VI ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1966

О СВЯЗНОСТЯХ В ПРОСТРАНСТВЕ ОПОРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А. П. УРБОНАС

Введение

В 1946 г. Б. Л. Лаптев ввел понятие пространства опорных элементов. Б. Л. Лаптев построил теорию связностей (аффинных) в общем пространстве тензорных опорных элементов [4].

Хорошо известно, что относительно дифференциальной группы второго порядка, существуют только три типа простых дифференциально-геометрических объектов:

а) свернутый объект аффинной связности,

в) объект аффинной связности,

с) объект проективной связности (параметры Томаса [3]).

В пространстве значений свернутого объекта аффинной связности и объекта аффинной связности дифференциальная группа второго порядка действует транзитивно, а в пространстве значений объекта проективной связности – интранзитивно. Поэтому заслуживают внимания все три специальные типа пространств опорных элементов, т. е. такие пространства опорных элементов, когда опорный объект совпадает либо со свернутым объектом аффинной связности, либо с объектом аффинной связности, либо с объектом проективной связности.

Один вариант теории аффинных связностей, когда опорный объект – свернутый объект аффинной связности, был предложен В. И. Близникасом [1], который также указал способ построения теории связностей и для общего случая в [2].

В данной работе рассматривается случай пространств опорных элементов, когда опорный объект совпадает с объектом проективной связности, т. е. с параметрами Томаса.

§ 1. Пространство опорных элементов Π_n.

Пусть V_n есть некоторое n-мерное дифференцируемое многообразие класса C^r, которое мы будем называть базой (или базисным пространством). К каждой точке $x(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ многообразия V_n присоединим объект проективной связности $\Pi^{\alpha}_{\beta\gamma}$. Этот объект мы примем за опорный объект. Совокупность $(x^i, \Pi^{\alpha}_{\beta\gamma})$ называется опорным элементом. Полученное пространство опорных элементов обозначим через Π_n. В этом специальном многообразии опорных элементов рассмотрим преобразование координат точек*)

$$x^{i'} = x^{i'}(x^i), \tag{1.1}$$

*) Будем считать, что все встречающиеся индексы принимают значения 1, 2, ..., n.

и соответствующие преобразования компонент опорного объекта [3]:

$$\Pi^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}} \Pi^{\alpha}_{\beta\gamma} + \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\gamma'}} - \frac{2}{n+1} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{(\beta'}} \frac{\partial \ln \Delta}{\partial x^{\gamma')}}, \tag{1.2}$$

где

$$\Delta = \det \left\| \frac{\partial x^{r}}{\partial x^{r'}} \right\|.$$

С каждым опорным элементом (x, Π) пространства Π_n, ассоциируются два векторные пространства:

1. Касательное векторное пространство $T(x, \Pi)$, изоморфное пространству операторов $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^{i}}, \frac{\partial}{\partial \Pi^{\alpha}_{\beta\gamma}} \right\}$.

2. Касательное дуальное векторное пространство $T^{*}(x, \Pi)$, натуральный корепер которого $\{dx^{i}, d\Pi^{\alpha}_{\beta\gamma}\}$.

Теорема 1. *Если в пространстве Π_n задано поле дифференциально-геометрического объекта $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma s}$, компоненты которого при преобразованиях (1.1) и (1.2) преобразуются по закону*

$$\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma's'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}} \frac{\partial x^{s}}{\partial x^{s'}} \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma s} - \frac{\partial}{\partial x^{s'}} \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}} \right) \Pi^{\alpha}_{\beta\gamma} -$$
$$- \frac{\partial}{\partial x^{s'}} \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\gamma'}} - \frac{2}{n+1} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{(\beta'}} \frac{\partial \ln \Delta}{\partial x^{\gamma')}} \right), \tag{1.3}$$

то тогда в дуальном касательном пространстве можно построить линейно независимую систему форм)*

$$\Theta^{\alpha}_{\beta\gamma} = d\Pi^{\alpha}_{\beta\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma s} dx^{s}, \tag{1.4}$$

и таких, что

$$\Theta^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}} \Theta^{\alpha}_{\beta\gamma} \tag{1.5}$$

и наоборот.

Доказательство. Нам нужно доказать, что из (1.3) и (1.4) следует (1.5). Также нужно доказать, что из (1.4) и (1.5) следует (1.3). Начнем с доказательства первого утверждения. Дифференцируя (1.2), получаем

$$d\Pi^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}} d\Pi^{\alpha}_{\beta\gamma} + \frac{\partial}{\partial x^{s}} \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}} \right) \Pi^{\alpha}_{\beta\gamma} dx^{s} +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x^{s}} \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\gamma'}} - \frac{2}{n+1} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{(\beta'}} \frac{\partial \ln \Delta}{\partial x^{\gamma')}} \right) dx^{s}.$$

Если в выражение новых форм $\Theta^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}$ подставим $d\Pi^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}$ из полученных равенств и $\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma's'}$ из (1.3), то будем иметь

$$\Theta^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} = d\Pi^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} + \Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma's'} dx^{s'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}} d\Pi^{\alpha}_{\beta\gamma} + \frac{\partial}{\partial x^{s}} \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}} \right) dx^{s} +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x^{s}} \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\gamma'}} - \frac{2}{n+1} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{(\beta'}} \frac{\partial \ln \Delta}{\partial x^{\gamma')}} \right) dx^{s} +$$
$$+ \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}} \frac{\partial x^{s}}{\partial x^{s'}} \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma s} dx^{s'} - \frac{\partial}{\partial x^{s'}} \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}} \right) \Pi^{\alpha}_{\beta\gamma} dx^{s'} -$$
$$- \frac{\partial}{\partial x^{s'}} \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\gamma'}} - \frac{2}{n+1} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{(\beta'}} \frac{\partial \ln \Delta}{\partial x^{\gamma')}} \right) dx^{s'};$$

и, после приведения подобных членов, получим

$$\Theta^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}} \Theta^{\alpha}_{\beta\gamma},$$

т. е. имеет место (1.5).

*) Число форм $\Theta^{\alpha}_{\beta\gamma}$ такое же как и число дифференциалов $d\Pi^{\alpha}_{\beta\gamma}$.

Обратно, если дана система форм

$$\Theta^{\alpha}_{\beta\gamma} = d\Pi^{\alpha}_{\beta\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma s} dx^{s},$$

и таких, что при преобразованиях (1.1) и (1.2) они преобразуются по тензорному закону (1.5), то закон преобразования $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma s}$ дает формула (1.3).

Из (1.4) и (1.5) следует

$$d\Pi^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} + \Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma's'} dx^{s'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}} (d\Pi^{\alpha}_{\beta\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma s} dx^{s}).$$

Подставим в полученную формулу выражение дифференциала $d\Pi^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}$:

$$\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}} d\Pi^{\alpha}_{\beta\gamma} + \frac{\partial}{\partial x^{s}} \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}\right) \Pi^{\alpha}_{\beta\gamma} dx^{s} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x^{s}} \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\gamma'}} - \frac{2}{n+1} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{(\beta'}} \frac{\partial \ln \Delta}{\partial x^{\gamma')}}\right) dx^{s} + \Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma's'} \cdot \frac{\partial x^{s'}}{\partial x^{s}} dx^{s} =$$

$$= \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}} (d\Pi^{\alpha}_{\beta\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma s} dx^{s}).$$

После приведения подобных членов, ввиду произвольности dx^{s}, получим:

$$\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma's'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}} \frac{\partial x^{s}}{\partial x^{s'}} \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma s} - \frac{\partial}{\partial x^{s'}} \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}\right) \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x^{s'}} \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\gamma'}} - \frac{2}{n+1} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{(\beta'}} \frac{\partial \ln \Delta}{\partial x^{\gamma')}}\right).$$

Из полученного следует (1.3).

§ 2. Связность в пространстве опорных элементов Π_n.

Определим инвариантное дифференцирование векторных полей, определенных на Π_n, таким образом, чтобы дифференциал тензора являлся величиной того же типа.

Инвариантный дифференциал векторного поля $\xi^{i}(x, \Pi)$, компоненты которого преобразуются по закону $\xi^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}} \xi^{i}$, определим при помощи дифференциально-геометрического объекта $\left(\Gamma^{i}_{kp}(x, \Pi),\ C^{i\beta\gamma}_{k\alpha}(x, \Pi)\right)$ следующим образом

$$D\xi^{i} = d\xi^{i} + \xi^{k} (\Gamma^{i}_{kp} dx^{p} + C^{i\beta\gamma}_{k\alpha} \Theta^{\alpha}_{\beta\gamma}). \tag{2.1}$$

Объект (Γ, C) будем называть объектом аффинной связности пространства опорных элементов ([2], стр. 13).

Найдем закон преобразования компонент этого объекта (для общего случая эти законы получены в [2]).

Теорема 2. *Для того, чтобы $D\xi^{i}$ являлся векторным полем, т. е. чтобы при преобразованиях* (1.1) *и* (1.2) *преобразовались по закону*

$$D\xi^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}} D\xi^{i}, \tag{2.2}$$

необходимо и достаточно, чтобы объект (Γ, C) *имел следующую структуру:*

$$\Gamma^{i'}_{k'p'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}} \frac{\partial x^{k}}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{p}}{\partial x^{p'}} \Gamma^{i}_{kp} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}} \frac{\partial^2 x^{i}}{\partial x^{k'} \partial x^{p'}}, \tag{2.3}$$

$$C^{i'\beta'\gamma'}_{k'\alpha'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}} \frac{\partial x^{k}}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{\gamma}} C^{i\beta\gamma}_{k\alpha}. \tag{2.4}$$

Доказательство. Нужно доказать, что из (2.1) и (2.2) следует (2.3) и (2.4). Соотношения (2.2) можем записать в виде

$$d\xi^{i'}+\xi^{k'}(\Gamma^{i'}_{k'p'}dx^{p'}+C^{i'\beta'\gamma'}_{k'\alpha'}\Theta^{\alpha'}_{\beta'\gamma'})=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}[d\xi^{i}+\xi^{k}(\Gamma^{i}_{kp}dx^{p}+C^{i\beta\gamma}_{k\alpha}\Theta^{\alpha}_{\beta\gamma})]. \quad (2.5)$$

Так как

$$\xi^{i'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\xi^{i},\quad dx^{p'}=\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{p}}dx^{p}$$

и

$$\Theta^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}=\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}\Theta^{\alpha}_{\beta\gamma},$$

то (2.5) запишем в виде

$$d\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\right)\xi^{i}+\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}d\xi^{i}+\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k}}\xi^{k}\left(\Gamma^{i'}_{k'p'}\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{p}}dx^{p}+C^{i'\beta'\gamma'}_{k'\alpha'}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}\Theta^{\alpha}_{\beta\gamma}\right)=$$

$$=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}d\xi^{i}+\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\xi^{k}\Gamma^{i}_{kp}dx^{p}+\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\xi^{k}C^{i\beta\gamma}_{k\alpha}\Theta^{\alpha}_{\beta\gamma}.$$

Или, после приведения подобных членов, получим:

$$\left[\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k}}\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{p}}\Gamma^{i'}_{k'p'}+\frac{\partial}{\partial x^{p}}\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{k}}\right)\right]\xi^{k}dx^{p}+\left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k}}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}C^{i'\beta'\gamma'}_{k'\alpha'}\right)\xi^{k}\Theta^{\alpha}_{\beta\gamma}=$$

$$=\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\Gamma^{i}_{kp}\right)\xi^{k}dx^{p}+\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}C^{i\beta\gamma}_{k\alpha}\right)\xi^{k}\Theta^{\alpha}_{\beta\gamma}.$$

Так как последнее равенство должно выполняться при любых ξ^{k}, dx^{p} и $\Theta^{\alpha}_{\beta\gamma}$, получим

$$\Gamma^{i}_{kp}=\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k}}\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{p}}\Gamma^{i'}_{k'p'}+\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^{k}\partial x^{p}},$$

$$C^{i\beta\gamma}_{k\alpha}=\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k}}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}C^{i'\beta'\gamma'}_{k'\alpha'}.$$

Разрешив эти равенства относительно $\Gamma^{i'}_{k'p'}$ и $C^{i'\beta'\gamma'}_{k'\alpha'}$, мы получим (2.3) и (2.4).

Теперь докажем обратное: из (2.3), (2.4) и (2.1) следует (2.2). Из (2.1), в силу (2.3) и (2.4), получим

$$D\xi^{i'}=d\xi^{i'}+\xi^{k'}(\Gamma^{i'}_{k'p'}dx^{p'}+C^{i'\beta'\gamma'}_{k'\alpha'}\Theta^{\alpha'}_{\beta'\gamma'})=d\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\xi^{i}\right)+$$

$$+\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k}}\xi^{k}\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{k}}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{p}}{\partial x^{p'}}\Gamma^{i}_{kp}\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{p}}dx^{p}+\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\frac{\partial^2 x^{i}}{\partial x^{k'}\partial x^{p'}}\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{p}}dx^{p}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{k}}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{\gamma}}C^{i\beta\gamma}_{k\alpha}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}\Theta^{\alpha}_{\beta\gamma}\right).$$

Или

$$D\xi^{i'}=\left(\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^{k}\partial x^{p}}+\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\frac{\partial^2 x^{i}}{\partial x^{k'}\partial x^{p'}}\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{p}}\right)\xi^{k}dx^{p}+$$

$$+\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\left[d\xi^{i}+\xi^{k}(\Gamma^{i}_{kp}dx^{p}+C^{i\beta\gamma}_{k\alpha}\Theta^{\alpha}_{\beta\gamma})\right]. \quad (2.6)$$

Так как $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{k'}}=\delta^{i'}_{k'}$, то, продифференцировав это соотношение, получим

$$d\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\right)\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{k'}}+\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}d\left(\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{k'}}\right)=0$$

или

$$d\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\right)=-\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{k}}d\left(\frac{\partial x^{k}}{\partial x^{k'}}\right). \quad (2.7)$$

Из (2.7) следует

$$\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^{i}\partial x^{p}}=-\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{k}}\frac{\partial^2 x^{k}}{\partial x^{k'}\partial x^{p'}}\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{p}}. \quad (2.8)$$

В силу (2.8) формулу (2.6) перепишем

$$D\xi^{i'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\left[d\xi^{i}+\xi^{k}\left(\Gamma^{i}_{kp}\,dx^{p}+C^{i\beta\gamma}_{k\alpha}\,\Theta^{\alpha}_{\beta\gamma}\right)\right]=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\,D\xi^{i}.$$

Это и доказывает теорему.

Если ввести формы

$$\omega^{i}_{k}=\Gamma^{i}_{kp}\,dx^{p}+C^{i\beta\gamma}_{k\alpha}\,\Theta^{\alpha}_{\beta\gamma}, \tag{2.9}$$

то легко доказывается, что они преобразуются по закону

$$\omega^{i'}_{k'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\,\frac{\partial x^{k}}{\partial x^{k'}}\,\omega^{i}_{k}+\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\,d\left(\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{k'}}\right). \tag{2.10}$$

И (2.1) принимает вид:

$$D\xi^{i}=d\xi^{i}+\omega^{i}_{k}\,\xi^{k}. \tag{2.11}$$

Теорема 3. *Если введенный инвариантный дифференциал является дифференциальной операцией, перестановочной с контрактированием, то*

1) *инвариантный дифференциал скалярной функции φ совпадает с обыкновенным дифференциалом, то есть*

$$D\varphi=d\varphi; \tag{2.12}$$

2) *инвариантный дифференциал ковариантного векторного поля имеет структуру*

$$D\eta_{k}=d\eta_{k}-\omega^{p}_{k}\,\eta_{p}. \tag{2.13}$$

Доказательство. Из (2.11) для произвольного ξ^{i}, умноженного на φ, имеем:

$$D(\varphi\xi^{i})=d(\varphi\xi^{i})+(\varphi\xi^{k})\,\omega^{i}_{k}=\xi^{i}\,d\varphi+\varphi d\xi^{i}+\varphi\xi^{k}\,\omega^{i}_{k}=\xi^{i}\,d\varphi+\varphi\cdot D\xi^{i}. \tag{2.14}$$

Так как D является дифференциальной операцией, то

$$D(\varphi\xi^{i})=D\varphi\cdot\xi^{i}+\varphi\cdot D\xi^{i}. \tag{2.15}$$

и, сравнив с предыдущей, ввиду произвольности ξ^{i}, получим

$$D\varphi=d\varphi.$$

Для доказательства второй части теоремы воспользуемся тем, что инвариантное дифференцирование перестановочное с контрактированием.

Продифференцируем скаляр $\xi^{k}\eta_{k}$, где ξ_{k} – произвольный вектор, а η_{k} – данный ковектор:

$$D(\xi^{k}\eta_{k})=d\xi^{k}\,\eta_{k}+\xi^{k}\,d\eta_{k}.$$

С другой стороны

$$D(\xi^{k}\eta_{k})=D\xi^{k}\,\eta_{k}+\xi^{k}\,D\eta_{k}$$

и, в силу (2.11), получим:

$$d\xi^{k}\,\eta_{k}+\xi^{k}\,d\eta_{k}=(d\xi^{k}+\omega^{k}_{p}\,\xi^{p})\,\eta_{k}+\xi^{k}\,D\eta_{k}.$$

Заменив индексы суммирования $(k\longleftrightarrow p)$, получим:

$$\xi^{k}\,D\eta_{k}=\xi^{k}\,d\eta_{k}-\omega^{p}_{k}\,\xi^{k}\,\eta_{p},$$

и, ввиду произвольности ξ^{k}, получим

$$D\eta_{k}=d\eta_{k}-\omega^{p}_{k}\,\eta_{p}.$$

Что и требовалось доказать.

Если векторное поле ξ^{i} веса s, то есть, если ([4], стр. 188)

$$\xi^{i'}=\Delta^{s}\,\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\,\xi^{i}, \tag{2.16}$$

то имеет место

Теорема 4. *Для векторного поля веса s инвариантный дифференциал имеет вид*

$$D\xi^{i}=d\xi^{i}+\omega^{i}_{k}\,\xi^{k}-s\omega^{\tau}_{\tau}\,\xi^{i}. \tag{2.17}$$

Доказательство. Из (2.10) следует, что

$$\omega_{\tau'}^{\tau'} = \omega_{\tau}^{\tau} + \frac{\partial x^{\tau'}}{\partial x^{\tau}} \, d\left(\frac{\partial x^{\tau}}{\partial x^{\tau'}}\right)$$

или

$$d \ln \det \left\| \frac{\partial x^{r}}{\partial x^{r'}} \right\| = \omega_{\tau'}^{\tau'} - \omega_{\tau}^{\tau}.$$

Отсюда, согласно обозначению в формуле (1.2), получим

$$d \ln \Delta = \omega_{\tau'}^{\tau'} - \omega_{\tau}^{\tau}. \qquad (2.18)$$

Вычислим инвариантный дифференциал по формуле (2.11) векторного поля (2.16), пользуясь формулой (2.10).

$$D\xi^{i'} = d\xi^{i'} + \omega_{k'}^{i'} \xi^{k'} = d\left(\Delta^{s} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}} \xi^{i}\right) + \left[\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}} \frac{\partial x^{k}}{\partial x^{k'}} \omega_{k}^{i} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}} d\left(\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{k'}}\right)\right] \Delta^{s} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k}} \xi^{k} = s\Delta^{s} d \ln \Delta \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}} \xi^{i} + \Delta^{s} d\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\right) \xi^{i} +$$

$$+ \Delta^{s} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}} d\xi^{i} + \Delta^{s} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}} \frac{\partial x^{k}}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k}} \omega_{k}^{i} \xi^{k} + \Delta^{s} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k}} d\left(\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{k'}}\right) \xi^{k}.$$

В силу (2.7) и (2.18) будем иметь

$$d\xi^{i'} + \omega_{k'}^{i'} \xi^{k'} = s\Delta^{s} (\omega_{\tau'}^{\tau'} - \omega_{\tau}^{\tau}) \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}} \xi^{i} + \Delta^{s} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}} (d\xi^{i} + \omega_{k}^{i} \xi^{k}). \qquad (2.19)$$

Равенство (2.19) можно записать в виде

$$d\xi^{i'} + \omega_{k'}^{i'} \xi^{k'} - s\omega_{\tau'}^{\tau'} \xi^{i'} = \Delta^{s} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}} (d\xi^{i} + \omega_{k}^{i} \xi^{k} - s\omega_{\tau}^{\tau} \xi^{i}). \qquad (2.20)$$

Отсюда и следует, что имеет инвариантный смысл.

Продолжая рассуждения таким же путем, получим выражение инвариантного дифференциала для смешанного тензора любой валентности и веса. Пусть дано тензорное поле, закон преобразования которого следующий:

$$T_{\mu'_1 \ldots \mu'_e}^{\lambda'_1 \ldots \lambda'_k} = \Delta^{s} \frac{\partial x^{\lambda'_1}}{\partial x^{\lambda_1}} \cdots \frac{\partial x^{\mu_e}}{\partial x^{\mu'_e}} T_{\mu_1 \ldots \mu_e}^{\lambda_1 \ldots \lambda_k}. \qquad (2.21)$$

Тогда

$$DT_{\mu_1 \ldots \mu_e}^{\lambda_1 \ldots \lambda_k} = dT_{\mu_1 \ldots \mu_e}^{\lambda_1 \ldots \lambda_k} + \sum_{p=1}^{k} \omega_{\tau}^{\lambda_p} T_{\mu_1 \ldots \mu_e}^{\lambda_1 \ldots \tau \ldots \lambda_k} -$$

$$- \sum_{p=1}^{e} \omega_{\mu_p}^{\tau} T_{\mu_1 \ldots \tau \ldots \mu_e}^{\lambda_1 \ldots \lambda_k} - s\omega_{\tau}^{\tau} T_{\mu_1 \ldots \mu_e}^{\lambda_1 \ldots \lambda_k}. \qquad (2.22)$$

§ 3. Пфаффовы производные

Если $f(x, \Pi)$ скалярная функция класса C^2, определенная на Π_n, то коэффициенты линейного разложения инвариантного дифференциала этой функции через формы dx^i и $\Theta_{\beta\gamma}^{\alpha}$ называются пфаффовыми производными рассматриваемой функции.

Найдем эти производные.

Так как

$$df(x, \Pi) = \frac{\partial f}{\partial x^{i}} dx^{i} + \frac{\partial f}{\partial \Pi_{\beta\gamma}^{\alpha}} d\Pi_{\beta\gamma}^{\alpha},$$

то, в силу (1.4), получим

$$df(x, \Pi) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^{i'}} - \frac{\partial f}{\partial \Pi_{\beta\gamma}^{\alpha}} \Gamma_{\beta\gamma s}^{\alpha}\right) dx^{s} + \frac{\partial f}{\partial \Pi_{\beta\gamma}^{\alpha}} \Theta_{\beta\gamma}^{\alpha}. \qquad (3.1)$$

Введем обозначения ([2], стр. 17)

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{\partial f}{\partial \Pi^\alpha_{\beta\gamma}} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma i} = \overset{\Gamma}{\partial}_i f, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \Pi^\alpha_{\beta\gamma}} = \overset{\Gamma}{\partial}{}^{\beta\gamma}_\alpha f. \tag{3.3}$$

Формулу (3.1) перепишем $\big($в силу (3.3) и (3.2)$\big)$ в виде

$$df(x,\ \Pi) = \overset{\Gamma}{\partial}_i f\, dx^i + \overset{\Gamma}{\partial}{}^{\beta\gamma}_\alpha f\, \Theta^\alpha_{\beta\gamma}, \tag{3.4}$$

$\overset{\Gamma}{\partial}_i f$ – будем называть производной первого рода, а $\overset{\Gamma}{\partial}{}^{\beta\gamma}_\alpha f$ – второго рода. Для скалярной функции $f(x,\ \Pi)$ они являются тензорами (доказательство ниже).

Альтернирование вторых пфаффовых производных первого рода дает:

$$2\,\overset{\Gamma}{\partial}_{[i}\overset{\Gamma}{\partial}_{j]} f = \overset{\Gamma}{\partial}{}^{\beta\gamma}_\alpha f\ R^\alpha_{ij\beta\gamma}, \tag{3.5}$$

где

$$R^\alpha_{ij\beta\gamma} = \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\gamma i}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\gamma j}}{\partial x^i} + \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\gamma j}}{\partial \Pi^r_{st}} \Gamma^r_{sti} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\gamma i}}{\partial \Pi^r_{st}} \Gamma^r_{stj}. \tag{3.6}$$

Теорема 5. *Первые пфаффовые производные и $R^\alpha_{ij\beta\gamma}$ являются тензорами.*

Доказательство. Из инвариантности формы дифференциала скалярной функции следует

$$df = \overset{\Gamma}{\partial}_i f\, dx^i + \overset{\Gamma}{\partial}{}^{\beta\gamma}_\alpha f\, \Theta^\alpha_{\beta\gamma} = \overset{\Gamma}{\partial}_{i'} f\, dx^{i'} + \overset{\Gamma}{\partial}{}^{\beta'\gamma'}_{\alpha'} f\, \Theta^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}.$$

Или, в силу (1.5), получаем:

$$\overset{\Gamma}{\partial}_i f\, dx^i + \overset{\Gamma}{\partial}{}^{\beta\gamma}_\alpha f\, \Theta^\alpha_{\beta\gamma} = \overset{\Gamma}{\partial}_{i'} f \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\, dx^i + \overset{\Gamma}{\partial}{}^{\beta'\gamma'}_{\alpha'} f \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}}\, \Theta^\alpha_{\beta\gamma}. \tag{3.7}$$

Так как равенство (3.7) сохраняется при произвольных dx^i и $\Theta^\alpha_{\beta\gamma}$, то

$$\overset{\Gamma}{\partial}_i f = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \overset{\Gamma}{\partial}_{i'} f, \tag{3.8}$$

$$\overset{\Gamma}{\partial}{}^{\beta\gamma}_\alpha f = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}} \overset{\Gamma}{\partial}{}^{\beta'\gamma'}_{\alpha'} f. \tag{3.9}$$

Таким образом, первые пфаффовые производные от скалярной функции являются тензорами.

Докажем, что $\overset{\Gamma}{\partial}_{[i}\overset{\Gamma}{\partial}_{j]} f$ тензор.

Из (3.8) получим:

$$\overset{\Gamma}{\partial}_{j'}\overset{\Gamma}{\partial}_{i'} f = \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \overset{\Gamma}{\partial}_j \overset{\Gamma}{\partial}_{i'} f = \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \left[\frac{\partial}{\partial x^j} (\overset{\Gamma}{\partial}_{i'} f) - \overset{\Gamma}{\partial}{}^{\beta\gamma}_\alpha (\overset{\Gamma}{\partial}_{i'} f)\cdot \Gamma^\alpha_{\beta\gamma j}\right] =$$

$$= \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \left[\frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \overset{\Gamma}{\partial}_i f\right) - \overset{\Gamma}{\partial}{}^{\beta\gamma}_\alpha \overset{\Gamma}{\partial}_{i'} f\, \Gamma^\alpha_{\beta\gamma j}\right] = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \overset{\Gamma}{\partial}_i f +$$

$$+ \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \left[\frac{\partial}{\partial x^j} \overset{\Gamma}{\partial}_i f - \overset{\Gamma}{\partial}{}^{\beta\gamma}_\alpha \overset{\Gamma}{\partial}_i f\, \Gamma^\alpha_{\beta\gamma j}\right] = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \overset{\Gamma}{\partial}_i f + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \overset{\Gamma}{\partial}_j \overset{\Gamma}{\partial}_i f.$$

Аналогично получим:

$$\overset{\Gamma}{\partial}_{i'}\overset{\Gamma}{\partial}_{j'} f = \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \overset{\Gamma}{\partial}_j f + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \overset{\Gamma}{\partial}_i \overset{\Gamma}{\partial}_j f.$$

Взяв разность, мы получим:

$$\overset{\Gamma}{\partial}_{i'}\overset{\Gamma}{\partial}_{j'} f - \overset{\Gamma}{\partial}_{j'}\overset{\Gamma}{\partial}_{i'} f = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} (\overset{\Gamma}{\partial}_i \overset{\Gamma}{\partial}_j f - \overset{\Gamma}{\partial}_j \overset{\Gamma}{\partial}_i f). \tag{3.10}$$

Из формул (3.5), (3.9) и (3.10) следует, что $R^{\alpha}_{ij\beta\gamma}$ тоже тензор.

Тензор $R^{\alpha}_{ij\beta\gamma}$ называется тензором кривизны связности $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma i}$. Если $R^{\alpha}_{ij\beta\gamma}=0$, то вторые пфаффовые производные первого рода симметричны для любой скалярной функции. В этом случае линейная дифференциально-геометрическая связность называется плоской или связностью нулевой кривизны, если пространство опорных элементов рассматривается как составное многообразие в смысле В. В. Вагнера.

§ 4. Инвариантные производные и тождества Риччи

Формулу (2.1) можно переписать следующим образом:

$$D\xi^i=\nabla_k\xi^i\,dx^k+\nabla^{\beta\gamma}_{\alpha}\xi^i\,\Theta^{\alpha}_{\beta\gamma}, \tag{4.1}$$

где

$$\nabla_k\xi^i=\partial_k\xi^i+\xi^p\overset{\Gamma}{\Gamma}{}^i_{pk}, \tag{4.2}$$

$$\nabla^{\beta\gamma}_{\alpha}\xi^i=\partial^{\beta\gamma}_{\alpha}\xi^i+\xi^p\overset{\Gamma}{C}{}^{i\beta\gamma}_{p\alpha}. \tag{4.3}$$

$\nabla_k\xi^i$ и $\nabla^{\beta\gamma}_{\alpha}\xi^i$ – инвариантные производные, соответственно, первого и второго рода. Аналогично определяются инвариантные производные тензора.

Теорема 6. *Инвариантные производные $\nabla_k\xi^i$ и $\nabla^{\beta\gamma}_{\alpha}\xi^i$ являются тензорами.*

Доказательство. Так как $D\xi^i$, dx^k и $\Theta^{\alpha}_{\beta\gamma}$ являются тензорами, то

$$D\xi^{i'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}D\xi^i,$$

$$dx^{k'}=\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}dx^k, \tag{4.4}$$

$$\Theta^{\alpha}_{\beta\gamma}=\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{\gamma}}\Theta^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}, \tag{4.5}$$

$$\nabla_{k'}\xi^{i'}dx^{k'}+\nabla^{\beta'\gamma'}_{\alpha'}\xi^{i'}\Theta^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(\nabla_k\xi^i dx^k+\nabla^{\beta\gamma}_{\alpha}\xi^i\Theta^{\alpha}_{\beta\gamma}).$$

Подставляя в последнюю формулу соответствующие выражения из (4.4) и (4.5), получим:

$$\nabla_{k'}\xi^{i'}dx^{k'}+\nabla^{\beta'\gamma'}_{\alpha'}\xi^{i'}\Theta^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\nabla_k\xi^i dx^{k'}+\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{\gamma}}\nabla^{\beta\gamma}_{\alpha}\xi^i\Theta^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}.$$

Так как эти выражения должны выполняться при любых $dx^{k'}$ и $\Theta^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}$, то

$$\Delta_{k'}\xi^{i'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\nabla_k\xi^i, \tag{4.6}$$

$$\nabla^{\beta'\gamma'}_{\alpha'}\xi^{i'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{\gamma}}\Delta^{\beta\gamma}_{\alpha}\xi^i, \tag{4.7}$$

что и доказывает теорему.

Альтернирование инвариантных производных второго порядка первого рода векторного поля приводит к обобщенным тождествам Риччи. Так как

$$\nabla_k\xi^i=\partial_k\xi^i-\partial^{\beta\gamma}_{\alpha}\xi^i\,\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma k}+\xi^p\,\Gamma^i_{pk}, \tag{4.8}$$

где

$$\partial_k\xi^i=\frac{\partial\xi^i}{\partial x^k}\quad\text{и}\quad\partial^{\beta\gamma}_{\alpha}\xi^i=\frac{\partial\xi^i}{\partial\Pi^{\alpha}_{\beta\gamma}},$$

то

$$\nabla_l \nabla_k \xi^i = \partial_l \partial_k \xi^i - \partial_l \partial_\alpha^{\beta\gamma} \xi^i \Gamma^\alpha_{\beta\gamma k} - \partial_\alpha^{\beta\gamma} \xi^i \partial_l \Gamma^\alpha_{\beta\gamma k} +$$
$$+ \partial_\alpha^{\beta\gamma} \xi^i \partial_r^{st} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma k} \Gamma^r_{stl} - \partial_\alpha^{\beta\gamma} \xi^p \Gamma^i_{pk} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma l} - \xi^p \partial_\alpha^{\beta\gamma} \Gamma^i_{pk} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma l} +$$
$$+ \partial_k \xi^s \Gamma^i_{sl} - \partial_\alpha^{\beta\gamma} \xi^s \Gamma^\alpha_{\beta\gamma k} \Gamma^i_{sl} + \partial_r^{st} \partial_\alpha^{\beta\gamma} \xi^i \Gamma^\alpha_{\beta\gamma k} \Gamma^r_{stl} + \partial_l \xi^s \Gamma^i_{sk} +$$
$$+ \xi^p \partial_l \Gamma^i_{pk} - \partial_\alpha^{\beta\gamma} \partial_k \xi^i \Gamma^\alpha_{\beta\gamma l} + \xi^p \Gamma^s_{pk} \Gamma^i_{sl} - \nabla_q \xi^i \Gamma^q_{kl}.$$

$$\nabla_k \nabla_l \xi^i = \partial_k \partial_l \xi^i - \partial_k \partial_\alpha^{\beta\gamma} \xi^i \Gamma^\alpha_{\beta\gamma l} - \partial_\alpha^{\beta\gamma} \xi^i \partial_k \Gamma^\alpha_{\beta\gamma l} +$$
$$+ \partial_k \xi^p \Gamma^i_{pl} + \xi^p \partial_k \Gamma^i_{pl} - \partial_\alpha^{\beta\gamma} \partial_l \xi^i \Gamma^\alpha_{\beta\gamma k} + \partial_r^{st} \partial_\alpha^{\beta\gamma} \xi^i \Gamma^\alpha_{\beta\gamma l} \Gamma^r_{stk} +$$
$$+ \partial_\alpha^{\beta\gamma} \xi^i \partial_r^{st} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma l} \Gamma^r_{stk} - \partial_\alpha^{\beta\gamma} \xi^p \Gamma^i_{pl} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma k} - \xi^p \partial_\alpha^{\beta\gamma} \Gamma^i_{pl} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma k} +$$
$$+ \partial_l \xi^s \Gamma^i_{sk} - \partial_\alpha^{\beta\gamma} \xi^s \Gamma^\alpha_{\beta\gamma l} \Gamma^i_{sk} + \xi^p \Gamma^s_{pl} \Gamma^i_{sk} - \nabla_q \xi^i \Gamma^q_{lk}.$$

Альтернируя по индексам k и l, получим:

$$-2\nabla_{[k} \nabla_{l]} \xi^i = \nabla_l \nabla_k \xi^i - \nabla_k \nabla_l \xi^i = \partial_\alpha^{\beta\gamma} \xi^i \partial_k \Gamma^\alpha_{\beta\gamma l} - \partial_\alpha^{\beta\gamma} \xi^i \partial_l \Gamma^\alpha_{\beta\gamma k} +$$
$$+ \xi^p \partial_l \Gamma^i_{pk} - \xi^p \partial_k \Gamma^i_{pl} + \partial_\alpha^{\beta\gamma} \xi^i \partial_r^{st} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma k} \Gamma^r_{stl} - \partial_\alpha^{\beta\gamma} \xi^i \partial_r^{st} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma l} \Gamma^r_{stk} +$$
$$+ \xi^p \partial_\alpha^{\beta\gamma} \Gamma^i_{pl} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma k} - \xi^p \partial_\alpha^{\beta\gamma} \Gamma^i_{pk} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma l} + \xi^p \Gamma^s_{pk} \Gamma^i_{sl} - \xi^p \Gamma^i_{pl} \Gamma^i_{sk} -$$
$$-2\nabla_q \xi^i \Gamma^q_{[kl]} = \xi^p (2\partial_{[l} \Gamma^i{}_{|p|k]} - 2\partial_\alpha^{\beta\gamma} \Gamma^i_{p[k} \Gamma^\alpha{}_{|\beta\gamma|l]} - 2\Gamma^i_{s[k} \Gamma^s{}_{|p|l]}) -$$
$$-2\nabla_q \xi^i \Gamma^q_{[kl]} - \partial_\alpha^{\beta\gamma} \xi^i (\partial_l \Gamma^\alpha_{\beta\gamma k} - \partial_k \Gamma^\alpha_{\beta\gamma l} + \partial_r^{st} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma l} \Gamma^r_{stk} - \partial_r^{st} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma k} \Gamma^r_{stl}).$$

Таким образом,

$$2\nabla_{[l} \nabla_{k]} \xi^i = \xi^p R^i_{plk} - 2\nabla_q \xi^i R^q_{kl} - \partial_\alpha^{\beta\gamma} \xi^i R^\alpha_{\beta\gamma lk}, \tag{4.9}$$

где

$$R^i_{plk} = 2(\partial_{[l} \Gamma^i{}_{|p|k]} - \partial_\alpha^{\beta\gamma} \Gamma^i_{p[k} \Gamma^\alpha{}_{|\beta\gamma|l]} - \Gamma^i_{s[k} \Gamma^s{}_{p|l]}), \tag{4.10}$$

$$R^q_{kl} = \Gamma^q_{[kl]} \tag{4.11}$$

и

$$R^\alpha_{\beta\gamma lk} = 2(\partial_{[l} \Gamma^\alpha{}_{|\beta\gamma|k]} + \partial_r^{st} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma[l} \Gamma^r{}_{|st|k]}). \tag{4.12}$$

Тензор R^q_{kl} называется первым тензором кручения пространства Π_n, а тензор R^i_{plk} – первым тензором кривизны того же пространства.

Тождества (4.9) являются первой группой обобщенных тождеств Риччи и их можно переписать еще в виде:

$$2\nabla_{[l} \nabla_{k]} \xi^i = \xi^p K^i_{plk} - \nabla_\alpha^{\beta\gamma} \xi^i R^\alpha_{\beta\gamma lk} + 2\nabla_q \xi^i R^q_{lk}, \tag{4.13}$$

где

$$K^i_{plk} = R^i_{plk} + C^{i\beta\gamma}_{p\alpha} R^\alpha_{\beta\gamma lk}. \tag{4.14}$$

Тензор K^i_{plk}, согласно терминологии Б. Л. Лаптева, называется первым картановым тензором кривизны пространства Π_n.

Вторую группу обобщенных тождеств Риччи получим, рассматривая вторые инвариантные производные $\nabla_\alpha^{\beta\gamma} \nabla_r^{st} \xi^i$:

$$\nabla_r^{st} \nabla_\alpha^{\beta\gamma} \xi^i = \partial_r^{st} \partial_\alpha^{\beta\gamma} \xi^i + \partial_\alpha^{\beta\gamma} \xi^q C^{ist}_{qr} - \partial_j^{kl} \xi^i C^{\beta\gamma}_\alpha{}^{st}_r{}^j_{kl} + \partial_r^{st} \xi^p C^{i\beta\gamma}_{p\alpha} +$$
$$+ \xi^p \partial_r^{st} C^{i\beta\gamma}_{p\alpha} + \xi^p C^{q\beta\gamma}_{p\alpha} C^{ist}_{qr} - \xi^p C^i_p{}^{kl}_j C^{\beta\gamma}_\alpha{}^{st}_r{}^j_{kl}.$$

Альтернирование проводим по группам индексов $\binom{st}{r}$, $\binom{\beta\gamma}{\alpha}$:

$$2\nabla_{[r}^{st} \nabla_{\alpha]}^{\beta\gamma} \xi^i = \nabla_r^{st} \nabla_\alpha^{\beta\gamma} \xi^i - \nabla_\alpha^{\beta\gamma} \nabla_r^{st} \xi^i = \partial_r^{st} \partial_\alpha^{\beta\gamma} \xi^i - \partial_\alpha^{\beta\gamma} \partial_r^{st} \xi^i +$$
$$+ \partial_\alpha^{\beta\gamma} \xi^q C^{ist}_{qr} - \partial_r^{st} \xi^q C^{i\beta\gamma}_{q\alpha} - \partial_j^{kl} \xi^i C^{\beta\gamma}_\alpha{}^{st}_r{}^j_{kl} + \partial_j^{kl} \xi^i C^{st}_r{}^{\beta\gamma}_\alpha{}^j_{kl} +$$
$$+ \partial_r^{st} \xi^p C^{i\beta\gamma}_{p\alpha} - \partial_\alpha^{\beta\gamma} \xi^p C^{ist}_{pr} + \xi^p \partial_r^{st} C^{i\beta\gamma}_{p\alpha} - \xi^p \partial_\alpha^{\beta\gamma} C^{ist}_{pr} +$$
$$+ \xi^p C^{q\beta\gamma}_{p\alpha} C^{ist}_{qr} - \xi^q C^{pst}_{qr} C^{i\beta\gamma}_{p\alpha} - \xi^p C^{ikl}_{pj} C^{\beta\gamma}_\alpha{}^{st}_r{}^j_{kl} +$$
$$+ \xi^p C^i_p{}^{kl}_j C^{st\beta\gamma j}_{r\alpha kl} = -2\xi^p (\partial[{}^{\beta\gamma}_\alpha C|{}^i_p|{}^{st}_r] + C^i_q [{}^{\beta\gamma}_\alpha C|{}^q_p|{}^{st}_r] +$$
$$+ C^{ikl}_{pj} C[{}^{\beta\gamma}_\alpha{}^{st}_r]^j_{kl}) - 2\partial_j^{kl} \xi^i C[{}^{\beta\gamma}_\alpha{}^{st}_r]^j_{kl},$$

или

$$2\nabla\,[^{st}_{r}\,\nabla^{\beta\gamma}_{\alpha}]\,\xi^{i}=\xi^{p}\,R^{ist\beta\gamma}_{pr\alpha}+2\partial^{kl}_{j}\,\xi^{i}\,R^{st\beta\gamma j}_{r\alpha kl}, \tag{4.15}$$

где

$$R^{i\beta\gamma st}_{p\alpha r}=2\,\{\partial\,[^{\beta\gamma}_{\alpha}\,C\,|^{i}_{p}\,|^{st}_{r}]+C^{i}_{q}\,[^{\beta\gamma}_{\alpha}\,C\,|^{q}_{p}\,|^{st}_{r}]+C^{ikl}_{pj}\,C\,[^{\beta\gamma st}_{\alpha r}]^{j}_{kl}\} \tag{4.16}$$

и

$$R^{\beta\gamma stj}_{\alpha rkl}=C\,[^{\beta\gamma st}_{\alpha r}]^{j}_{kl}. \tag{4.17}$$

Тензор (4.17) называется вторым тензором кручения пространства Π_n, а тензор (4.16) – вторым тензором кривизны.

Тождества (4.15) можно переписать в следующем виде:

$$2\nabla\,[^{st}_{r}\,\nabla^{\beta\gamma}_{\alpha}]\,\xi^{i}=\xi^{q}\,K^{ist\beta\gamma}_{qr\alpha}-2\nabla^{kl}_{j}\,\xi^{i}\,R^{\beta\gamma stj}_{\alpha rkl}, \tag{4.18}$$

где

$$K^{ist\beta\gamma}_{qr\alpha}=R^{ist\beta\gamma}_{qr\alpha}+2C^{ikl}_{qj}\,R^{\beta\gamma stj}_{\alpha rkl}. \tag{4.19}$$

Последний называется вторым картановым тензором пространства Π_n.

Третью группу обобщенных тождеств Риччи получим, рассматривая изменение порядка инвариантного и частного дифференцирования по компонентам опорного объекта. Вычислим величины $\partial^{\beta\gamma}_{\alpha}\nabla_k\,\xi^i$ и $\nabla_k\,\partial^{\beta\gamma}_{\alpha}\,\xi^i$:

$$\partial^{\beta\gamma}_{\alpha}\,\nabla_k\,\xi^{i}=\frac{\partial^{2}\xi^{i}}{\partial x^{k}\,\partial\Pi^{\alpha}_{\beta\gamma}}+\frac{\partial\xi^{p}}{\partial\Pi^{\alpha}_{\beta\gamma}}\,\Gamma^{i}_{pk}+\xi^{p}\,\frac{\partial\Gamma^{i}_{pk}}{\partial\Pi^{\alpha}_{\beta\gamma}}-\frac{\partial^{2}\xi^{i}}{\partial\Pi^{\alpha}_{\beta\gamma}\,\partial\Pi^{r}_{st}}\,\Gamma^{r}_{kst}-\frac{\partial\xi^{i}}{\partial\Pi^{r}_{st}}\,\frac{\partial\Gamma^{r}_{kst}}{\partial\Pi^{\alpha}_{\beta\gamma}}\,; \tag{4.20}$$

$$\nabla_k\,\partial^{\beta\gamma}_{\alpha}\,\xi^{i}=\frac{\partial^{2}\xi^{i}}{\partial x^{k}\,\partial\Pi^{\alpha}_{\beta\gamma}}+\frac{\partial\xi^{p}}{\partial\Pi^{\alpha}_{\beta\gamma}}\,\Gamma^{i}_{pk}-\frac{\partial\xi^{i}}{\partial\Pi^{r}_{st}}\,\Gamma^{\beta\gamma}_{\alpha}{}^{r}_{kst}-\frac{\partial^{2}\xi^{i}}{\partial\Pi^{\alpha}_{\beta\gamma}\,\partial\Pi^{r}_{st}}\cdot\Gamma^{r}_{kst}. \tag{4.21}$$

Беря разность (4.20) и (4.21), получим:

$$\partial^{\beta\gamma}_{\alpha}\,\nabla_k\,\xi^{i}-\nabla_k\,\partial^{\beta\gamma}_{\alpha}\,\xi^{i}=\xi^{p}\,\partial^{\beta\gamma}_{\alpha}\,\Gamma^{i}_{pk}+\partial^{st}_{r}\,\xi^{i}\,(\Gamma^{\beta\gamma r}_{\alpha st}-\partial^{\beta\gamma}_{\alpha}\,\Gamma^{r}_{kst})$$

или

$$\partial^{\beta\gamma}_{\alpha}\,\nabla_k\,\xi^{i}-\nabla_k\,\partial^{\beta\gamma}_{\alpha}\,\xi^{i}=-\xi^{p}\,L^{i\beta\gamma}_{pk\alpha}+\partial^{st}_{r}\,\xi^{i}\,L^{\beta\gamma r}_{\alpha kst}, \tag{4.22}$$

где

$$L^{i\beta\gamma}_{pk\alpha}=\partial^{\beta\gamma}_{\alpha}\,\Gamma^{i}_{pk} \tag{4.23}$$

и

$$L^{\beta\gamma r}_{\alpha kst}=\Gamma^{\beta\gamma r}_{\alpha kst}-\partial^{\beta\gamma}_{\alpha}\,\Gamma^{r}_{kst}. \tag{4.24}$$

Тензор (4.24) называется простейшим тензором кручения пространства Π_n, а (4.23) – простейшим тензором кривизны (имеется ввиду терминология Б. Л. Лаптева для случая пространства тензорных опорных элементов).

Другой вид третьей группы (или четвертую группу) обобщенных тождеств Риччи получим, рассматривая разность

$$\nabla^{\beta\gamma}_{\alpha}\,\nabla_k\,\xi^{i}-\nabla_k\,\nabla^{\beta\gamma}_{\alpha}\,\xi^{i}.$$

Так как

$$\begin{aligned}\nabla^{\beta\gamma}_{\alpha}\,\nabla_k\,\xi^{i}={}&\frac{\partial^{2}\xi^{i}}{\partial x^{k}\,\partial\Pi^{\alpha}_{\beta\gamma}}+\partial_k\,\xi^{p}\,C^{i\beta\gamma}_{p\alpha}-\partial_p\,\xi^{i}\,C^{p\beta\gamma}_{k\alpha}+\partial^{\beta\gamma}_{\alpha}\,\xi^{p}\,\Gamma^{i}_{pk}+\\&+\xi^{p}\,\partial^{\beta\gamma}_{\alpha}\,\Gamma^{i}_{pk}+\xi^{p}\,\Gamma^{q}_{pk}\,C^{i\beta\gamma}_{q\alpha}-\xi^{p}\,\Gamma^{i}_{pq}\,C^{q\beta\gamma}_{k\alpha}-\frac{\partial^{2}\xi^{i}}{\partial\Pi^{\alpha}_{\beta\gamma}\,\partial\Pi^{r}_{st}}\,\Gamma^{r}_{kst}-\\&-\frac{\partial\xi^{i}}{\partial\Pi^{r}_{st}}\,\frac{\partial\Gamma^{r}_{kst}}{\partial\Pi^{\alpha}_{\beta\gamma}}-\partial^{st}_{r}\,\xi^{p}\,\Gamma^{r}_{kst}\,C^{i\beta\gamma}_{p\alpha}+\partial^{st}_{r}\,\xi^{i}\,\Gamma^{r}_{qst}\,C^{q\beta\gamma}_{k\alpha},\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}\nabla_k\,\nabla^{\beta\gamma}_{\alpha}\,\xi^{i}={}&\frac{\partial^{2}\xi^{i}}{\partial x^{k}\,\partial\Pi^{\alpha}_{\beta\gamma}}-\frac{\partial^{2}\xi^{i}}{\partial\Pi^{r}_{st}\,\partial\Pi^{\alpha}_{\beta\gamma}}\Gamma^{r}_{kst}+\partial^{\beta\gamma}_{\alpha}\,\xi^{p}\,\Gamma^{i}_{pk}-\partial^{st}_{r}\,\xi^{i}\,\Gamma^{\beta\gamma r}_{\alpha kst}+\\&+\partial_k\,\xi^{p}\,C^{i\beta\gamma}_{p\alpha}+\xi^{q}\,\partial_k\,C^{i\beta\gamma}_{q\alpha}-\partial^{st}_{r}\,\xi^{p}\,C^{i\beta\gamma}_{p\alpha}\,\Gamma^{r}_{kst}-\xi^{p}\,\partial^{st}_{r}\,C^{i\beta\gamma}_{p\alpha}\,\Gamma^{r}_{kst}+\\&+\xi^{q}\,C^{p\beta\gamma}_{q\alpha}\,\Gamma^{i}_{pk}-\xi^{p}\,C^{ist}_{pr}\,\Gamma^{\beta\gamma r}_{\alpha kst},\end{aligned} \tag{4.26}$$

то из (4.25) и (4.26) следует, что

$$\nabla_\alpha^{\beta\gamma} \nabla_k \xi^i - \nabla_k \nabla_\alpha^{\beta\gamma} \xi^i = \xi^q (L_{qk\alpha}^{i\beta\gamma} - C_{qr}^{ist} L_{\alpha kst}^{\beta\gamma r} - \nabla_k C_{q\alpha}^{i\beta\gamma}) +$$
$$+ \nabla_q \xi^i C_{k\alpha}^{q\beta\gamma} - \nabla_r^{st} \xi^i (\partial_\alpha^{\beta\gamma} \Gamma_{kst}^r - \Gamma_{\alpha kst}^{\beta\gamma r}).$$

Или, окончательно,

$$\nabla_\alpha^{\beta\gamma} \nabla_k \xi^i - \nabla_k \nabla_\alpha^{\beta\gamma} \xi^i = \xi^q + R_{qk\alpha}^{i\beta\gamma} \nabla_q \xi^i C_{k\alpha}^{q\beta\gamma} + \nabla_r^{st} \xi^i L_{\alpha kst}^{\beta\gamma r}, \tag{4.27}$$

где

$$R_{qk\alpha}^{i\beta\gamma} = L_{qk\alpha}^{i\beta\gamma} - C_{qr}^{ist} L_{\alpha kst}^{\beta\gamma r} - \nabla_k C_{q\alpha}^{i\beta\gamma}. \tag{4.28}$$

Тензор (4.28) называется третьим картановым тензором кривизны, а $C_{k\alpha}^{q\beta\gamma}$ — третьим тензором кручения пространства Π_n.

Вильнюсский педагогический институт

Поступило в редакцию I.X.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Близникас, О некоторых многообразиях опорных элементов, Лит. мат. сб., т. 3, № 2, 231–232, 1963.
2. В. И. Близникас, К теории кривизны пространства опорных элементов, Лит. мат. сб., т. 5, № 1, 9–24, 1955.
3. В. В. Вагнер, Теория дифференциальных объектов и основания дифференциальной геометрии, Дополнение к книге О. Веблен и Дж. Уайтхед „Основания дифференциальной геометрии", Москва, 1949.
4. Б. Л. Лаптев, Аффинная связность в пространстве тензорных опорных элементов, Известия Казанского физико-матем. общ. при Казанском гос. университете им. В. И. Ленина, т. XIV, сер. 3, 1949.
5. Б. Л. Лаптев, Производная Ли в обобщенных пространствах, Труды сем. по векторн. и тензорн. анализу, вып. 10, 227–248, 1956.

APIE ATRAMINIŲ ELEMENTŲ ERDVĖS SĄRYŠIUS

A. URBONAS

(*Reziumė*)

Darbe nagrinėjama speciali atraminių elementų erdvė Π_n, t. y. kai atraminis objektas sutampa su projektyvinio sąryšio objektu (1.2). Surasta struktūra (2.3), (2.4) diferencialinių geometrinių objektų, kurių pagalba galima įvesti invariantinio diferencialo sąvoką.

Surastos apibendrintos Ričio tapatybės (4.9), (4.13), (4.15), (4.18), (4.22), (4.27) pirmos ir antros rūšies invariantinėms išvestinėms, o taip pat kreivumo ir sukimosi tenzoriai (3.6) 4.10), (4.11), (4.14), (4.16), (4.17), (4.19), (4.23), (4.24), (4.28). Darbas atliktas tenzoriniu metodu.

ÜBER ZUSAMMENHÄNGEN DES RAUMES VON STÜTZELEMENTEN

A. URBONAS

(*Zusammenfassung*)

Wir legen eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit der Klasse r zugrunde, die wir noch zu einer Mannigfaltigkeit von Stützelementen erweitern, indem wir in jedem Punkt differentialgeometrische Objekte $\Pi_{\beta\gamma}^\alpha$:

$$\Pi_{\beta'\gamma'}^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}} \Pi_{\beta\gamma}^\alpha + \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\gamma'}} - \frac{2}{n+1} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{(\beta'}} \frac{\partial \ln \Delta}{\partial x^{\gamma')}}$$

hinzunehmen. Die Mannigfaltigkeit Π_n von Stützelementen $(x^i, \Pi^\alpha_{\beta\gamma})$ ist eine $\frac{n^2(n+1)}{2}$ - dimensionale Mannigfaltigkeit.

Das invariante Differential eines Vektors ξ^α ist durch (2.1) festgelegt, wo Γ^i_{kp} das Objekt von affinen Zusammenhangs und $C^{i\beta\gamma}_{k\alpha}$ das Tensor sind. Die invarianten Ableitungen erster und zweiter Gattung von Vektor ξ^i sind mit Hilfe der Formeln (4.2) und (4.3) bestimmt. Die Identitäten (4.9), (4.13), (4.15), (4.18), (4.22) und (4.27) sind die verallgemeinerten Identitäten von Ricci.