О КОМПОЗИЦИЯХ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ МЕР

Б. ГРИГЕЛИОНИС

1. Пусть $(X, \mathfrak{a})$ – некоторое измеримое пространство, T – множество неотрицательных действительных чисел и $\mathfrak{B}$ – σ-алгебра борелевских множеств $B \subset T$. Систему случайных величин $Q(E) = Q(E, \omega)$, заданных при каждом $E \in \mathfrak{a} \times \mathfrak{B}$ на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$, таких, что:

1) $Q(., \omega)$ с вероятностью 1 является мерой на σ-алгебре $\mathfrak{a} \times \mathfrak{B}$, принимающей лишь целочисленные значения,

2) $\mathbf{P}\left\{Q\left(X \times [0, t)\right) < \infty\right\} = 1$ при каждом конечном $\mathfrak{F}$ и

3) $\mathbf{P}\left\{Q(X \times \{0\}) = 0\right\} = 1$,

назовем целочисленной случайной мерой Q.

Случайную величину $Q\left(A \times [0, t)\right)$, где $A \in \mathfrak{a}$, можно интерпретировать, как число маркированных случайных событий, происшедших в интервале времени $[0, t)$ с марками $x \in A$ (см. [1 – 3]).

Случайная мера задается согласованными распределениями вероятностей для любых векторов $\left(Q(E_1), \ldots, Q(E_n)\right)$, где $E_i \in \mathfrak{a} \times \mathfrak{B}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Заметим, что такие распределения достаточно задавать лишь для наборов попарно не пересекающихся множеств $E_i \in \mathfrak{a} \times \mathfrak{B}$. Действительно, для произвольных множеств $E_i \in \mathfrak{a} \times \mathfrak{B}$ $(i = 1, \ldots, n)$ всегда можно найти попарно непересекающиеся множества $E'_i \in \mathfrak{a} \times \mathfrak{B}$ $(i = 1, \ldots, n')$ такие, что $E_i = \bigcup_{k=1}^{m_i} E'_{i_k}$ $\left(i_k \in (1, \ldots, n')\right)$. Отсюда следует, что, зная распределения вероятностей вектора $\left(Q(E'_1), \ldots, Q(E'_{n'})\right)$, можно найти распределение вероятностей вектора $\left(Q(E_1), \ldots, Q(E_n)\right)$.

Целочисленную случайную меру Q называют стационарной, если распределение вектора $\left((Q(A_1 \times [t_{11} + t, t_{12} + t)\right), \ldots, Q\left(A_n \times [t_{n_1} + t, \ldots, t_{n_2} + t)\right)$ не зависит от t при любых n, $A_i \in \mathfrak{a}$, $[t_{i_1}, t_{i_2}) \in \mathfrak{B}$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Выделим важный класс пуассоновских случайных мер Q как такие, значения которых для любых попарно непересекающихся множеств взаимно независимы и $Q(E)$ имеет пуассоновское распределение с параметром $\lambda(E)$.

Очевидно, что $\lambda(E)$ будет мерой на σ-алгебре $\mathfrak{a} \times \mathfrak{B}$. Мы будем предполагать, что $\lambda\left(X \times [0,\ t)\right) < \infty$ при каждом конечном t и что при каждом $A \in \mathfrak{a}$ функция $\lambda\left(A \times [0,\ t)\right) = \lambda(A,\ t)$ непрерывна слева по t. Пуассоновская случайная мера полностью определяется мерой $\lambda(E)$, и мы ее будем обозначать через $\mathbf{P}_\lambda$. Если $\lambda(A,\ t) = t\lambda(A)$, где $\lambda(A)$ – конечная мера на $\mathfrak{a}$, то мера P_λ стационарна.

Говорим, что последовательность целочисленных случайных мер Q_n сходится к мере Q, если для любого конечного набора попарно непересекающихся множеств вида

$$E_i = A_i \times [t_{i1},\ t_{i2}) \quad \left(A_i \in \mathfrak{a},\ [t_{i1},\ t_{i2}) \in \mathfrak{B},\ i = 1,\ \ldots,\ k\right)$$

распределения вероятностей векторов $\left(Q_n(E_1),\ \ldots,\ Q_n(E_k)\right)$ слабо сходятся к соответствующим предельным.

2. Рассмотрим далее последовательность серий взаимно независимых в каждой серии целочисленных случайных мер $Q_{n1},\ \ldots,\ Q_{nk_n}$ и пусть

$$Q_n(E) = \sum_{r=1}^{k_n} Q_{nr}(E).$$

В настоящей работе приводятся условия сходимости композиций Q_n к пуассоновским мерам.

Некоторые общие теоремы о сходимости композиций стационарных мер к стационарным мерам с безгранично делимыми конечномерными распределениями недавно получены И. Керстаном и К. Матессом ([4], см. также [3], [5]). Условия сходимости выражены в терминах распределений Пальма, введенных Рыль-Нардзевским [6] и Сливняком [7]. Условия сходимости к пуассоновским мерам (не обязательно стационарным), как увидим ниже, носят весьма общий характер и выражаются в терминах простых характеристик слагаемых случайных мер.

Случайные меры $Q_{nr}(r = 1,\ \ldots,\ k_n)$ называем бесконечно малыми, если при каждом фиксированном t

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1 \le r \le k_n} \mathbf{P}\left\{Q_{nr}\left(X \times [0,\ t)\right) > 0\right\} = 0. \tag{1}$$

Теорема 1. *Для сходимости композиций $Q_n = \sum_{r=1}^{k_n} Q_{nr}$ независимых бесконечно малых целочисленных случайных мер к пуассоновской мерг P_λ необходимо и достаточно, чтобы при каждом фиксированном t и $A \in \mathfrak{a}$*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{k_n} \mathbf{P}\left\{Q_{nr}\left(A \times [0,\ t)\right) = 1\right\} = \lambda(A,\ t) \tag{2}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{k_n} \mathbf{P}\left\{Q_{nr}\left(X \times [0,\ t)\right) > 1\right\} = 0. \tag{3}$$

Доказательство этой теоремы с использованием метода характеристических функций и некоторых простых неравенств проводится аналогично случаю, когда множество X состоит из единственного элемента (см. [8–9]), и мы его опускаем.

Заметим, что если выполнено условие (3) и соотношение (2) верно для непересекающихся множеств $A_1, A_2 \in \mathfrak{a}$, то оно верно и для $A = A_1 \cup A_2$, поскольку для любой целочисленной случайной меры Q верно неравенство (см. [9]):

$$\Big| \mathbf{P}\left\{Q\left((A_1 \cup A_2) \times [0,\ t)\right) = 1\right\} - \mathbf{P}\left\{Q\left(A_1 \times [0,\ t)\right) = 1\right\} - \\ - \mathbf{P}\left\{Q\left(A_2 \times [0,\ t)\right) = 1\right\}\Big| \leqslant 2\mathbf{P}\left\{Q\left(X \times [0,\ t)\right) > 1\right\}. \quad (4)$$

Так как для стационарной пуассоновской меры $\lambda(A,\ t) = t\lambda(A)$, то из теоремы 1 получаем следующий критерий сходимости композиций Q_n к стационарным пуассоновским мерам.

Следствие. *Для сходимости композиций* $Q_n = \sum_{r=1}^{k_n} Q_{nr}$ *независимых бесконечно малых целочисленных случайных мер к стационарной пуассоновской мере* P_λ *необходимо и достаточно, чтобы при каждом фиксированном* t *и* $A \in \mathfrak{a}$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{k_n} \mathbf{P}\left\{Q_{nr}\left(A \times [0,\ t)\right) = 1\right\} = t\lambda(A)$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{k_n} \mathbf{P}\left\{Q_{nr}\left(X \times [0,\ t)\right) > 1\right\} = 0.$$

Теорема 2. *Если выполнены условия* (1) *и* (3), *то предельной мерой последовательности* Q_n *может быть лишь пуассоновская.*

Доказательство. Пусть меры Q_n сходятся к некоторой предельной мере Q. При условии (1) для слабой сходимости функции распределения величины $Q_n\left(A \times [0,\ t)\right)$ необходимо (см. [10]), чтобы существовала конечная функция $\lambda(A,\ t)$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{k_n} \mathbf{P}\left\{Q_{nr}\left(A \times [0,\ t)\right) \geqslant 1\right\} = \lambda(A,\ t). \quad (5)$$

Поскольку

$$0 \leqslant \sum_{r=1}^{k_n} \left[\mathbf{P}\left\{Q_{nr}\left(A \times [0,\ t)\right) \geqslant 1\right\} - \mathbf{P}\left\{Q_{nr}\left(A \times [0,\ t)\right) = 1\right\}\right] \leqslant \\ \leqslant \sum_{r=1}^{k_n} \mathbf{P}\left\{Q_{nr}\left(X \times [0,\ t)\right) > 1\right\},$$

то из (3) и (5) следует (2). Используя неравенство (4), легко убедиться, что при условии (3) $\lambda(A,\ t)$ при каждом t является конечной мерой на $\mathfrak{a}$. Тогда по теореме 1 предельная мера $Q = P_\lambda$.

3. Далее будем рассматривать случай, когда X содержит лишь конечное число элементов; $X = \{x_1,\ \ldots,\ x_N\}$.

Пусть

$$\tau_{nr}^{(k)}=\inf\left\{t: Q_{nr}\left(X\times[0,\ t)\right)\geqslant k\right\},$$

$$\tau_{nr}^{(i,\,k)}=\inf\left\{t: Q_{nr}\left(\{x_i\}\times[0,\ t)\right)\geqslant k\right\}\qquad (i=1,\ \ldots,\ N;\ k=1,\ 2,\ \ldots).$$

Условие (1) бесконечной малости мер $Q_{nr}(r=1,\ \ldots,\ k_n)$ эквивалентно требованию, чтобы при каждом фиксированном t

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant r\leqslant k_n}\mathbf{P}\left\{\tau_{nr}^{(1)}<t\right\}=0. \tag{6}$$

Обозначим

$$\lambda_i(t)=\lambda\left(\{x_i\}\times[0,\ t)\right).$$

Из теоремы 1 и выше сделанного замечания непосредственно следует такое утверждение.

Теорема 3. *При условии* (6) *для сходимости композиций случайных мер* $Q_n=\sum_{r=1}^{k_n}Q_{nr}$ *к пуассоновской мере* P_λ *необходимо и достаточно, чтобы при каждом фиксированном* t

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\mathbf{P}\left\{\tau_{nr}^{(i,\,1)}<t\right\}=\lambda_i(t)\qquad (i=1,\ \ldots,\ N)$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\mathbf{P}\left\{\tau_{nr}^{(2)}<t\right\}=0.$$

Отметим, что в нашей интерпретации целочисленной случайной меры $\tau_{nr}^{(1)}$ – момент наступления первого события, $\tau_{nr}^{(i,\,1)}$ – момент наступления первого события с маркой x_i и $\tau_{nr}^{(2)}$ – момент наступления второго события в r-том слагаемом потоке маркированных событий.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
31.I.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Kerstan, Teilprozesse Poissonscher Prozesse. Proc. of the 3-rd Prague Sympos. of Inform. Theory (1964), 377–403.
2. K. Matthes, Stationäre zufällige Punktfolgen, I, Jahresbericht d. DMV, 66, 2 (1963), 66–79.
3. J. Kerstan, K. Matthes, Stationäre zufällige Punktfolgen, II, Jahresbericht d. DMV, 66, 3 (1964), 106–118.
4. И. Керстан, К. Маттес, Обобщение теоремы Пальма–Хинчина, Укр. матем. ж., 17, 4 (1965), 29–36.
5. P. Franken, A. Liemand, Stationäre zufällige Punktfolgen, III, Jahresbericht d. DMV, 66, 4 (1964).
6. C. Ryll-Nardzewski, Remarks on the processes of calls, Proc. of the 4-th Berkley Sympos. on Math. Stat. and Probability, Vol II (1961), 455–465.
7. И. М. Сливняк, Некоторые свойства стационарных потоков однородных случайных событий, Теор. вер. и ее прим., т. VII, 3 (1962), 347–352.

8. Б. И. Григелионис, О сходимости сумм ступенчатых случайных процессов к пуассоновскому, Теория вер. и ее прим., т. VIII, 2 (1963), 189–194.
9. Б. Григелионис, К вопросу о сходимости сумм случайных ступенчатых процессов к пуассоновскому, Лит. мат. сб., **VI**, 2 (1966).
10. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.–Л., Гостехиздат, 1949.

APIE ATSITIKTINIŲ MATŲ SU SVEIKOMIS REIKŠMĖMIS KOMPOZICIJAS

B. GRIGELIONIS

(*Reziumė*)

Darbe gauti bendri kriterijai atsitiktinių matų su sveikomis reikšmėmis kompozicijų konvergencijai į Puasono matus.

ON THE COMPOSITIONS OF THE INTEGER-VALUED RANDOM MEASURES

B. GRIGELIONIS

(*Summary*)

In the paper the general criteria on convergence of the compositions of integer-valued random measures to the Poisson measure are given.