}\right). \tag{63}$$

поскольку

$$L(1, \chi_4)=\frac{\pi}{4}.$$

Далее,

$$\sum_{2^\lambda\leqslant(\ln n)^{C_0}} \frac{1}{2^\lambda}=\begin{cases} 1, & \text{если } \lambda=0,\\ 1+O\left((\ln n)^{C_0}\right), & \text{если } \lambda=1,\ 2,\ 3\ldots \end{cases} \tag{64}$$

и

$$\sum_{2^\lambda\leqslant(\ln n)^{C_0}} 1=O(\ln\ln n). \tag{65}$$

Теперь из (63)—(65), (60) следует (10).

Теорема 3 доказана.

8. Переход от заданных бинарных уравнений (1) и (2) (в секторах) к уравнениям (7) и (8) основывается на следующей лемме.

Лемма 2. *Каковы бы ни были заданные числа* ε_0 (малое положительное число) *и целое число* $m=O(n)$, *найдется сектор* $(\delta\varphi_0, \sqrt{n})$ *раствора* $\delta\varphi_0 = \varphi-\varphi_0$, *где* $0<\varphi<\varepsilon_0$, $\varphi_0=0$. При этом $\cos\varphi=\frac{a}{c}$, $\sin\varphi=\frac{b}{c}$, где a, b, c^2 — целые положительные числа, $(c^2, m)=1$ и $c=O(\ln n)$.

Для доказательства достаточно рассмотреть сектор $(\delta\varepsilon_0, C\ln n)$, где $C>0$ — достаточно большая константа и $\delta\varepsilon_0=\varepsilon_0-0$, в котором, как это следует из результатов И. П. Кубилюса найдется по крайней мере одно простое гауссово число с нормой $N(\mathfrak{p})=a^2+b^2=c^2$, где a, b, c будут удовлетворять требованию леммы при $\varphi=\arg\mathfrak{p}$. В самом деле количество простых гауссовых чисел $\mathfrak{p}$ с $N(\mathfrak{p})\equiv 1 \pmod 4$, принадлежащих рассматриваемому сектору, асимптотически равно

$$\frac{2\varphi}{\pi}\int\limits_2^{c\ln n}\frac{dt}{t}+O\left(\frac{\ln n}{e^{C_0\sqrt{\ln\ln n}}}\right). \tag{66}$$

В то же время количество различных простых делителей m будет

$$O\left(\frac{\ln n}{\ln\ln n}\right). \tag{67}$$

При достаточно большом C из (66) и (67) следует, что найдется простое гауссово число $\mathfrak{p}$, норма которого будет взаимно простой с числом m.

9. Доказательство теоремы 1. Выберем ε_0 достаточно малое по сравнению с $\Delta\varphi$. Используя лемму 2, покроем круг радиуса $\sqrt{n}$ без наложения секторами вида $(\delta\varphi_i\sqrt{n})$, где

$$\delta\varphi_i=\varphi'_{i+1}-\varphi'_i=\varphi,\quad \varphi'_1=\varphi,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ N=\left[\frac{2\pi}{\varphi}\right]+1.$$

Последний сектор может быть неполным. Данный сектор $(\Delta\varphi, \sqrt{n})$ разбивается при этом покрытии на $m_0=\left[\frac{\Delta\varphi}{\varphi}\right]+\Theta$, $o\leqslant\Theta\leqslant 1$ частичных секторов, причем два крайних сектора могут быть неполными.

Нетрудно видеть, что

$$\cos\varphi'_i=\frac{a_i}{c^{i+1}},\qquad \sin\varphi'_i=\frac{b_i}{c^{i+1}}.$$

В уравнении (7) положим $B_1=c^{4N}$, где $4N\leqslant C_0$, тогда условие (9) будет выполнено.

Рассмотрим число решений уравнения (7) в секторе

$$(\delta\varphi_i, \sqrt{n}) \quad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1),$$

т. е. при условии $(\xi, \eta) \in (\delta\varphi_i, \sqrt{n})$. По крайней мере, в одном из этих секторов, номер которого обозначим через s, будет не менее $\frac{1}{N} Q_{B_1}(n)$ решений.

Точки сектора $(\delta\varphi_s, \sqrt{n})$ посредством унимодулярного преобразования вида:

$$S_j = \frac{1}{c^2N}\begin{pmatrix} a_j' & -b_j' \\ b_j' & a_j' \end{pmatrix} \tag{68}$$

будем последовательно преобразовывать в m_0 частичных секторов данного сектора $(\Delta\varphi, \sqrt{n})$. В (68) элементы матрицы определяются из условий:

$$\cos(\varphi_s' - \varphi_i') = \frac{a_j}{c^2N}, \qquad \sin(\varphi_s' - \varphi_i') = \frac{b_j}{c^2N},$$

где i пробегает номера указанных m_0 частичных секторов. При этом получим

$$\frac{1}{N} Q_{B_1}(n) \leqslant \sum_{\substack{p+B_1(\xi^2+\eta^2)=n \\ (\xi,\eta)\in(\delta\varphi_s,\sqrt{n})}} 1 = \sum_{\substack{p+B_1(x^2+y^2)=n \\ (x,y)\in(\delta\varphi_i,\sqrt{n})}} 1. \tag{69}$$

Заметим, что в (69) целым (ξ, η) соответствуют не обязательно целые (x, y).

Из (69) следует, что

$$\frac{1}{N} Q_{B_1}(n) \leqslant \sum_{\substack{p+x^2+y^2=n \\ (x,y)\in(\delta\varphi_i\sqrt{n})}} 1, \tag{70}$$

где (x, y) пробегают уже целые точки частичного сектора.

Суммируя (70) по всем частичным секторам и пренебрегая крайними, получим

$$\frac{m_0-2}{N} Q_{B_1}(n) \leqslant Q_{\Delta\varphi}(n). \tag{71}$$

Из (10) и (71) следует (3). Тем самым теорема 1 доказана.

Аналогично с помощью леммы 2 доказывается теорема 2.

В заключение выражаю глубокую благодарность Б. М. Бредихину за руководство моей работой.

Куйбышевский педагогический институт

Поступило в редакцию 29.X.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. В. Линник, Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах, Л., изд. ЛГУ., 1961.
2. Ю. В. Линник, Асимптотическая формула в аддитивной проблеме Гарди—Литтлвуда, И. А. Н. СССР, сер. мат., 23, 5, 629—706, 1960.
3. Б. М. Бредихин, Дисперсионный метод и бинарные аддитивные проблемы определенного типа, У. М. Н., 20, в. 3 (122), 89—129, 1965.

4. Б. М. Бредихин, Бинарные аддитивные проблемы неопределенного типа, II. Аналог проблемы Гарди–Литтлвуда, И. А. Н., сер. матем. 27, 3, 577–612 (1963).

5. И. П. Кубилюс, Распределение простых чисел гауссова поля в секторах и контурах, Учен. зап., Л. Г. У., сер. мат., 19, 40–52 1950.

6. C. Hooley, On the representation of a number as the sum of two squares and a prime, Acta math., 97, (1957), 189–210.

HARDI–LITLVUDO TIPO LYGČIŲ SPRENDINIŲ SKAIČIAUS SEKTORIUOSE ĮVERTINIMAS

A. POLIANSKIS

(Reziumė)

Dispersinio metodo ir kai kurių geometrinių teiginių pagalba straipsnyje sprendžiamos lygtys

$$p+\xi^2+\eta^2=n$$

ir

$$p-\xi^2-\eta^2=l,$$

kur ξ ir η įgyja sveikas reikšmes, priklausančias duotajam sektoriui, o p perbėga pirminius skaičius.

Gaunamas šių lygčių sprendinių skaičiaus įvertinimas iš apačios, iš kurio seka pirminių skaičių teorijos nauji faktai.

ABSCHÄTZUNG NACH UNTEN DER ZAHL DER LÖSUNGEN DER GLEICHUNGEN VOM TYP HARDY–LITTLEWOOD IN SEKTOREN

A. POLJANSKIJ

(Zusammenfassung)

Im vorliegenden Artikel werden mit Hilfe der Dispersionsmethode und einiger geometrischen Mittel die Gleichungen vom Typ

$$p+\xi^2+\eta^2=n$$

und

$$p-\xi^2-\eta^2=l$$

gelöst, vorausgesetzt, dass ξ und η ganzzahlige, als Koordinaten der Punkte des gegebenen Sektors gedachte Bedeutungen, p aber Primzahlen durchlaufen.

Für die Zahl der Lösungen dieser Gleichungen werden Abschätzungen, nach unten gezogen, die neue Angaben zur Theorie der Primzahlen liefern.