1966

ОЦЕНКИ ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ

А. БИКЯЛИС

§ 1. Введение

Рассматривается последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ с функциями распределения $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x), \ldots$ Положим $M\xi_k$ – математическое ожидание случайной величины ξ_k; σ_k^2, и β_{mk} – ее дисперсия и абсолютный момент порядка $m>0$ (в частности $\beta_{2k}=\sigma_k^2$), а

$$B_n^2=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2 \quad \text{и} \quad B_{mn}=\sum_{k=1}^{n}\beta_{mk}.$$

$L_{mn}=B_{mn}/B_n^m$ – дробь Ляпунова порядка m. Функции распределения сумм

$$Z_n=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n \quad \text{и} \quad S_n=\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-M\xi_k)$$

обозначим, соответственно, через $G_n(x)$ и $\bar{F}_n(x)$. Пусть

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}\,du.$$

$\psi_1(n), \psi_2(n), \psi_3(n), \ldots$ – монотонно и бесконечно возрастающие функции при $n\to\infty$. Кроме того, $\psi_k(n)>0$, $k=1, 2, 3, \ldots$

$C_1, C_2, C_3, \ldots$ – положительные абсолютные константы.

Задача об оценке остаточного члена в центральной предельной теореме впервые была поставлена и в определенных условиях решена в работах А. М. Ляпунова [1], а позднее исследования были продолжены многими авторами. Первые оценки получены равномерно по аргументу функций распределения. Когда слагаемые имеют конечные третьи моменты, эти оценки оптимальны.

Не менее интересна, но в меньшей степени исследована зависимость остаточного члена от аргумента x. Когда слагаемые одинаково распределены и имеют конечные третьи моменты, в работе [2] К. Эссеена без доказательства приведен следующий результат:

$$|\bar{F}_n(x)-\Phi(x)|\leqslant\frac{\gamma\left(\frac{\beta_3}{\sigma^3}\right)\ln(2+|x|)}{(1+|x|^3)\sqrt{n}}. \tag{1.1}$$

Здесь $\gamma\left(\frac{\beta_3}{\sigma^3}\right)$ – некоторая функция от соотношения $\frac{\beta_3}{\sigma^3}$, где

$$\sigma^2=D\xi_1 \quad \text{и} \quad \beta_3=M|\xi_1-M\xi_1|^3.$$

Также им показано, что в (1.1) не нужен логарифмический множитель для $|x| > \sqrt{(1+\delta)\ln n}$, $0<\delta<1$. Возникает естественный вопрос — возможно ли избавиться от него для всех x. Попытки сделать это методом характеристических функций не увенчались успехом ([3], [4], [5]). В частности, в [3] показано, что $\gamma\left(\frac{\beta_3}{\sigma^3}\right)=\frac{c_1\beta_3}{\sigma^3}$.

Методами, развитыми в теории больших уклонений, С. В. Нагаев [6] недавно показал, что в (1.1) множитель $\ln(2+|x|)$ не нужен для всех x.

При более жестких условиях Ю. В. Линником [7] (позже его исследования были продолжены В. В. Петровым в [8]) доказано, что при любом фиксированном M и $|x|\leqslant M$

$$|\bar{F}_n(x)-\Phi(x)|\leqslant\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}L_{3n}(1+\varepsilon_n),$$

где $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$.

Здесь мы продолжим исследования по этому вопросу. Полученные ниже результаты для разнораспределенных слагаемых включают в себя ряд известных оценок.

Теорема 1. *Если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ имеют конечные моменты порядка $0<m\leqslant 1$, то для всех $x>0$ и $y>0$*

$$1-G_n(x)\leqslant 1-\prod_{k=1}^{n}F_k(y)+\left(\frac{4eB_{mn}}{y^m}\right)^{\frac{x}{y}}\exp\left\{1+eB_{mn}\left|\frac{1}{y}\ln\frac{y^m}{4B_{mn}}\right|^m\right\}. \tag{1.2}$$

Если случайные величины имеют конечные моменты порядка $m>1$, то для всех $x>0$ и $y>0$

$$1-G_n(x)\leqslant 1-\prod_{k=1}^{n}F_k(y)+\left(\frac{C(m)\,eB_{mn}}{y^m}\right)^{\frac{x}{y}}\times$$

$$\times\exp\left\{1+\frac{1}{y}\sum_{k=1}^{n}|M\xi_k|\left|\ln\frac{y^m}{C(m)B_{mn}}\right|+eB_{\nu n}\left|\frac{1}{y}\ln\frac{y^m}{C(m)B_{mn}}\right|^{\nu}\right\}. \tag{1.3}$$

Здесь $\nu=\min\{m, 2\}$ и $C(m)=1+\frac{(m+1)^{m+2}}{e^m}$.

Аналогичное утверждение имеет место для отрицательных x и y. В этом случае в неравенствах разность $1-\prod_{k=1}^{n}F_k(y)$ надо заменить на $\prod_{k=1}^{n}F_k(y)$.

С. В. Нагаевым в [6] доказано неравенство (1.3), когда слагаемые одинаково распределены и $m>2$.

Теорема 2. *Если $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ имеют конечные третьи моменты, то*

$$|\bar{F}_n(x)-\Phi(x)|\leqslant\frac{C_4L_{3n}}{1+|x|^3}. \tag{1.4}$$

Теорема 3. *Если $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ имеют конечные третьи моменты,*

$$L_{3n}\leqslant\frac{1}{\psi_1(n)}$$

и

$$\frac{1}{B_{3n}}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|u|\geqslant\frac{B_n}{\psi_2(n)}}|u|^3\,dF_k(u+M\xi_k)\leqslant\frac{1}{\psi_2(n)}, \tag{1.5}$$

то для всех $|x|>\lambda(n)$ *(где* $\lambda(n)$ *— некоторая монотонная бесконечно возрастающая функция при* $n\to\infty$*) имеет место неравенство*

$$|\bar{F}_n(x)-\Phi(x)|\leqslant\frac{\delta_1(n)L_{3n}}{1+|x|^3}. \tag{1.6}$$

Здесь и ниже $\delta_k(n)\to 0$, $k=1, 2, 3, \ldots$ *при* $n\to\infty$.

Следствие 1. *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *одинаково распределены и не являются решетчатыми. Если* ξ_1 *имеет конечный третий момент, то*

$$\left|\bar{F}_n(x)-\Phi(x)-\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\frac{\alpha_3(1-x^2)}{6\sigma^3\sqrt{n}}\right|\leqslant\frac{\delta_2(n)}{(1+|x|^3)\sqrt{n}}. \tag{1.7}$$

Доказательство следствия 1. В силу теоремы К. Эссеена [10], стр. 225, для всех x

$$R_n(x)=\left|\bar{F}_n(x)-\Phi(x)-\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\frac{\alpha_3(1-x^2)}{6\sigma^3\sqrt{n}}\right|\leqslant\frac{\delta_3(n)}{\sqrt{n}}.$$

Отсюда следует, что при $|x|<[\delta_3(n)]^{-\frac{2}{3}}$

$$R_n(x)\leqslant\frac{[\delta_3(n)]^{\frac{1}{3}}}{(1+|x|^3)\sqrt{n}}.$$

Для $|x|>[\delta_3(n)]^{-\frac{2}{3}}$ имеем

$$R_n(x)\leqslant|\bar{F}_n(x)-\Phi(x)|+\frac{e^{-\frac{x^2}{3}}\delta_4(n)}{(1+|x|^3)\sqrt{n}}$$

и с помощью (1.6) получаем неравенство (1.7).

Следствие 2. *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *независимые одинаково распределенные случайные величины. При этом,* ξ_1 *имеет конечный третий момент и принимает значения* $x_k=a+kh$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ *с максимальным шагом распределения* h. *Тогда*

$$\left|\bar{F}_n(x)-\Phi(x)-\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\alpha_3(1-x^2)}{6\sigma^3\sqrt{n}}+\frac{h}{\sigma\sqrt{n}}S\left(\frac{x\sigma\sqrt{n}-an}{h}\right)\right]\right|\leqslant\frac{\delta_5(n)}{(1+|x|^3)\sqrt{n}}.$$

Здесь $S(u)=u-[u]+\frac{1}{2}$, $[u]$ *— целая часть* u.

Теорема 4. *Если* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *имеют конечные дисперсии, то*

$$|\bar{F}_n(x)-\Phi(x)|\leqslant\frac{C_5}{(1+|x|)^3B_n^3}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_0^{(1+|x|)B_n}\int\limits_{|u|>v}u^2\,dF_k(u+M\xi_k)\,dv. \tag{1.8}$$

Для одинаково распределенных случайных величин это утверждение доказано автором в [9].

Следствие 1. *Если* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *имеют конечные моменты порядка* $2+\delta$, $0<\delta\leqslant 1$, *то*

$$|\bar{F}_n(x)-\Phi(x)|\leqslant\frac{C_6L_{2+\delta,n}}{1+|x|^{2+\delta}}. \tag{1.9}$$

Действительно, поскольку рассматриваемые случайные величины имеют конечные дисперсии, то для них имеет место неравенство (1.8). Далее

$$\int\limits_{|u|>(1+|x|)B_n} u^2\,dF_k(u+M\xi_k) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(1+|x|)^{\delta}B_n^{\delta}} \int\limits_{|u|>(1+|x|)B_n} |u|^{2+\delta}\,dF_k(u+M\xi_k) \leqslant \frac{\beta_{2+\delta,k}}{(1+|x|)^{\delta}B_n^{\delta}}$$

и

$$\int\limits_{|u|\leqslant(1+|x|)B_n} |u|^3\,dF_k(u+M\xi_k) \leqslant [(1+|x|)B_n]^{1-\delta} \times$$

$$\times \int\limits_{|u|\leqslant(1+|x|)B_n} |u|^{2+\delta}\,dF_k(u+M\xi_k) \leqslant [(1+|x|)B_n]^{1-\delta}\beta_{2+\delta,k}$$

при $1\leqslant k\leqslant n$. Теперь два последних неравенства вместе с (1.8) дают утверждение следствия.

Следствие 2. *Если* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *имеют конечные моменты порядка* $2+\delta,\ 0<\delta<1,\ L_{2+\delta,n}\leqslant\frac{1}{\psi_4(n)}$ *и*

$$\frac{1}{B_{2+\delta,n}}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|u|>\frac{B_n}{\psi_5(n)}} |u|^{2+\delta}\,dF_k(u+M\xi_k) \leqslant \frac{1}{\psi_6(n)}, \tag{1.10}$$

то

$$|\bar F_n(x)-\Phi(x)| \leqslant \frac{\delta_6(n)\,L_{2+\delta,n}}{1+|x|^{2+\delta}}. \tag{1.11}$$

Доказательство следствия 2. Достаточно оценить интегралы

$$\int\limits_{|u|>(1+|x|)B_n} u^2\,dF_k(u+M\xi_k) \quad \text{и} \quad \int\limits_{|u|\leqslant(1+|x|)B_n} |u|^3\,dF_k(u+M\xi_k)$$

для $1\leqslant k\leqslant n$. Имеем

$$\int\limits_{|u|>(1+|x|)B_n} u^2\,dF_k(u+M\xi_k) \leqslant \frac{1}{(1+|x|)^{\delta}B_n^{\delta}} \int\limits_{|u|>(1+|x|)B_n} |u|^{2+\delta}\,dF_k(u+M\xi_k) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(1+|x|)^{\delta}B_n^{\delta}} \int\limits_{|u|>\frac{B_n}{\psi_5(n)}} |u|^{2+\delta}\,dF_k(u+M\xi_k)$$

и

$$\int\limits_{|u|\leqslant(1+|x|)B_n} |u|^3\,dF_k(u+M\xi_k) =$$

$$= \int\limits_{|u|\leqslant\frac{B_n}{\psi_5(n)}} |u|^3\,dF_k(u+M\xi_k) + \int\limits_{\frac{B_n}{\psi_5(n)}<|u|\leqslant(1+|x|)B_n} |u|^3\,dF_k(u+M\xi_k) \leqslant$$

$$\leqslant \beta_{2+\delta,k}\left[\frac{B_n}{\psi_5(n)}\right]^{1-\delta} + [(1+|x|)B_n]^{\delta} \int\limits_{|u|>\frac{B_n}{\psi_5(n)}} |u|^{2+\delta}\,dF_k(u+M\xi_k).$$

Отсюда и (1.8) следует (1.11).

Замечание. *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *одинаково распределены,* ξ_1 *имеет дисперсию* σ^2 *и конечный момент* $\beta_{2+\delta} = M|\xi_1 - M\xi_1|^{2+\delta}$, $0 < \delta < 1$, *тогда*

$$|\bar{F}_n(x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{\delta_7(n)}{(1 + |x|^{2+\delta})\, n^{\frac{\delta}{2}}}.$$

§ 2. Доказательство теоремы 1

Пусть $x > 0$, $y > 0$

$$F_k^{(y)}(x) = \begin{cases} F_k(x) & \text{при} \quad x \leqslant y, \\ F_k(y) & \text{при} \quad x > y \end{cases}$$

и $\tilde{F}_n^{(y)}(x)$ — композиция функций $F_1^{(y)}(x), F_2^{(y)}(x), \ldots, F_n^{(y)}(x)$. По определению $\tilde{F}_n^{(y)}(x)$ $G_n(x) \geqslant \tilde{F}_n^{(y)}(x)$ и $\tilde{F}_n^{(y)}(\infty) = \prod\limits_{k=1}^{n} F_k(y)$. Имеем

$$1 - G_n(x) = \tilde{F}_n^{(y)}(\infty) - \tilde{F}_n^{(y)}(x) + 1 - \tilde{F}_n^{(y)}(\infty) - [G_n(x) -$$

$$- \tilde{F}_n^{(y)}(x)] \leqslant 1 - \prod_{k=1}^{n} F_k(y) + \tilde{F}_n^{(y)}(\infty) - \tilde{F}_n^{(y)}(x). \tag{2.1}$$

Для оценки разности $\tilde{F}_n^{(y)}(\infty) - \tilde{F}_n^{(y)}(x)$ положим

$$\tilde{F}_{nh}^{(y)}(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{hu}\, d\tilde{F}_n^{(y)}(u), \qquad h > 0.$$

Отсюда

$$\tilde{F}_n^{(y)}(\infty) - \tilde{F}_n^{(y)}(x) = \int_{x}^{\infty} e^{-hx}\, d\tilde{F}_{nh}^{(y)}(u).$$

Функция $\tilde{F}_{nh}^{(y)}(u) \Big/ \prod\limits_{k=1}^{n} R_k(y, h)$, где

$$R_k(y, h) = \int_{-\infty}^{y} e^{hu}\, dF_k(u),$$

относительно u монотонно возрастает и не превышает 1. Поэтому

$$\tilde{F}_n^{(y)}(\infty) - \tilde{F}_n^{(y)}(x) = \prod_{k=1}^{n} R_k(y, h) \int_{x}^{\infty} e^{-hu}\, d\, \frac{\tilde{F}_{nh}^{(y)}(u)}{\prod\limits_{k=1}^{n} R_k(y, h)} \leqslant e^{-hx} \prod_{k=1}^{n} R_k(y, h). \tag{2.2}$$

Для оценки функции $R_k(y, h)$ сверху достаточно оценить интеграл

$$\int_{\frac{1}{h}}^{y} e^{hu}\, dF_k(u)$$

и

$$\int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} e^{hu}\, dF_k(u). \tag{2.3}$$

Очевидно,

$$\int_{\frac{1}{h}}^{y} e^{hu}\,dF_k(u)=[1-F_k(u)]\,e^{hu}\Big|_{y}^{\frac{1}{h}}+h\int_{\frac{1}{h}}^{y}[1-F_k(u)]\,e^{hu}\,du. \tag{2.4}$$

С помощью неравенства Чебышева и того, что $x^{\alpha}e^{-x}<e^{-\alpha}\alpha^{\alpha}$ при $\alpha>0$, получаем

$$[1-F_k(u)]\,e^{hu}\Big|_{y}^{\frac{1}{h}}\leqslant\left[1-F_k\left(\frac{1}{h}\right)\right]e\leqslant eh^m\beta_{mk}\leqslant\frac{m^m}{e^{m-1}}\cdot\frac{e^{hy}}{y^m}\,\beta_{mk} \tag{2.5}$$

и

$$\int_{\frac{1}{h}}^{y}[1-F_k(u)]\,e^{hu}\,du\leqslant\beta_{mk}\int_{\frac{1}{h}}^{y}\frac{e^{hu}}{u^m}\,du=h^{m-1}\beta_{mk}\int_{1}^{yh}\frac{e^u}{u^m}\,du.$$

Поскольку (см. [6])

$$\int_{1}^{v}\frac{e^u}{u^m}\,du\leqslant\left[1+\frac{m\,(m+1)^{m+1}}{e^m}\right]\frac{e^v}{v},$$

то

$$h\int_{\frac{1}{h}}^{y}[1-F_k(u)]\,e^{hu}du\leqslant\left[1+\frac{m\,(m+1)^{m+1}}{e^m}\right]\frac{e^{hy}}{y^m}\,\beta_{mk}. \tag{2.6}$$

Из (2.4—2.6) следует, что

$$\int_{\frac{1}{h}}^{y} e^{hu}\,dF_k(u)\leqslant\left[1+\frac{(m+1)^{m+2}}{e^m}\right]\frac{e^{hy}}{y^m}\,\beta_{mk}. \tag{2.7}$$

Осталось оценить интеграл (2.3). Имеем

$$\int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} e^{hu}\,dF_k(u)=1-\int_{-\infty}^{\infty}dF_k(u)+\int_{-\infty}^{\frac{1}{h}}e^{hu}\,dF_k(u)=$$

$$=1+\int_{|u|\leqslant\frac{1}{h}}(e^{hu}-1)\,dF_k(u)+\int_{u<-\frac{1}{h}}e^{hu}\,dF_k(u)-\int_{|u|>\frac{1}{h}}dF_k(u)\leqslant$$

$$\leqslant 1+h\int_{|u|\leqslant\frac{1}{h}}|u|\,e^{h|u|}\,dF_k(u)\leqslant 1+eh^m\beta_{mk} \tag{2.8}$$

при $0<m\leqslant 1$.

В силу (2.6) и (2.8)

$$R_k(y,\ h)\leqslant 1+eh^m\beta_{mk}+\frac{4e^{hy}}{y^m}\,\beta_{mk}.$$

Отсюда

$$\prod_{k=1}^{n}R_k(y,\ h)\leqslant\exp\left\{eh^mB_{mn}+\frac{4B_{mn}e^{hy}}{y^m}\right\}.$$

При $y^m>4eB_{mn}$ положим

$$h=\frac{1}{y}\ln\frac{y^m}{4B_{mn}}.$$

Тогда

$$\tilde{F}_n^{(y)}(\infty)-\tilde{F}_n^{(y)}(x)\leqslant\left(\frac{4B_{mn}}{y^m}\right)^{\frac{x}{y}}\exp\left\{1+eB_{mn}\left|\frac{1}{y}\ln\frac{y^m}{4B_{mn}}\right|^m\right\}.$$

Отсюда и (2.1) следует утверждение теоремы для $y^m>4eB_{mn}$ и $0<m\leqslant 1$.

Если $y^m\leqslant 4eB_{mn}$, то оценка (1.2) тривиальна.

В случае $m>1$ имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\frac{1}{h}} e^{hu}\,dF_k(u)\leqslant 1+\int\limits_{|u|\leqslant\frac{1}{h}}(e^{hu}-1)\,dF_k(u)=$$

$$=1+h\int\limits_{|u|\leqslant\frac{1}{h}} u\,dF_k(u)+\frac{h^2}{2}\int\limits_{|u|\leqslant\frac{1}{h}} u^2e^{hu\Theta_k}\,dF_k(u),$$

где $0<\Theta_k<1$. Следовательно,

$$\int\limits_{-\infty}^{\frac{1}{h}} e^{hu}\,dF_k(u)\leqslant 1+h\,|M\xi_k|+eh^\nu\beta_{\nu k},\qquad \nu=\min\{m,\ 2\}. \tag{2.9}$$

Неравенства (2.7), (2.9) показывают, что

$$R_k(y,\ h)\leqslant 1+h\,|M\xi_k|+eh^\nu\beta_{\nu k}+C(m)\,\frac{e^{hy}}{y^m}\,\beta_{mk}.$$

Здесь $C(m)=\left[1+\frac{(m+1)^{m+2}}{e^m}\right]$ и $\nu=\min\{m,\ 2\}$.

Поэтому

$$\prod_{k=1}^{n}R_k(y,\ h)\leqslant\exp\left\{h\sum_{k=1}^{n}|M\xi_k|+eh^\nu\beta_{\nu k}+C(m)\,B_{mn}\,\frac{e^{hy}}{y^m}\right\}. \tag{2.10}$$

Если $y^m>C(m)\,eB_{mn}$ и

$$h=\frac{1}{y}\ln\frac{y^m}{C(m)\,B_{mn}}, \tag{2.12}$$

то из (2.10) и (2.12) следует

$$\tilde{F}_n^{(y)}(\infty)-\tilde{F}_n^{(y)}(x)\leqslant\left(\frac{C(m)\,eB_{mn}}{y^m}\right)^{\frac{x}{y}}\times$$

$$\times\exp\left\{1+\frac{1}{y}\left|\ln\frac{y^m}{C(m)\,B_{mn}}\right|\sum_{k=1}^{n}|M\xi_k|+eB_{\nu n}\left|\frac{1}{y}\ln\frac{y^m}{C(m)\,B_{mn}}\right|^\nu\right\}. \tag{2.13}$$

Для $y^m>C(m)\,eB_{mn}$ утверждение теоремы вытекает из (2.1) и (2.13). Если $y^m\leqslant C(m)\,eB_{mn}$, то оценка (1.3) тривиальна. Теорема 1 доказана полностью.

§ 3. Доказательство теоремы 2 и 3

Сперва докажем следующую важную лемму.

Лемма 1. *Если $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n$ имеют конечные третьи моменты и $L_{3n}<\frac{1}{500}$, то существует постоянная l_1 такая, что для всех x из интервала*

$$\left(8B_n;\ \sqrt{2{,}5B_n^2\ln\frac{L_{3n}^{-1}}{500}}\right)$$

имеет место неравенство

$$\left| G_n(x)-\Phi\left(\frac{x}{B_n}\right)\right| \leqslant 1-\prod_{k=1}^{n} F_k\left(\frac{x}{4}\right)+\frac{l_1 B_{3n}}{x^3}\, e^{-\frac{x^2}{8B_n^2}}. \tag{3.1}$$

Если x из интервала $\left(-\sqrt{2{,}5B_n^2 \ln \frac{L_{3n}^{-1}}{500}},\ -8B_n\right)$, *то*

$$\left| G_n(x)-\Phi\left(\frac{x}{B_n}\right)\right| \leqslant \prod_{k=1}^{n} F_k\left(\frac{x}{4}\right)+\frac{l_1 B_{3n}}{x^3}\, e^{-\frac{x^2}{8B_n^2}}.$$

В дальнейшем через l_1, l_2, l_3, ... — обозначим положительные постоянные.

Докажем только первое неравенство, поскольку второе доказывается аналогично.

Доказательство леммы 1. Достаточно доказать теоремы и лемму для случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями, поэтому в дальнейшем $M\xi_k=0$, $k=1, 2, \ldots, n$.

Положим

$$F_{kh}^{(y)}(x)=\int_{-\infty}^{x} e^{hu}\, dF_k^{(y)}(u)=\Phi_{kh}(x)+\psi_{kh}^{(y)}(x),$$

где

$$\Phi_{kh}(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{hu}\, dF_k^{(y)}(u) & \text{при}\quad x\leqslant\frac{1}{h},\\[2ex] \displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} e^{hu}\, dF_k^{(y)}(u) & \text{при}\quad x>\frac{1}{h}\end{cases}$$

и

$$\psi_{kh}^{(y)}(x)=\begin{cases}0 & \text{при}\quad x\leqslant\frac{1}{h},\\[2ex] \displaystyle\int_{\frac{1}{h}}^{x} e^{hu}\, dF_k^{(y)}(u) & \text{при}\quad x>\frac{1}{h}.\end{cases}$$

$\tilde{\Phi}_{nh}(x)$ — свертка функций $\Phi_{1h}(x)$, $\Phi_{2h}(x)$, ..., $\Phi_{nh}(x)$. Кроме того, будем пользоваться обозначениями, введенными при доказательстве теоремы 1.

Случайные величины ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n имеют конечные третьи моменты β_{3k}, $1\leqslant k\leqslant n$, и нулевые математические ожидания, следовательно, при $h>0$

$$\int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} u\,dF_k(u)=-\int_{\frac{1}{h}}^{\infty} u\,dF_k(u), \tag{3.2}$$

$$\int_{\frac{1}{h}}^{\infty} dF_k(u)\leqslant\begin{cases}h^2\sigma_k^2,\\ h^3\beta_{3k},\end{cases}\qquad \int_{\frac{1}{h}}^{\infty} u\,dF_k(u)\leqslant\begin{cases}h\sigma_k^2,\\ h^2\beta_{3k},\end{cases} \tag{3.3}$$

и

$$\int_{\frac{1}{h}}^{\infty} u^2\,dF_k(u)\leqslant h\beta_{3k}. \tag{3.4}$$

Очевидно

$$H_k(h)=\int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} e^{hu}dF_k(u)=\int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} dF_k(u)+h\int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} u\,dF_k(u)+\frac{h^2}{2}\int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} u^2dF_k(u)+$$

$$+\frac{h^3}{6}\int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} u^3e^{hu\Theta_k}dF_k(u)=1+\frac{h^2}{2}\sigma_k^2+r_k(h), \qquad (3.5)$$

где

$$r_k(h)=-\int_{\frac{1}{h}}^{\infty} dF_k(u)-h\int_{\frac{1}{h}}^{\infty} u\,dF_k(u)-\frac{h^2}{2}\int_{\frac{1}{h}}^{\infty} u^2dF_k(u)+$$

$$+\frac{h^3}{6}\int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} u^3e^{hu\Theta_k}dF_k(u), \qquad 0<\Theta_k<1.$$

Из (3.2 – 3.4) следует

$$|r_k(h)|\leqslant 3h^3\beta_{3k} \qquad (3.6)$$

и

$$\left|H_k(h)-1-\frac{h^2}{2}\sigma_k^2\right|\leqslant 3h^3\beta_{3k}. \qquad (3.7)$$

Отсюда для $1\leqslant k\leqslant n$ и $0<h<(4B_{3n})^{-\frac{1}{3}}$ $H_k(h)>\frac{1}{4}$.

Положим

$$B_n^2(h)=\sum_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} u^2e^{hu}d\,\frac{F_k(u)}{H_k(h)}-\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} ue^{hu}d\,\frac{F_k(u)}{H_k(h)}\right)^2. \qquad (3.8)$$

Следующее равенство является основным при доказательстве леммы. При $0<h<(4B_{3n})^{-\frac{1}{3}}$

$$\left|G_n(x)-\Phi\left(\frac{x}{B_n}\right)\right|=\left|-1+G_n(x)+\int_x^{\infty} e^{-hu}d\tilde F_{nh}^{(y)}(u)+\right.$$

$$+\int_x^{\infty} e^{-hu}d[\tilde\Phi_{nh}(u)-\tilde F_{nh}^{(y)}(u)]-\frac{\prod_{k=1}^{n}H_k(h)e^{-hx}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-huB_n(h)-\frac{u^2}{2}}du+\left[1-\Phi\left(\frac{x}{B_n}\right)\right]+$$

$$\left.+\prod_{k=1}^{n}H_k(h)e^{-hx}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}-huB_n(h)}du-\int_0^{\infty} e^{-huB_n(h)}d\,\frac{\tilde\Phi_{nh}\left(x+uB_n(h)\right)}{\prod_{k=1}^{n}H_k(h)}\right]\right|\leqslant$$

$$\leqslant I_1+I_2+I_3+I_4. \qquad (3.9)$$

Здесь

$$I_1=\left|1-G_n(x)-\int_x^{\infty} e^{-hu}d\tilde F_{nh}^{(y)}(u)\right|, \qquad (3.10)$$

$$I_2=\left|\int_x^\infty e^{-hu}\,d\left[\tilde{F}_{nh}^{(y)}(u)-\tilde{\Phi}_{nh}(u)\right]\right|,\tag{3.11}$$

$$I_3=\left|\frac{\prod_{k=1}^{n}H_k(h)e^{-hx}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2}-huB_n(h)}\,du-\left[1-\Phi\left(\frac{x}{B_n}\right)\right]\right|\tag{3.12}$$

и

$$I_4=\prod_{k=1}^{n}H_k(h)e^{-hx}\left|\int_0^\infty e^{-huB_n(h)}\,d\,\frac{\tilde{\Phi}_{nh}\left(x+uB_n(h)\right)}{\prod_{k=1}^{n}H_k(h)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2}-huB_n(h)}\,du\right|.\tag{3.13}$$

Оценка I_1. Как замечено при доказательстве теоремы 1,

$$\tilde{F}_n^{(y)}(\infty)-\tilde{F}_n^{(y)}(x)=\int_x^\infty e^{-hu}\,d\tilde{F}_{nh}^{(y)}(u)\tag{3.14}$$

и для $x>0$ и $y>0$

$$1-G_n(x)-\left[\tilde{F}_n^{(y)}(\infty)-\tilde{F}_n^{(y)}(x)\right]\leqslant 1-\prod_{k=1}^{n}F_k(y).\tag{3.15}$$

Отсюда

$$I_1\leqslant 1-\prod_{k=1}^{n}F_k(y).\tag{3.16}$$

Оценка I_2. Для оценки этого интеграла необходимо оценить разность $\omega(u)=\tilde{F}_{nh}^{(y)}(u)-\tilde{\Phi}_{nh}(u)$. Функция $\omega(u)$ положительная и неубывающая при $u>0$. Кроме того, методом математической индукции нетрудно проверить, что

$$\omega(u)\leqslant\sum_{j=1}^{n}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}R_k(y,\ h)\,H_j(y,\ h),\tag{3.17}$$

где

$$R_k(y,\ h)=\int_{-\infty}^{y}e^{hu}\,dF_k(u)=\int_{-\infty}^{\frac{1}{h}}e^{hu}\,dF_k(u)+\int_{\frac{1}{h}}^{y}e^{hu}\,dF_k(u)=H_k(h)+H_k(y,\ h).$$

При доказательстве теоремы 1 показали (см. (2.6) и (2.9)), что

$$H_k(y,\ h)\leqslant 43\beta_{3k}\,\frac{e^{hy}}{y^3},\qquad 1\leqslant k\leqslant n,\tag{3.18}$$

и

$$\prod_{k=1}^{n}R_k(y,\ h)\leqslant\exp\left\{3h^3B_{3n}+\frac{h^2}{2}B_n^2+43B_{3n}\,\frac{e^{hy}}{y^3}\right\}.\tag{3.19}$$

Теперь из (3.11) и (3.17—3.19) следует

$$I_2 \leqslant \frac{43B_{3n}}{y^3} \exp\left\{3h^3B_{3n}+hy-hx+\frac{h^2}{2}B_n^2+43B_{3n}\frac{e^{hy}}{y^3}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{43B_{3n}}{y^3} \exp\left\{3h^3B_{3n}+hy-\frac{x^2}{2B_n^2}+|hx-h^2B_n^2|+\frac{1}{2}\left|h^2B_n^2-\frac{x^2}{B_n^2}\right|+43B_{3n}\frac{e^{hy}}{y^3}\right\}. \quad (3.20)$$

Оценка I_3. После замены переменных в (3.12) получаем

$$I_3=\left|\prod_{k=1}^{n} H_k(h)\, e^{-hx+h^2B_n^2(h)} \int\limits_{hB_n(h)}^{\infty} d\Phi(u)-\int\limits_{\frac{x}{B_n}}^{\infty} d\Phi(u)\right|.$$

При $0<h<(4B_{3n})^{-\frac{1}{3}}$ $H_k(h)>\frac{1}{4}$ для $1\leqslant k\leqslant n$. Пользуясь (3.7), нетрудно убедиться, что

$$\sum_{k=1}^{n} \ln H_k(h) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{h^2}{2}\sigma_k^2+3h^3\beta_{3k}\right) \leqslant \frac{h^2}{2}B_n^2+3h^3B_{3n}.$$

Далее

$$I_3 \leqslant e^{-\frac{x^2}{2B_n^2}} \left| e^{h^2B_n^2(h)} \int\limits_{hB_n(h)}^{\infty} d\Phi(u)-e^{-\frac{x^2}{2B_n^2}} \int\limits_{\frac{x}{B_n}}^{\infty} d\Phi(u)\right|+$$

$$+e^{-\frac{x^2}{2B_n^2}} \left| \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} H_k(h)\, e^{-hx+\frac{x^2}{2B_n^2}}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}-huB_n(h)}\, du-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}-huB_n(h)}\, du\right| \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{x^2}{2B_n^2}+\frac{h^2}{2}B_n^2(h)} \left|1-\exp\left\{-hx+\frac{x^2}{2B_n^2}+\sum_{k=1}^{n}\ln H_k(h)\right\}\right| \int\limits_{hB_n(h)}^{\infty} d\Phi(u)+$$

$$+e^{-\frac{x^2}{2B_n^2}} \left| \int\limits_{hB_n(h)}^{\frac{x}{B_n}} de^{-\frac{u^2}{2}}\left(1-\Phi(u)\right)\right| \leqslant \left|hB_n(h)-\frac{x}{B_n}\right| e^{-\frac{x^2}{2B_n^2}}+$$

$$+\frac{e^{-\frac{x^2}{2B_n^2}}}{hB_n(h)} \left|1-\exp\left\{-hx+\frac{x^2}{2B_n^2}+\sum_{k=1}^{n}\ln H_k(h)\right\}\right|. \quad (3.21)$$

Здесь

$$\left|1-\exp\left\{-hx+\frac{x^2}{2B_n^2}+\sum_{k=1}^{n}\ln H_k(h)\right\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{x^2}{2B_n^2}-hx+\sum_{k=1}^{n}\ln H_k(h)\right| \exp\left\{\left|\frac{x^2}{2B_n^2}-hx+\sum_{k=1}^{n}\ln H_k(h)\right|\right\}. \quad (3.22)$$

Поскольку для $1\leqslant k\leqslant n$

$$H_k(h)=1+\frac{h^2}{2}\sigma_k^2+r_k(h),$$

где $|r_k(h)|\leqslant 3h^3\beta_{3k}$, то

$$\ln H_k(h)=\frac{h^2}{2}\sigma_k^2+r_k(h)-\frac{\left(\frac{h^2}{2}\sigma_k^2+r_k(h)\right)^2}{2\left(1+\frac{h^2}{2}\Theta_k'\sigma_k^2+\Theta_k'r_k(h)\right)^2}, \qquad 0<\Theta_k'<1$$

(см. (3.5)). Следовательно,

$$\left| \frac{x^2}{2B_n^2} - hx + \sum_{k=1}^{n} \ln H_k(h) \right| =$$

$$= \left| \frac{x^2}{2B_n^2} - hx + \frac{h^2}{2} B_n^2 + \sum_{k=1}^{n} r_k(h) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\left[\frac{h^2}{2} \sigma_k^2 + r_k(h)\right]^2}{2\left[1 + \frac{h^2}{2} \Theta_k' \sigma_k^2 + \Theta_k' r_k(h)\right]^2} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \left| \frac{x^2}{B_n^2} - hx \right| + \frac{1}{2} \left| h^2 B_n^2 - hx \right| + 3h^3 B_{3n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\left[\frac{h^2}{2} \sigma_k^2 + r_k(h)\right]^2}{2\left[1 + \frac{h^2}{2} \Theta_k' \sigma_k^2 + \Theta_k' r_k(h)\right]^2}. \quad (3.23)$$

При $0 < h < (4B_{3n})^{-\frac{1}{3}}$

$$|r_k(h)| \leqslant \frac{3}{4}$$

и

$$1 + \frac{h^2}{2} \Theta_k' \sigma_k^2 + \Theta_k' r_k(h) \geqslant 1 - 3h^3 \beta_{3k} \geqslant \frac{1}{4}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

В силу этого

$$\left[\frac{h^2}{2} \sigma_k^2 - r_k(h)\right]^2 \leqslant \frac{h^3}{2\sqrt[3]{4}} \beta_{3k} + \frac{9}{2} h^3 \beta_{3k}$$

и

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\left[\frac{h^2}{2} \sigma_k^2 + r_k(h)\right]^2}{2\left[1 + \frac{h^2}{2} \Theta_k' \sigma_k^2 + \Theta_k' r_k(h)\right]^2} \leqslant \frac{4h^3}{\sqrt[3]{4}} B_{3n} + 36h^3 B_{3n}.$$

Отсюда и (3.23) получаем

$$\left| \frac{x^2}{2B_n^2} - hx + \sum_{k=1}^{n} \ln H_k(h) \right| \leqslant \frac{1}{2} \left| \frac{x^2}{B_n^2} - hx \right| + \frac{1}{2} \left| h^2 B_n^2 - hx \right| + 42h^3 B_{3n}.$$

С помощью этой оценки из (3.21) и (3.22) нетрудно придти к выводу, что

$$I_3 \leqslant \left| hB_n(h) - \frac{x}{B_n} \right| e^{-\frac{x_2}{2B_n^2}} + \frac{1}{hB_n(h)} \left[42h^3 B_{3n} + \frac{1}{2} \left| \frac{x^2}{2B_n^2} - hx \right| + \frac{1}{2} \left| h^2 B_n^2 - hx \right| \right] \times$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{x^2}{2B_n^2} + 42h^3 B_{3n} + \frac{1}{2} \left| \frac{x^2}{B_n^2} - hx \right| + \frac{1}{2} \left| h^2 B_n^2 - hx \right| \right\}.$$

Оценка I_4. По определению $\Phi_{kh}(v)$ и $H_k(h)$ соотношение $\frac{\Phi_{kh}(v)}{H_k(h)}$ является функцией распределения некоторой случайной величины η_k, имеющей математическое ожидание

$$M\eta_k = \int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} u e^{hu} d \frac{F_k(u)}{H_k(h)}$$

и дисперсию

$$D\eta_k = \int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} u^2 e^{hu} d \frac{F_k(u)}{H_k(h)} - \left(\int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} u e^{hu} d \frac{F_k(u)}{H_k(h)} \right)^2.$$

Положим $m_n(h)=\sum_{k=1}^{n} M\eta_k$ и $B_{3n}(h)=\sum_{k=1}^{n} M|\eta_k-M\eta_k|^3$. $G_{nh}(u)$ — функция распределения суммы

$$\frac{\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_n-m_n(h)}{B_n(h)},$$

т. е.

$$G_{nh}(u)=\frac{\tilde{\Phi}_{nh}\left(m_n(h)+uB_n(h)\right)}{\prod_{k=1}^{n} H_k(h)}.$$

Используя эти обозначения, I_4 можем записать в виде:

$$I_4=\prod_{k=1}^{n} H_k(h)e^{-hx}\left|\int_0^{\infty} e^{-huB_n(h)}dG_{nh}\left(u+\frac{x-m_n(h)}{B_n(h)}\right)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}-huB_n(h)}du\right|.$$

Очевидно,

$$I_4\leqslant\prod_{k=1}^{n} H_k(h)e^{-hx}\left|\int_0^{\infty} e^{-huB_n(h)}d\left[G_{nh}\left(u+\frac{x-m_n(h)}{B_n(h)}\right)-\Phi\left(u+\frac{x-m_n(h)}{B_n(h)}\right)\right]\right|+$$

$$+\prod_{k=1}^{n} H_k(h)e^{-hx}\left|\int_0^{\infty} e^{-huB_n(h)}d\left[\Phi\left(u+\frac{x-m_n(h)}{B_n(h)}\right)-\Phi(u)\right]\right|. \tag{3.25}$$

По известной теореме К. Эссеена [2]

$$\left|G_{nh}\left(u+\frac{x-m_n(h)}{B_n(h)}\right)-\Phi\left(u+\frac{x-m_n(h)}{B_n(h)}\right)\right|\leqslant\frac{C_6B_{3n}(h)}{B_n^3(h)}. \tag{3.26}$$

Нетрудно показать, что

$$B_{3n}(h)\leqslant 8eB_{3n} \tag{3.27}$$

и

$$\sum_{k=1}^{n}\ln H_k(h)\leqslant\frac{h^2}{2}B_n^2+3h^3B_{3n}. \tag{3.28}$$

После небольших расчетов из (3.25—3.28) получаем

$$I_4\leqslant\frac{16C_6eB_{3n}}{B_n^3(h)}\exp\left\{-hx+\frac{h^2}{2}B_n^2+3h^3B_{3n}\right\}+$$

$$+\prod_{k=1}^{n} H_k(h)e^{-hx}\left|\int_0^{\infty} e^{-huB_n(h)}d\left[\Phi\left(u+\frac{x-m_n(h)}{B_n(h)}\right)-\Phi(u)\right]\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{16eC_6B_{3n}}{B_n^3(h)}\exp\left\{3h^3B_{3n}-\frac{x^2}{2B_n^2}+|hx-h^2B_n^2|+\frac{1}{2}\left|\frac{x^2}{B_n^2}-h^2B_n^2\right|\right\}+$$

$$+\frac{|x-m_n(h)|}{B_n(h)}\exp\left\{3h^3B_{3n}-\frac{x^2}{2B_n^2}+|hx-h^2B_n^2|+\frac{1}{2}\left|\frac{x^2}{B_n^2}-h^2B_n^2\right|\right\}. \tag{3.29}$$

При оценках I_1, I_2, I_3 и I_4 считали, что $0<h<(4B_{3n})^{-\frac{1}{3}}$. Но в дальнейшем необходимо интервал изменения h сузить до $\left(0, \frac{5}{x}\ln\frac{L_{3n}^{-1}}{500}\right)$. Для h из этого интервала имеет место неравенство

$$43B_{3n}\frac{e^{\frac{hx}{4}}}{\left(\frac{x}{4}\right)^3}\leqslant l_2.$$

При этом, $42h^3B_{3n}\leqslant 10$. Заметим, что $x>B_n$. Пусть, далее, $y=\frac{x}{4}$. Такой выбор законен, поскольку на y не наложены никакие ограничения, кроме $y>0$. Все эти замечания и неравенства используем в оценках (3.16), (3.20), (3.24) и (3.29). Затем, из (3.9) следует, что

$$\begin{aligned}
|G_n(x)-\Phi\left(\frac{x}{B_n}\right)| &\leqslant 1-\prod_{k=1}^{n}F_k\left(\frac{x}{4}\right)+\\
&+\frac{l_3B_{3n}}{x^3}\exp\left\{-\frac{x^2}{2B_n^2}+\frac{hx}{4}+|hx-h^2B_n^2|+\frac{1}{2}\left|h^2B_n^2-\frac{x^2}{B_n^2}\right|\right\}+\\
&+\left|hB_n(h)-\frac{x}{B_n}\right|e^{-\frac{x^2}{2B_n^2}}+\frac{1}{hB_n(h)}\left[42h^3B_{3n}+\frac{1}{2}\left|\frac{x^2}{B_n^2}-hx\right|+\frac{1}{2}|h^2B_n^2-hx|\right]\times\\
&\times\exp\left\{-\frac{x^2}{2B_n^2}+\frac{1}{2}\left|\frac{x^2}{B_n^2}-hx\right|+\frac{1}{2}|h^2B_n^2-hx|\right\}+\\
&+\frac{l_4B_{3n}}{B_n^3(h)}\exp\left\{-\frac{x^2}{2B_n^2}+|hx-h^2B_n^2|+\frac{1}{2}\left|\frac{x^2}{B_n^2}-h^2B_n^2\right|\right\}+\\
&+\frac{l_5|x-m_n(h)|}{B_n(h)}\exp\left\{-\frac{x^2}{2B_n^2}+|hx-h^2B_n^2|+\frac{1}{2}\left|\frac{x^2}{B_n^2}-h^2B_n^2\right|\right\}. \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

Оценим разность $|B_n^2-B_n^2(h)|$ и $|m_n(h)-hB_n^2|$. Это нетрудно сделать с помощью следующих неравенств:

$$|H_k(h)-1|\leqslant 2h^2\sigma_k^2,$$

$$\left|\int_{-\infty}^{\frac{1}{h}}ue^{hu}dF_k(u)-h\sigma_k^2\right|\leqslant 4\beta_{3k}h^2, \qquad (3.31)$$

$$\left|\int_{-\infty}^{\frac{1}{h}}ue^{hu}dF_k(u)\right|\leqslant 3h\sigma_k^2$$

и

$$\left|\int_{-\infty}^{\frac{1}{h}}u^2e^{hu}dF_k(u)-\sigma_k^2\right|\leqslant 4h\beta_{3k},$$

которые доказываются аналогично (3.7).

Показали, что $H_k(h) > \frac{1}{4}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, при $0 < h < \frac{5}{x} \ln \cdot \frac{L_{3n}^{-1}}{500}$. Следовательно,

$$|B_n^2 - B_n^2(h)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{H_k(h)} \left| \int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} u^2 e^{hu}\, dF_k(u) - \sigma_k^2 \right| + \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k^2}{H_k(h)} |H_k(h) - 1| +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{H_k^2(h)} \left(\int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} u e^{hu}\, dF_k(u) \right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} (16h\beta_{3k} + 8h^2\sigma_k^4 + 144h^2\sigma_k^4) \leqslant 168hB_{3n} \qquad (3.32)$$

и отсюда

$$B_n^2(h) \geqslant \frac{1}{2} B_n^2.$$

По определению

$$|m_n(h) - hB_n^2| = \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} u e^{hu}\, d\, \frac{F_k(u)}{H_k(h)} - hB_n^2 \right|.$$

Очевидно,

$$|m_n(h) - hB_n^2| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{H_k(h)} \left| \int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} u e^{hu}\, dF_k(u) - h\sigma_k^2 H_k(h) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{H_k(h)} \left| \int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} u e^{hu}\, dF_k(u) - h\sigma_k^2 \right| + \sum_{k=1}^{n} \frac{h\sigma_k^2}{H_k(h)} |H_k(h) - 1| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} (16h^2\beta_{3k} + 8h^3\sigma_k^4) \leqslant 24h^2 B_{3n} \qquad (3.34)$$

и

$$m_n(h) > \frac{2h}{2} B_n^2, \qquad (3.35)$$

конечно, в том случае, если $0 < h < \frac{5}{x} \ln \frac{L_{3n}^{-1}}{500}$ и $x > B_n$.

Основное неравенство (3.30) после применения соотношений (3.33—3.34) и группировки соответствующих членов в правой части имеет вид

$$\left| G_n(x) - \Phi\left(\frac{x}{B_n}\right) \right| \leqslant 1 - \prod_{k=1}^{n} F_k\left(\frac{x}{4}\right) + \left| hB_n(h) - \frac{x}{B_n} \right| e^{-\frac{x^2}{2B_n^2}} +$$

$$+ \left[\frac{l_3 B_{3n}}{x^3} e^{\frac{hx}{4}} + \frac{l_4 B_{3n}}{B_n^3} + \frac{l_5 |x - m_n(h)|}{B_n} \right] \exp\left\{ -\frac{x^2}{2B_n^2} + |hx - h^2 B_n^2| + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left| \frac{x^2}{B_{2n}} - h^2 B_n^2 \right| \right\} + \frac{1}{hB_n(h)} \left[42h^3 B_{3n} + \frac{1}{2} \left| \frac{x^2}{B_n^2} - hx \right| + \frac{1}{2} |h^2 B_n^2 - hx| \right] \times$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{x^2}{2B_n^2} + \frac{1}{2} \left| \frac{x^2}{B_n^2} - hx \right| + \frac{1}{2} |h^2 B_n^2 - hx| \right\}. \qquad (3.36)$$

Через A_n обозначим множество значений функций $m_n(h)$, $h>0$. Вследствие (3.34) и (3.35) уравнение

$$v=m_n(h), \quad v\in A_n$$

при любом $v<\frac{5B_n^2}{x}\ln\frac{L_{3n}^{-1}}{500}$ имеет решение $h(v)$, удовлетворяющее неравенство

$$|h(v)B_n^2-v|\leqslant 96v^2\frac{B_{3n}}{B_n^4}. \tag{3.37}$$

Возможны два случая:

1) $8B_n<x<\sqrt{2{,}5B_n^2\ln\frac{L_{3n}^{-1}}{500}}$ и $x\in A_n$

или

2) $8B_n<x<\sqrt{2{,}5B_n^2\ln\frac{L_{3n}^{-1}}{500}}$ и $x\notin A_n$.

Рассмотрим первый случай. В этом случае в (3.37) вместо v можно поставить x. Такой выбор не противоречит всем вышеприведенным рассуждениям. Имеем

$$|h(x)B_n^2-x|\leqslant 96x^2\frac{B_{3n}}{B_n^4}. \tag{3.38}$$

Подставляя $h(x)$ вместо h в (3.35), получаем

$$h(x)B_n^2<\frac{3}{2}x. \tag{3.39}$$

Далее, из (3.32) вытекает

$$\left|B_n^2-B_n^2\left(h(x)\right)\right|\leqslant 168h(x)B_{3n}\leqslant 252x\frac{B_{3n}}{B_n^2}. \tag{3.40}$$

Отсюда, (3.32—3.33) и (3.38)

$$\left|h(x)B_n\left(h(x)\right)-\frac{x}{B_n}\right|\leqslant h(x)\left|B_n-B_n\left(h(x)\right)\right|+\frac{1}{B_n}|h(x)B_n^2-x|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{168h^2(x)B_{3n}}{B_n+B_n\left(h(x)\right)}+96x^2\frac{B_{3n}}{B_n^5}\leqslant 348x^2\frac{B_{3n}}{B_n^5} \tag{3.41}$$

и

$$h(x)B_n\left(h(x)\right)>\frac{l_7x}{B_n}. \tag{3.42}$$

В силу (3.38) и (3.39) для $8B_n<x<\sqrt{2{,}5B_n^2\ln\frac{L_{3n}^{-1}}{500}}$

$$|xh(x)-h^2(x)B_n^2|\leqslant h(x)|x-h(x)B_n^2|\leqslant 144x^3\frac{B_{3n}}{B_n^6}\leqslant l_8, \tag{3.43}$$

$$\left|h^2(x)B_n^2-\frac{x^2}{B_n^2}\right|\leqslant\frac{|h(x)B_n^2-x|}{B_n}\cdot\frac{|x+h(x)B_n^2|}{B_n}\leqslant 96x^2\frac{B_{3n}}{B_n^5}\frac{5x}{2B_n}\leqslant l_9 \tag{3.44}$$

и

$$\left|xh(x)-\frac{x^3}{B_n^2}\right|\leqslant\frac{x}{B_n^2}|h^2(x)B_n^2-x|\leqslant 96x^3\frac{B_{3n}}{B_n^6}\leqslant l_{10}. \tag{3.45}$$

В неравенстве (3.36) вместо h подставляем $h(x)$. С помощью неравенств (3.39) и (3.41 – 3.45) нетрудно показать, что для $8B_n < x < \sqrt{2{,}5B_n^2 \ln \frac{L_{3n}^{-1}}{500}}$ и $x \in A_n$

$$\left| G_n(x) - \Phi\left(\frac{x}{B_n}\right) \right| \leqslant 1 - \prod_{k=1}^{n} F_k\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{l_{11} x^2 B_{3n}}{B_n^5} e^{-\frac{x^2}{2B_n^2}} + \frac{l_{12} B_{3n}}{x^3} e^{-\frac{x^2}{8B_n^2}} +$$

$$+ \frac{l_{13} B_{3n}}{B_n^3} e^{-\frac{x^2}{2B_n^2}} + \frac{l_{14} x^2 B_{3n}}{B_n^5} e^{-\frac{x^2}{2B_n^2}} \leqslant 1 - \prod_{k=1}^{n} F_k\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{l_{15} B_{3n}}{x^3} e^{-\frac{x^2}{2B_n^2}}.$$

В этом случае лемма доказана.

Осталось доказать лемму для $8B_n < x < \sqrt{2{,}5B_n^2 \ln \frac{L_{3n}^{-1}}{500}}$ и $x \notin A_n$.

Для любых функций $f(h)$ положим $\Delta f = f(h_+) - f(h_-)$. Функции $H_k(h)$ и

$$Q_k(h) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{h}} u e^{hu} \, dF_k(u)$$

непрерывны слева, а также $\Delta H_k(h) = -e \Delta F_k\left(\frac{1}{h}\right)$ и $\Delta Q_k(h) = -\frac{e}{h} \Delta F_k\left(\frac{1}{h}\right)$. Очевидно,

$$\Delta m_n(h) = \sum_{k=1}^{n} \frac{e \Delta F_k\left(\frac{1}{h}\right) \left[Q_k(h_-) - \frac{1}{h} H_k(h_-)\right]}{H_k(h_+) H_k(h_-)}. \tag{3.46}$$

Из (3.7) и (3.27) непосредственно следует, что при $0 < h < \frac{5}{x} \ln \frac{L_{3n}^{-1}}{500}$

$$h Q_k(h) - H_k(h) \leqslant 4.$$

Поэтому

$$-\frac{64e}{h} \sum_{k=1}^{n} \Delta F_k\left(\frac{1}{h}\right) \leqslant \Delta m_n(h) \leqslant 0. \tag{3.47}$$

При выводе этого неравенства надо использовать тот факт, что $H_k(h) > \frac{1}{4}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, при $0 < h < \frac{5}{x} \ln \frac{L_{3n}^{-1}}{500}$.

Положим $h(\bar{x})$, выбранное из интервала $\left(0, \frac{5}{x} \ln \frac{L_{3n}^{-1}}{500}\right)$ таково, что

$$\bar{x} = m_n\left(h_-(\bar{x})\right) \leqslant x \leqslant m_n\left(h_+(\bar{x})\right), \quad \text{а} \quad \bar{x} \in A_n. \tag{3.48}$$

В силу (3.39)

$$\frac{2}{3} h_-(\bar{x}) B_n^2 \leqslant m_n\left(h_-(\bar{x})\right) \leqslant x. \tag{3.49}$$

Из (3.46 – 3.49) вытекает

$$\left| \Delta m_n\left(h_-(\bar{x})\right) \right| \leqslant \frac{64e}{h(\bar{x})} \sum_{k=1}^{n} \Delta F_k\left(\frac{1}{h_-(\bar{x})}\right) \leqslant 64 e h_-^2(\bar{x}) B_{3n} \leqslant 900 x^2 \frac{B_{3n}}{B_n^4}.$$

Ввиду этого, для $x<\sqrt{2{,}5B_n^2\ln\frac{L_{3n}^{-1}}{500}}$

$$0<x-\bar{x}<900x^2\frac{B_{3n}}{B_n^4}<\frac{4}{5}x,$$

т. е. $\frac{5}{9}x<\bar{x}<x$.

В (3.36) вместо h подставляем $h_-(\bar{x})$ $\left(\text{для которого } m_n\left(h_-(\bar{x})\right)=\bar{x}\in A_n\right)$ и после несложных вычислений получаем

$$\left|G_n(x)-\Phi\left(\frac{x}{B_n}\right)\right|\leqslant 1-\prod_{k=1}^{n}F_k\left(\frac{x}{4}\right)+\left[\left|h_-(\bar{x})B_n\left(h_-(\bar{x})\right)-\frac{\bar{x}}{B_n}\right|+\right.$$

$$+\left.\left|\frac{\bar{x}}{B_n}-\frac{x}{B_n}\right|\right]e^{-\frac{x^2}{2B_n^2}}+\left[\frac{l_3B_{3n}}{x}e^{-\frac{xh_-(\bar{x})}{4}}+\frac{l_4B_{3n}}{B_n^3}+\frac{l_5|x-\bar{x}|}{B_n}\right]\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{x^2}{2B_n^2}+|\bar{x}h_-(\bar{x})-h_-(\bar{x})B_n^2|+|\bar{x}h_-(\bar{x})-xh_-(\bar{x})|+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left|\frac{\bar{x}^2}{B_n^2}-h_-(\bar{x})B_n^2\right|+\left.\left|\frac{\bar{x}^2}{B_n^2}-\frac{x^2}{B_n^2}\right|\right\}+\frac{1}{h_-(\bar{x})B_n\left(h_-(\bar{x})\right)}\left[42h_-^3(\bar{x})B_{3n}+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left|\frac{\bar{x}}{B_n^2}-\bar{x}h_-(\bar{x})\right|+\frac{1}{2}\left|\frac{\bar{x}^2}{B_n^2}-\frac{x^2}{B_n^2}\right|+\frac{1}{2}|h_-(\bar{x})\bar{x}-xh_-(\bar{x})|+$$

$$+\left.\frac{1}{2}|h_-^2(\bar{x})B_n^2-\bar{x}h_-(\bar{x})|+\frac{1}{2}|\bar{x}h_-(\bar{x})-xh_-(\bar{x})|\right]\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{x^2}{2B_n^2}+\frac{1}{2}\left|\frac{\bar{x}^2}{B_n^2}-\bar{x}h_-(\bar{x})\right|+\frac{1}{2}\left|\frac{\bar{x}^2}{B_n^2}-\frac{x^2}{B_n^2}\right|+\frac{1}{2}|\bar{x}h_-(\bar{x})-xh_-(\bar{x})|+\right.$$

$$+\left.\frac{1}{2}|h_-^2(\bar{x})B_n^2-\bar{x}h_-(\bar{x})|+\frac{1}{2}|\bar{x}h_-(\bar{x})-xh_-(\bar{x})|\right\}. \qquad (3.50)$$

Поскольку $0<h_-(\bar{x})<\frac{5}{\bar{x}}\ln\frac{L_{3n}^{-1}}{500}$, $\bar{x}=m_n\left(h(\bar{x})\right)$ и $\bar{x}\in A_n$, то

$$\left|h_-(\bar{x})B_n\left(h_-(\bar{x})\right)-\frac{\bar{x}}{B_n}\right|\leqslant l_{16},\quad |\bar{x}h_-(\bar{x})-h_-^2(\bar{x})B_n^2|\leqslant l_{17},\quad \left|\frac{\bar{x}^2}{B_n^2}-\bar{x}h_-(\bar{x})\right|\leqslant l_{18}$$

(см. (3.39) и (3.41—3.45)).

Очевидно, $|\bar{x}h_-(\bar{x})-xh_-(\bar{x})|\leqslant l_{19}$ и $\left|\frac{\bar{x}}{B_n}-\frac{x}{B_n}\right|\leqslant l_{20}$. Для завершения доказательства леммы при $8B_n<x<\sqrt{2{,}5B_n^2\ln\frac{L_{3n}^{-1}}{500}}$ и $x\notin A_n$ достаточно последние оценки подставить в (3.50). Заметим еще, что $\frac{5}{9}x<\bar{x}<x$. Лемма доказана полностью.

Лемма 2. *При выполнении условий теоремы 3 для всех* $|t|\leqslant L_{3n}^{-\frac{1}{3}}$

$$\left|f_n(t)-e^{-\frac{t^2}{2}}\left[1-\frac{it^3}{6B_n^3}\sum_{k=1}^{n}M(\xi_k-M\xi_k)^3\right]\right|\leqslant\delta_{10}(n)L_{3n}|t|^3e^{-\frac{t^2}{4}},$$

где $f_n(t)$ *— характеристическая функция суммы* S_n.

Доказательство. Следуя Ю. В. Linnику [7], нетрудно показать, что при выполнении данных условий для всех $|t| \leqslant \sqrt{\psi_2(n)}$ имеет место неравенство

$$\left| f_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 - \frac{it^3}{6B_n^3} \sum_{k=1}^{n} M(\xi_k - M\xi_k)^3\right) \right| \leqslant |t|^3 \delta_{11}(n) L_{3n} e^{-\frac{t^2}{4}}.$$

Поскольку

$$\left| f_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \leqslant C_7 L_{3n} |t|^3 e^{-\frac{t^2}{3}}$$

при $|t| \leqslant L_{3n}^{-\frac{1}{3}}$, то для $\sqrt{\psi_2(n)} < |t| \leqslant L_{3n}^{-\frac{1}{3}}$

$$\left| f_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \left[1 - \frac{it^3}{6B_n^3} \sum_{k=1}^{n} M(\xi_k - M\xi_k)^3\right] \right| \leqslant \left| f_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| + \frac{|t|^3}{6} L_{3n} e^{-\frac{t^2}{2}} +$$

$$+ C_8 L_{3n} |t|^3 e^{-\frac{t^2}{3}} \leqslant C_7 L_{3n} |t|^3 e^{-\frac{t^2}{4} - \frac{\psi_2(n)}{12}} + \frac{|t|^3}{6} L_{3n} e^{-\frac{t^2}{4} - \frac{\psi_2(n)}{4}} + C_8 L_{3n} |t|^3 e^{-\frac{t^2}{3} - \frac{\psi_2(n)}{12}}.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *При выполнении условий теоремы 3 для* $|x| > \sqrt{2{,}5 \ln L_{3n}^{-1}}$ *имеет место неравенство*

$$|\bar{F}_n(x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{\delta_7(n) L_{3n}}{|x|^3}.$$

Аналогично нетрудно показать справедливость следующей леммы.

Лемма 4. *При выполнении условий леммы 1 для* $|x| > \sqrt{2{,}5 \ln \frac{L_{3n}^{-1}}{500}}$,

$$|\bar{F}_n(x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{l_{21} L_{3n}}{|x|^3}.$$

Доказательство леммы 3.

Поскольку $L_{3n} \to 0$ при $n \to \infty$, то для больших n $L_{3n}^{-1} > e$. Обозначим

$$\rho(n) = \sup_{|x| > \sqrt{2{,}5 \ln L_{3n}^{-1}}} \left| \bar{F}_n(x) - \Phi(x) - \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{(1-x^2)}{6B_n^3} \sum_{k=1}^{n} M(\xi_k - M\xi_k)^3 \right|.$$

Для доказательства достаточно рассмотреть случай $x > \sqrt{2{,}5 \ln L_{3n}^{-1}}$, так как для отрицательных x лемма доказывается аналогично. Пусть функция

$$y = \left| \bar{F}_n(x) - \Phi(x) - \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{(1-x^2)}{6B_n^3} \sum_{k=1}^{n} M(\xi_k - M\xi_k)^3 \right|$$

в точке $\mu \in (\sqrt{2{,}5 \ln L_{3n}^{-1}}, \infty)$ принимает наибольшее значение.

При $\frac{\mu}{2} \leqslant u \leqslant \mu$

$$\left\| \Phi(\mu) - \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{(1-\mu^2)}{6B_n^3} \sum_{k=1}^{n} M(\xi_k - M\xi_k)^3 - \Phi(u) + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{(1-u^2)}{6B_n^3} \sum_{k=1}^{n} M(\xi_k - M\xi_k)^3 \right\| \leqslant \frac{\delta_8(n) L_{3n}}{\mu^3}.$$

Возможны два случая: либо $\rho(n)\leqslant\frac{\delta_8(n)L_{3n}}{\mu^3}$, либо $\rho(n)>\frac{\delta_8(n)L_{3n}}{\mu^3}$. В первом случае утверждение леммы 3 получаем немедленно. Если $\rho(n)>\frac{\delta_8(n)L_{3n}}{\mu^3}$, то можно воспользоваться неравенством (см. [2])

$$\rho(n)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{f_n(t)-\varphi_n(t)}{t}\right|\left(\frac{\sin\frac{\mu t}{16}}{\frac{\mu t}{16}}\right)^4 dt=I_1+I_2. \tag{3.51}$$

Здесь

$$\varphi_n(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}\left[1-\frac{it^3}{6B_n^3}\sum_{k=1}^{n}M(\xi_k-M\xi_k)^3\right],$$

$$I_1=\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\leqslant L_{3n}^{-\frac{1}{3}}}\left|\frac{f_n(t)-\varphi_n(t)}{t}\right|\left(\frac{\sin\frac{\mu t}{16}}{\frac{\mu t}{16}}\right)^4 dt$$

и

$$I_2=\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|>L_{3n}^{-\frac{1}{3}}}\left|\frac{f_n(t)-\varphi_n(t)}{t}\right|\left(\frac{\sin\frac{\mu t}{16}}{\frac{\mu t}{16}}\right)^4 dt.$$

С помощью леммы 2 получаем

$$I_1\leqslant\delta_{12}(n)L_{3n}\int\limits_{|t|\leqslant L_{3n}^{-\frac{1}{3}}}t^2e^{-\frac{t^2}{4}}\left(\frac{\sin\frac{\mu t}{16}}{\frac{\mu t}{16}}\right)^4 dt=\frac{\delta_{13}(n)L_{3n}}{\mu^3}. \tag{3.52}$$

Очевидно

$$I_2\leqslant\frac{\delta_{14}(n)L_{3n}}{\mu^3}. \tag{3.53}$$

Из (3.51 – 3.53) вытекает

$$\rho(n)\leqslant\frac{\delta_{15}(n)L_{3n}}{\mu^3}.$$

Следовательно,

$$\left|\bar F_n(x)-\Phi(x)-\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\frac{(1-x^2)}{6B_n^3}\sum_{k=1}^{n}M(\xi_k-M\xi_k)^3\right|\leqslant\frac{\delta_{16}(n)L_{3n}}{x^3},$$

а так как $|x|>\sqrt{2{,}5\ln L_{3n}^{-1}}$, то

$$|\bar F_n(x)-\Phi(x)|\leqslant\frac{\delta_{17}(n)L_{3n}}{|x|^3}.$$

Лемма 3 доказана.

Утверждение теоремы 2 при $L_{3n}<\frac{1}{500}$ немедленно вытекает из леммы 1 и 4. В случае $L_{3n}\geqslant\frac{1}{500}$ теорему докажем с помощью неравенства (1.3). Сперва заметим, что при $|x|^3<L_{3n}$ неравенство (1.4) тривиально.

Поскольку $L_{3n}>\frac{1}{500}$ и $1-\Phi(x)\leqslant\frac{1}{|x|^3}$ при $x\neq0$, то

$$1-\Phi(x)\leqslant\frac{500L_{3n}}{|x|^3}. \tag{3.54}$$

Пусть в (1.3) $y=x$, $m=3$ и $M\xi_k=0$, $1\leqslant k\leqslant n$, тогда

$$1-G_n(x)\leqslant 1-\prod_{k=1}^{n} F_k(x)+\frac{C(m)\,B_{3n}}{x^3}\exp\left\{1+eB_{2n}\left(\frac{1}{x}\ln\frac{x^3}{C(m)\,B_{3n}}\right)^2\right\},\quad x>0.$$

Отсюда при $L_{3n}>\frac{1}{500}$ и $x^3>L_{3n}$

$$1-G_n(x)\leqslant\frac{B_{3n}}{x^3}+\frac{C_9 B_{3n}}{x^3},\qquad C_9>0,$$

где C_9 – абсолютная константа. По определению $G_n(x)=\bar{F}_n(xB_n)$, следовательно,

$$1-\bar{F}_n(x)\leqslant\frac{(1+C_9)\,L_{3n}}{x^3}. \tag{3.55}$$

Из (3.54) и (3.55) для $x^3>L_{3n}$ следует (1.4), если только $C_3=501+C_9$.

Аналогично доказывается теорема 2 для $x^3<-L_{3n}$. Теорема доказана полностью.

Утверждение теоремы 3 следует из леммы 1 и 3.

§ 4. Доказательство теоремы 4

Теорему докажем методом усечения случайных величин. Пусть

$$\eta_k=\begin{cases}\xi_k-M\xi_k & \text{если}\quad |\xi_k-M\xi_k|\leqslant(1+|x|)\,B_n,\\ 0 & \text{если}\quad |\xi_k-M\xi_k|>(1+|x|)\,B_n,\end{cases}$$

$$\bar{A}_n=\sum_{k=1}^{n}M\eta_k,\quad \bar{B}_n^2=\sum_{k=1}^{n}M(\eta_k-M\eta_k)^2\quad\text{и}\quad \bar{B}_{3n}=\sum_{k=1}^{n}M\,|\eta_k-M\eta_k|^3.$$

Сперва докажем неравенство (1.8) при

$$\sum_{k=1}^{n}\ \int\limits_{|u|>(1+|x|)\,B_n} dF_k(u+M\xi_k)\leqslant\frac{1}{3}\,B_n^2. \tag{4.1}$$

В этом случае

$$\sum_{k=1}^{n}\ \int\limits_{|u|>(1+|x|)\,B_n} dF_k(u+M\xi_k)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{(1+|x|)^2B_n^2}\int\limits_{|u|>(1+|x|)\,B_n}u^2\,dF_k(u+M\xi_k)\leqslant\frac{1}{3}. \tag{4.2}$$

Так как

$$\int\limits_{|u|>(1+|x|)\,B_n}|u|\,dF_k(u+M\xi_k)\leqslant$$

$$\leqslant\Bigg(\int\limits_{|u|>(1+|x|)\,B_n}u^2\,dF_k(u+M\xi_k)\Bigg)^{\frac{1}{2}}\Bigg(\int\limits_{|u|>(1+|x|)\,B_n}dF_k(u+M\xi_k)\Bigg)^{\frac{1}{2}},$$

то

$$\sum_{k=1}^{n}\Bigg(\int\limits_{|u|>(1+|x|)\,B_n}|u|\,dF_k(u+M\xi_k)\Bigg)^2\leqslant\frac{1}{9}\,B_n^2. \tag{4.3}$$

По определению

$$M\eta_k=\int\limits_{|u|\leqslant(1+|x|)\,B_n}u\,dF_k(u+M\xi_k)=-\int\limits_{|u|>(1+|x|)\,B_n}u\,dF_k(u+M\xi_k).$$

Следовательно,

$$|A_n| \leqslant \frac{1}{(1+|x|)B_n} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|u|>(1+|x|)B_n} u^2 dF_k(u+M\xi_k) \leqslant \frac{1}{3} B_n. \tag{4.4}$$

Из (4.1) и (4.3) вытекает

$$\bar{B}_n^2 > \frac{5}{9} B_n^2. \tag{4.5}$$

Для всех x имеет место неравенство

$$|\bar{F}_n(x) - \Phi(x)| \leqslant \left| P\left\{ \frac{1}{\bar{B}_n} \sum_{k=1}^{n} (\eta_k - M\eta_k) < \frac{xB_n - \bar{A}_n}{\bar{B}_n} \right\} - \Phi\left(\frac{xB_n - \bar{A}_n}{\bar{B}_n}\right) \right| +$$

$$+ \left| \Phi\left(\frac{xB_n - \bar{A}_n}{\bar{B}_n}\right) - \Phi(x) \right| + \sum_{k=1}^{n} P\{|\xi_k - M\xi_k| > (1+|x|)B_n\}. \tag{4.6}$$

Оценка разности $|\bar{F}_n(x) - \Phi(x)|$ сводится к оценке выражений, находящихся в правой части этого неравенства. Поскольку случайные величины $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ имеют конечные третьи моменты, то к ним применима известная теорема К. Эссеена [2]:

$$\left| P\left\{ \frac{1}{\bar{B}_n} \sum_{k=1}^{n} (\eta_k - M\eta_k) < \frac{xB_n - \bar{A}_n}{\bar{B}_n} \right\} - \Phi\left(\frac{xB_n - \bar{A}_n}{\bar{B}_n}\right) \right| \leqslant \frac{C_9 \bar{B}_{3n}}{\bar{B}_n^3 + |xB_n - \bar{A}_n|^3}. \tag{4.7}$$

Легко заметить, что

$$\bar{B}_{3n} \leqslant 8 \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|u| \leqslant (1+|x|)B_n} |u|^3 dF_k(u+M\xi_k). \tag{4.8}$$

В силу (4.4) и (4.5)

$$\bar{B}_n^3 + |xB_n - \bar{A}_n|^3 > C_{10}(1+|x|)^3 B_n^3. \tag{4.9}$$

Теперь оценим разность

$$\left| \Phi\left(\frac{xB_n - \bar{A}_n}{\bar{B}_n}\right) - \Phi(x) \right|.$$

При $|x| \leqslant 1$ необходимую оценку нетрудно получить с помощью следующей леммы [11].

Лемма 5. *При всех* x

$$\left| \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma_1}\right) - \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma_2}\right) \right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \frac{\sigma_1}{\sigma_2} - 1 \right|. \tag{4.10}$$

Здесь $\sigma_1 > 0$ *и* $\sigma_2 > 0$.

В силу (4.9)

$$\left| \Phi\left(\frac{xB_n - \bar{A}_n}{\bar{B}_n}\right) - \Phi(x) \right| \leqslant \frac{|\bar{A}_n|}{\sqrt{2\pi}\,\bar{B}_n} + \frac{|B_n^2 - \bar{B}_n^2|}{\sqrt{2\pi}\,B_n(B_n + \bar{B}_n)}.$$

Имеем

$$\bar{B}_n^2 = B_n^2 - \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|u|>(1+|x|)B_n} u^2 dF_k(u+M\xi_k) - \sum_{k=1}^{n} \Bigg(\int\limits_{|u|>(1+|x|)B_n} u dF_k(u+M\xi_k) \Bigg)^2.$$

Отсюда (4.2) и (4.3)

$$|\bar{B}_n^2 - B_n^2| \leqslant 2 \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|u|>(1+|x|)B_n} u^2 dF_k(u+M\xi_k).$$

Из (4.4) и (4.5)

$$\frac{|\bar{A}_n|}{\sqrt{2\pi}\,\bar{B}_n} \leqslant \frac{1}{(1+|x|)\,B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|u|>(1+|x|)B_n} u^2\,dF_k(u+M\xi_k).$$

Три последних неравенства показывают, что при $|x| \leqslant 1$

$$\left|\Phi\left(\frac{xB_n-\bar{A}_n}{\bar{B}_n}\right)-\Phi(x)\right| \leqslant \frac{C_{11}}{(1+|x|)^3 B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|u|>(1+|x|)B_n} u^2\,dF_k(u+M\xi_k). \qquad (4.11)$$

Пусть теперь $x>1$. Тогда $\frac{x}{3}<(xB_n-\bar{A}_n)/\bar{B}_n$ и

$$\left|\Phi\left(\frac{xB_n-\bar{A}_n}{\bar{B}_n}\right)-\Phi(x)\right| \leqslant \frac{e^{-\frac{x^2}{18}}}{\sqrt{2\pi}} \left|\frac{xB_n-\bar{A}_n}{\bar{B}_n}-x\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_{12}}{(1+|x|)^3 B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|u|>(1+|x|)B_n} u^2\,dF_k(u+M\xi_k). \qquad (4.12)$$

Аналогичную оценку нетрудно получить для $x<-1$.

Очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|u|>(1+|x|)B_n} dF_k(u+M\xi_k) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(1+|x|)^2 B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|u|>(1+|x|)B_n} u^2\,dF_k(u+M\xi_k). \qquad (4.13)$$

Из (4.2), (4.6–4.9) и (4.12–4.13) вытекает, что при

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|u|>(1+|x|)B_n} u^2\,dF_k(u+M\xi_k) < \frac{1}{3} B_n^2,$$

$$|\bar{F}_n(x)-\Phi(x)| \leqslant \frac{C_{13}}{(1+|x|)^3 B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|u|>(1+|x|)B_n} u^2\,dF_k(u+M\xi_k) +$$

$$+ \frac{C_{13}}{(1+|x|)^3 B_n^3} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|u|\leqslant(1+|x|)B_n} |u|^3\,dF_k(u+M\xi_k).$$

Отсюда с помощью равенства

$$\frac{1}{(1+|x|)^3 B_n^3} \int\limits_{0}^{(1+|x|)B_n} \int\limits_{|u|>v} u^2\,dF_k(u+M\xi_k)\,dv =$$

$$= \frac{1}{(1+|x|)^3 B_n^2} \int\limits_{|u|>(1+|x|)B_n} u^2\,dF_k(u+M\xi_k) +$$

$$+ \frac{1}{(1+|x|)^3 B_n^3} \int\limits_{|u|\leqslant(1+|x|)B_n} |u|^3\,dF_k(u+M\xi_k),$$

которое можно проверить, интегрируя интеграл левой части по частям, получаем утверждение теоремы 4.

Так как в силу неравенства Чебышева

$$|\bar{F}_n(x)-\Phi(x)|\leqslant\frac{4}{(1+|x|)^2},$$

то в случае

$$\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|u|>(1+|x|)B_n} u^2dF_k(u+M\xi)\geqslant\frac{1}{3}B_n^2$$

оценка (1.8) с $C_6=12$ тривиальна.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
28.XII.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Ляпунов, Собрание сочинений, 1, Издат. АН СССР, 1954.
2. C. G. Esseen, Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace–Gaussian law., Acta Math., 77 (1945), 1–125.
3. Б. А. Рогозин, Некоторые экстремальные задачи в области предельных теорем (канд. диссертация), М., 1961.
4. П. Сурвила, К вопросу об остаточном члене в центральной предельной теореме, Лит. мат. сб., 2 (1962), 179—194.
5. Л. Д. Мешалкин и Б. А. Рогозин, Оценка расстояния между функциями распределения по близости их характеристических функций и ее приложение к центральной предельной теореме, сб. «Предельные теоремы», Ташкент (1963), 49—56.
6. С. В. Нагаев, Некоторые предельные теоремы для больших уклонений, Теор. вер. и ее прим., 10 (1965), 231—254.
7. Ю. В. Линник, О точности приближения к гауссову распределению сумм независимых случайных величин, Изв. АН СССР, сер. матем., 11 (1947), 111—138.
8. В. В. Петров, Некоторые экстремальные задачи теории сложения независимых случайных величин (канд. диссертация), Л., 1955.
9. А. Бикялис, Об оценке остаточного члена в центральной предельной теореме, Лит. мат. сб., 4 (1964), 303—308.
10. Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, Гостехиздат, 1949.
11. Ю. В. Прохоров, О равномерной предельной теореме А. Н. Колмогорова, Теор. вер. и ее прим., 5 (1960), 103—113.

LIEKAMOJO NARIO CENTRINĖJE RIBINĖJE TEOREMOJE ĮVERTINIMAI

A. BIKELIS

(Reziumė)

Straipsnyje nagrinėjama nepriklausomų nevienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seka. Įrodoma keletas teoremų, kuriose gauti liekamieji nariai ((1.4), (1.6), (1.8)) priklauso nuo atsitiktinių dydžių parametrų ir nuo pasiskirstymo funkcijų argumento.

ON ESTIMATES OF THE REMAIDER TERM IN THE CENTRAL LIMIT THEOREM

A. BIKELIS

(Summary)

The present paper considers a sequence of independent and not equally distributed random variables. Some limit theorems are proved about the remainder term. In the all cases the obtained remainder term ((1.4), (1.6), (1.8)) depends on the parameters of the random variables and also on the argument of the distribution functions.