СИСТЕМА РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

И. В. КИСЕЛЮС

Обыкновенное дифференциальное уравнение типа Фукса

$$\sum_{k=0}^{n} z^k F_k(z)\, w^{(k)} = 0,$$

где все функции $F_k(z)$ регулярны в некотором круге $|z| < R$, имеет решение вида

$$w = z^{\lambda} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} z^{\nu}.$$

Комплексное число λ является корнем характеристического уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} C_{\lambda}^{k}\, k!\, F_k(0) = 0,$$

причем ни одно из чисел вида $\lambda+1,\ \lambda+2,\ \ldots,\ \lambda+p,\ \ldots$ его не удовлетворяет.

Если имеется несколько корней характеристического уравнения, скажем $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_m$, отличающихся одно от другого на целые числа или нуль, то существует m линейно независимых решений вида

$$w_{\mu} = \sum_{\rho=1}^{\mu} z^{\lambda_{\rho}} \varphi_{\mu,\,\mu-\rho}(z) \ln^{\mu-\rho} z, \qquad \mu = 1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

где все $\varphi_{\mu,\,\mu-\rho}(z)$ функции регулярные в круге с центром в начале координат.

1. Ш. И. Стрелиц в [1] построил решения дифференциального уравнения в частных производных, являющегося до некоторой степени аналогом уравнения типа Фукса, где в отличие от случая одного переменного, требовалось добавить дополнительное условие, обеспечивающее существование решения.

При дальнейших исследованиях нам понадобятся результаты, опубликованные в [2]. Там автором доказана следующая

Теорема. *Пусть в уравнении в частных производных*

$$L(u) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_m=k} F^{k}_{i_1 i_2 \ldots i_m}(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_m) \times$$

$$\times\, z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_m^{i_m} \frac{\partial^{i_1+i_2+\cdots i_m} u}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2} \ldots \partial z_m^{i_m}} = 0, \qquad \text{(I)}$$

где $F_{i_1 i_2 \ldots i_m}(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ — *регулярные функции в полицилиндре*

$$|z_1| < R_1, \ |z_2| < R_2, \ \ldots, \ |z_m| < R_m,$$

однородная форма

$$\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_m=n} F_{i_1 i_2 \ldots i_m}(0, 0, \ldots, 0)\, \eta_1^{i_1} \eta_2^{i_2} \ldots \eta_m^{i_m} \tag{II}$$

не обращается в нуль для всех неотрицательных $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$; $\eta_1+\eta_2+ +\cdots+\eta_m=1$. *Тогда существует бесконечное множество линейно независимых решений вида*

$$u = z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} \ldots z_m^{\lambda_m} f(z_1, z_2, \ldots, z_m), \tag{III}$$

где λ_j, $j = 1, 2, \ldots, m$ — *комплексные числа, а* $f(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ — *регулярная функция в окрестности начала координат. В частности, если* $F^n_{i_1 i_2 \ldots i_m}(z_1, z_2, \ldots, z_m) \equiv \mathrm{const}$, *а остальные коэффициенты целые функции, то и* $f(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ *целая функция.*

$f(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ *найдена в виде ряда*

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_m) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \ldots \sum_{i_m=0}^{\infty} b_{i_1 i_2 \ldots i_m} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_m^{i_m}. \tag{IV}$$

Коэффициенты $b_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ определяются из равенств, которые получаем, приравнивая к нулю квадратные скобки из соотношения:

$$\begin{gathered} Q(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)\, b_{00\ldots0}\, z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} \ldots z_m^{\lambda_m} + \\ + \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_m=1}^{\infty} [Q(\lambda_1+i_1, \lambda_2+i_2, \ldots, \lambda_m+i_m)\, b_{i_1 i_2 \ldots i_m} + \\ + P_{i_1 i_2 \ldots i_m}]\, z_1^{\lambda_1+i_1} z_2^{\lambda_2+i_2} \ldots z_m^{\lambda_m+i_m} = 0, \end{gathered} \tag{V}$$

где

$$\begin{gathered} Q(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = \\ = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_m=k} F^k_{i_1 i_2 \ldots i_m}(0, 0, \ldots, 0) \prod_{j=1}^{m} \frac{\Gamma(\lambda_j+1)}{\Gamma(\lambda_j+i_j+1)} \end{gathered} \tag{VI}$$

— полином степени n, а $P_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ — линейная комбинация коэффициентов $b_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ таких, что $j_1 \leqslant i_1, j_2 \leqslant i_2, \ldots, j_m \leqslant i_m$, $j_1+j_2+\cdots+j_m < i_1+i_2+\cdots+i_m$. Совокупность чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ является нулем полинома (VI), причем не существует других нулей вида $(\lambda_1+i_1, \lambda_2+i_2, \ldots, \lambda_m+i_m)$ с целыми неотрицательными $i_1, i_2, \ldots, i_m$. Иначе говоря, ни один полином $Q(\lambda_1+ +i_1, \lambda_2+i_2, \ldots, \lambda_m+i_m)$ из квадратных скобок в (V) не обращается в нуль.

В дальнейших исследованиях от этих ограничений освобождаемся. Построим все решения, соответствующие нулю $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$, допуская, что для некоторых целых значений $i_1, i_2, \ldots, i_m$ полином из (V) $Q(\lambda_1+i_1, \lambda_2+ +i_2, \ldots, \lambda_m+i_m)$ обращается в нуль.

2. Исследования проведем для двух независимых комплексных переменных, которые обозначим через z и w. В этом случае уравнение (I) принимает вид

$$L(u)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}F_{j,k-j}(z,\ w)\,z^j\,w^{k-j}\,\frac{\partial^k u}{\partial z^j\,\partial w^{k-j}}=0, \tag{1}$$

и, соответственно, характеристический полином

$$Q(\lambda,\ \mu)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}F_{j,k-j}(0,\ 0)\,\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+j+1)}\;\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+k-j+1)}\,. \tag{2}$$

Очевидно, существует бесконечное множество пар чисел, которые являются нулями полинома (2), но в силу условия

$$\sum_{j=0}^{n}F_{j,n-j}(0,\ 0)\,\eta_1^j\,\eta_2^{k-j}\neq 0, \tag{3}$$

при $\eta_1\geqslant 0$, $\eta_2\geqslant 0$ с $\eta_1+\eta_2=1$, которое мы и утверждаем, существует лишь конечное число нулей вида $(\lambda+t_i,\ \mu+s_i)$, где t_i и s_i — целые неотрицательные числа. Покажем это.

Оценим снизу $Q(\lambda+p,\ \mu+q)$, когда $p+q\to\infty$.

$$Q(\lambda+p,\ \mu+q)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}a_{00}^{(j,\,k-j)}\,\frac{\Gamma(\lambda+p+1)}{\Gamma(\lambda+p+j+1)}\;\frac{\Gamma(\mu+q+1)}{\Gamma(\mu+q+k-j+1)}=$$

$$=\sum_{j=0}^{n}a_{00}^{(j,\,n-j)}\,\frac{\Gamma(\lambda+p+1)}{\Gamma(\lambda+p+j+1)}\;\frac{\Gamma(\mu+q+1)}{(\Gamma(\mu+q+k-j+1)}+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}a_{00}^{(j,\,k-j)}\,\frac{\Gamma(\lambda+p+1)}{\Gamma(\lambda+p+j+1)}\;\frac{\Gamma(\mu+q+1)}{\Gamma(\mu+q+k-j+1)}=$$

$$=A_n(\lambda+p,\ \mu+q)+\sum_{\nu=0}^{n-1}A_\nu(\lambda+p,\ \mu+q),$$

где A_ν, $\nu=0,\ 1,\ \ldots,\ n$ — однородные полиномы степени ν.

Дальше имеем:

$$|Q(\lambda+p,\ \mu+q)|\geqslant\left|\,|A_n(\lambda+p,\ \mu+q)|-\left|\sum_{\nu=0}^{n-1}A_\nu(\lambda+p,\ \mu+q)\right|\,\right|=$$

$$=|\lambda+\mu+p+q|^n\left|\,\left|A_n\left(\frac{\lambda+p}{\lambda+\mu+p+q},\ \frac{\mu+q}{\lambda+\mu+p+q}\right)\right|-\right.$$

$$\left.-\left|\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{1}{(\lambda+\mu+p+q)^{n-\nu}}\,A_\nu\left(\frac{\lambda+p}{\lambda+\mu+p+q},\ \frac{\mu+q}{\lambda+\mu+p+q}\right)\right|\,\right|.$$

Полагаем:

$$\frac{\lambda+p}{\lambda+\mu+p+q}=\eta_1,\qquad \frac{\mu+q}{\lambda+\mu+p+q}=\eta_2.$$

Первое слагаемое

$$|A_n(\eta_1, \eta_2)| = \sum_{j=0}^{n} F_{j,\,n-j}(0,\ 0)\ \eta_1^j\,\eta_2^{n-j}$$

по условию (3) имеет положительный минимум на $\eta_1+\eta_2=1$ для $\eta_1 \geqslant 0$, $\eta_2 \geqslant 0$, второе же, при возрастании $p+q$, стремится к нулю. Следовательно, существует такое число N, что при $p+q>N$,

$$|Q(\lambda+p,\ \mu+q)| > \beta(p+q), \qquad \beta=\mathrm{const}.$$

Итак, нули полинома (2) вида $(\lambda+p,\ \mu+q)$ могут быть лишь при $p \leqslant N$ и $q \leqslant N$.

Мы будем строить решения, соответствующие нулю $(\lambda_0,\ \mu_0)$ полинома $Q(\lambda,\ \mu)$, причем $(\lambda_0+t_i,\ \mu_0+s_i)$, $i=0,\ 1,\ \ldots$ тоже нули этого полинома. Как видно из (V), при определении коэффициентов решения, приходится выполнять деление на $Q(\lambda_0+p,\ \mu_0+q)$, $p=0,\ 1,\ \ldots,\ q=0,\ 1,\ \ldots$ и затруднения могут появиться лишь тогда, когда знаменатель обращается в нуль, т. е. когда $p=t_i$, $q=s_i$. Нули $(\lambda_0+t_i,\ \mu_0+s_i)$ распределим на группы. Введем обозначения: $Q(\lambda_0+p,\ \mu_0+q)=Q_{pq}$, если $(\lambda_0+p,\ \mu_0+q)$ не является нулем полинома, и $Q(\lambda_0+p,\ \mu_0+q)=Q_{pq}^k$, если $(\lambda_0+p,\ \mu_0+q)$ является нулем полинома. Индекс k означает номер группы нулей.

Теперь составим таблицу, где p растет по строкам, а q растет по столбцам. Пишем Q_{pq}^1, если $Q(\lambda_0+p,\ \mu_0+q)=0$ и нет больше нулей при возрастании p и q. Образно говоря, нет других нулей в правом нижнем углу от рассматриваемого нуля. Будем писать Q_{pq}^2, если от него в правом нижнем углу имеются лишь нули первой группы, Q_{pq}^3 если в правом нижнем углу от него имеются только нули первой и второй групп, и так далее. Углы для нулей первой группы обозначены пунктиром.

$$\begin{array}{cccccc}
Q_{00}^5 & Q_{10} & Q_{20}^2 & Q_{30} & Q_{40} & Q_{50}^1\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
Q_{01}^4 & Q_{11}^3 & Q_{21} & Q_{31} & Q_{41} & Q_{51}\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
Q_{02} & Q_{12}^2 & Q_{22}^1 & Q_{32} & Q_{42} & Q_{52}\ \cdot \\
Q_{03}^1 & Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & Q_{43} & Q_{53}\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
Q_{04} & Q_{14} & Q_{24} & Q_{34} & Q_{44} & Q_{54}\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{array}$$

. . . .

Не прибегая к таблице, нули распределить на группы следует таким образом. Для каждого нуля $(\lambda_0+t_i,\ \mu_0+s_i)$ находим суммы $t_i+s_i=A_\gamma$, причем $A_1>A_2>\cdots>A_p$, кроме того, введем обозначение $(\lambda_0+t_{i\gamma},\ \mu_0+s_{i\gamma})$, $\gamma=1,\ 2,\ \ldots,\ p$.

Нули к первой группе отнесем по такому правилу:

а) все $(\lambda_0+t_{i1},\ \mu_0+s_{i1})$

б) те $(\lambda_0+t_{i2},\ \mu_0+s_{i2})$, для которых $(t_{ij}-t_{i2})\ (s_{ij}-s_{i2})<0$ при $j=1$,

в) те $(\lambda_0+t_{i3},\ \mu_0+s_{i3})$, для которых $(t_{ij}-t_{i3})\ (s_{ij}-s_{i3})<0$ при $j=1,\ 2$,

г) те $(\lambda_0+t_{i4},\ \mu_0+s_{i4})$, для которых $(t_{ij}-t_{i4})\ (s_{ij}-s_{i4})<0$ при $j=1,\ 2,\ 3$,

. . . . ,

. . . . ,

и так далее, пока не будут исчислены все нули.

После того, как нули первой группы выбраны, это правило применяем к оставшимся нулям. Пусть теперь $A_{k+1}>A_{k+2}>\cdots>A_p$. Нулями второй группы будут нули:

а) все $(\lambda_0+t_{ik+1},\ \mu_0+s_{ik+1})$

б) те $(\lambda_0+t_{ik+2},\ \mu_0+s_{ik+2})$, для которых $(t_{ik+j}-t_{ik+2})\ (s_{ik+j}-s_{ik+2})<0$, при $j=1$,

в) те $(\lambda_0+t_{ik+3},\ \mu_0+s_{ik+3})$, для которых $(t_{ik+j}-t_{ik+3})\ (s_{ik+j}-s_{ik+3})<0$, при $j=1,\ 2$,

. . . . ,

и так далее.

Затем, таким же путем определяем третью и остальные группы. Очевидно, в последней ν-той группе останется единственный нуль $(\lambda_0,\ \mu_0)$ и $\nu\leqslant p$.

Как выяснится из нижеизложенного, решения, соответствующие нулям одной и той же группы, строятся одинаково и имеют одинаковую форму. Предположим сначала, что в каждой группе имеется только по одному нулю. Нуль первой группы обозначим $(\lambda_0+t_0,\ \mu_0+s_0)$, второй группы $(\lambda_0+t_1,\ \mu_0+s_1)$ и, продолжая таким образом, ν-той группы — $(\lambda_0+t_{\nu-1},\ \mu_0+s_{\nu-1})$. Согласно сказанному выше, удовлетворяются следующие неравенства:

$$(t_i-t_j)\ (s_i-s_j)<0$$

для всех $i=0,\ 1,\ \ldots,\ \nu-2$ и $j=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu-1$ при $i<j$.

3. Далее сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема. *Пусть в уравнении с частными производными*

$$L(u)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}F_{j,\,k-j}(z,\ w)\ z^j\,w^{k-j}\,\frac{\partial^k u}{\partial z^j\,\partial w^{k-j}}=0, \tag{1}$$

где $F_{j,\,k-j}(z,\ w)$ — аналитические функции в бицилиндре $|z|<R$, $|w|<R$, однородная форма

$$\sum_{j=0}^{n}F_{j,\,n-j}(0,\ 0)\ \eta_1^j\,\eta_2^{n-j} \tag{3}$$

не обращается в нуль при $\eta_1\geqslant 0$, $\eta_2\geqslant 0$ с $\eta_1+\eta_2=1$. Пусть характеристический полином

$$Q(\lambda,\ \mu)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}F_{j,k-j}(0,\ 0)\ \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+j+1)}\ \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+k-j+1)} \tag{2}$$

удовлетворяет условиям

$$\left.\frac{\partial^{\zeta_\tau+\delta_\tau} Q(\lambda+t_\tau,\ \mu+s_\tau)}{\partial\lambda^{\zeta_\tau}\,\partial\mu^{\delta_\tau}}\right|_{\substack{\lambda=\lambda_0\\ \mu=\mu_0}}=0,$$

для $\zeta_\tau=0,\ 1,\ \ldots,\ \alpha_\tau,\ \delta_\tau=0,\ 1,\ \ldots,\ \beta_\tau$ *с* $\alpha_\tau+\beta_\tau+1$*-ой производной не равной нулю, и имеет* ν *групп нулей вида* $(\lambda_0+t_\tau,\ \mu_0+s_\tau)$, *где* t_τ и s_τ *целые неотрицательные числа, а* $\tau=0,\ 1,\ \ldots,\ \nu-1$. *Тогда уравнение* (1) *имеет систему линейно независимых решений вида*

$$u_{\tau\sigma}=\sum_{\gamma=0}^{\tau} z^{\lambda_0+t_\tau-\gamma}\,w^{\mu_0+s_\tau-\gamma}\ln^{\alpha_\gamma} z\,\ln^{\beta_\gamma} w\,\times$$

$$\times\sum_{i=0}^{\zeta_\tau}\sum_{j=0}^{\delta_\tau}\Phi^{(ij)}_{\tau\sigma\gamma}(z,\ w)\ln^{\zeta_\tau-i} z\,\ln^{\delta_\tau-j} w,\qquad \sigma=1,\ 2,\ \ldots,\ 2^\tau, \tag{1a}$$

где α_γ *и* β_γ — *целые неотрицательные числа, удовлетворяющие условиям:* $\alpha_\gamma+\beta_\gamma=\gamma,\ \alpha_{\gamma+1}-\alpha_\gamma$ *равно или* 0, *или* 1.

Функции $\Phi^{(ij)}_{\tau\sigma\gamma}(z,\ w)$ *аналитические в некоторой окрестности начала координат. В частности, если* $F_{j,\,k-j}(z,\ w)\equiv\mathrm{const}$, *а остальные коэффициенты дифференциального уравнения* (1) *целые функции, то и* $\Phi^{(ij)}_{\tau\sigma\gamma}(z,\ w)$ *тоже целые.*

Доказательство. Предположим, что

$$\frac{\partial Q(\lambda_0+t_\tau,\ \mu_0+s_\tau)}{\partial\lambda}\neq 0,\qquad \frac{\partial Q(\lambda_0+t_\tau,\ \mu_0+s_\tau)}{\partial\mu}\neq 0.$$

Решение уравнения (1), соответствующее показателю первой группы, построено в [2]. Оно соответствует значению $\tau=0$ и имеет форму

$$u_{01}=z^{\lambda_0+t_0}\,w^{\mu_0+s_0}\,\Phi_{010}(z,\ w), \tag{4}$$

где

$$\Phi_{010}(z,\ w)=\sum_{i+j=0}^{\infty} a^{(010)}_{ij}\,z^i\,w^j$$

сходится равномерно в некоторой окрестности начала координат.

Теперь построим решения при $\tau=1$, т. е. соответствующие показателю второй группы. Решение будем строить в одной из форм:

$$u_{11}=z^{\lambda_0+t_1}\,w^{\mu_0+s_1}\,\Phi_{110}(z,\ w)+z^{\lambda_0+t_0}\,w^{\mu_0+s_0}\,\Phi_{111}(z,\ w)\ln z, \tag{a}$$

или

$$u_{12}=z^{\lambda_0+t_1}\,w^{\mu_0+s_1}\,\Phi_{120}(z,\ w)+z^{\lambda_0+t_0}\,w^{\mu_0+s_0}\,\Phi_{121}(z,\ w)\ln w. \tag{b}$$

Для краткости записи введем следующее обозначение:

$$L\left(z^{\lambda_0+t_\tau}\,w^{\mu_0+s_\tau}\,\Phi_{\tau\sigma\gamma}(z,\ w)\right)=Q(\lambda_0+t_\tau,\ \mu_0+s_\tau)\,a^{\tau\sigma\gamma}_{00}\,z^{\lambda_0+t_\tau}\,w^{\mu_0+s_\tau}+$$

$$+\left[Q(\lambda_0+t_\tau+1,\ \mu_0+s_\tau)\,a^{\tau\sigma\gamma}_{10}+P^{\tau\sigma\gamma}_{10}\right]z^{\lambda_0+t_\tau+1}\,w^{\mu_0+s_\tau}+$$

$$+\left[Q(\lambda_0+t_\tau,\ \mu_0+s_\tau+1)\,a^{\tau\sigma\gamma}_{01}+P^{\tau\sigma\gamma}_{01}\right]z^{\lambda_0+t_\tau}\,w^{\mu_0+s_\tau+1}+\cdots=$$

$$=z^{\lambda_0+t_\tau}\,w^{\mu_0+s_\tau}\,F_{\tau\sigma\gamma}(z,\ w,\ \lambda_0,\ \mu_0).$$

Теперь рассмотрим форму (а). Имеем

$$L(u_{11}) = L\left(z^{\lambda_0+t_1} w^{\mu_0+s_1} \Phi_{110}(z, w)\right) + L\left(z^{\lambda_0+t_0} w^{\mu_0+s_0} \Phi_{111}(z, w) \ln z\right) = 0.$$

Учитывая, что

$$L\left(\frac{\partial}{\partial\lambda} z^\lambda f(z, w)\right) = L\left(z^\lambda f(z, w) \ln z\right) = \frac{\partial}{\partial\lambda} L\left(z^\lambda f(z, w)\right), \tag{5}$$

приходим к соотношению

$$L\left(z^{\lambda_0+t_1} w^{\mu_0+s_1} \Phi_{110}(z, w)\right) + z^{\lambda_0+t_0} w^{\mu_0+s_0} \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[F_{111}(z, w, \lambda, \mu)\right]_{\substack{\lambda=\lambda_0\\ \mu=\mu_0}} +$$

$$+ L\left(z^{\lambda_0+t_0} w^{\mu_0+s_0} \Phi_{111}(z, w)\right) \ln z = 0.$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при одинаковых степенях $\ln z$, получаем систему для определения функции $\Phi_{111}(z, w)$ и $\Phi_{110}(z, w)$.

$$L\left(z^{\lambda_0+t_0} w^{\mu_0+s_0} \Phi_{111}(z, w)\right) = 0,$$

$$L\left(z^{\lambda_0+t_1} w^{\mu_0+t_1} \Phi_{110}(z, w)\right) + z^{\lambda_0+t_0} w^{\mu_0+s_0} \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[F_{111}(z, w, \lambda, \mu)\right]_{\substack{\lambda=\lambda_0\\ \mu=\mu_0}} = 0.$$

Сравнивая с (4), видим, что

$$\Phi_{111}(z, w) \equiv \Phi_{010}(z, w),$$

а функцию $\Phi_{110}(z, w)$ определим в виде ряда из соотношения

$$z^{t_1} w^{s_1} F_{110}(z, w, \lambda_0, \mu_0) = -z^{t_0} w^{s_0} \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[F_{111}(z, w, \lambda, \mu)\right]_{\substack{\lambda=\lambda_0\\ \mu=\mu_0}}$$

или в развернутом виде

$$Q(\lambda_0+t_1, \mu_0+s_1)\, a_{00}^{110} z^{t_1} w^{s_1} + \left[Q(\lambda_0+t_1+1, \mu_0+s_1)\, a_{10}^{110} + P_{10}^{110}\right] z^{t_1+1} w^{s_1} +$$

$$+ \left[Q(\lambda_0+t_1, \mu_0+s_1+1)\, a_{01}^{110} + P_{01}^{110}\right] z^{t_1} w^{s_1+1} + \ldots =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{ Q(\lambda+t_0, \mu+s_0)\, a_{00}^{111} z^{t_0} w^{s_0} + \left[Q(\lambda+t_0+1, \mu+s_0)\, a_{10}^{111} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + P_{10}^{111}\right] z^{t_0+1} w^{s_0} + \left[Q(\lambda+t_0, \mu+s_0+1)\, a_{01}^{111} + P_{01}^{111}\right] z^{t_0} w^{s_0+1} + \ldots \right\}_{\substack{\lambda=\lambda_0\\ \mu=\mu_0}},$$

приравнивая к нулю коэффициенты при одинаковых степенях z и w.

Коэффициент a_{00}^{110} остается неопределенным и входит в качестве множителя в последующие коэффициенты, которые определяются единственным образом. Исключение составляет $a_{t_0 s_0}^{110}$, так как в выражении

$$a_{t_0 s_0}^{110} = -\frac{P_{t_0 s_0}^{110} + \dfrac{\partial}{\partial\lambda} Q(\lambda_0+t_0, \mu_0+s_0)\, a_{00}^{111}}{Q(\lambda_0+t_0, \mu_0+s_0)} \tag{6}$$

знаменатель $Q(\lambda_0+t_0, \mu_0+s_0)$ обращается в нуль. Пусть $P_{t_0 s_0}^{110} \neq 0$. Теперь подбираем неопределенные множители a_{00}^{111} или a_{00}^{110} так, чтобы и числитель стал равным нулю. Следовательно, $a_{t_0 s_0}^{110}$ остается неопределенным, и его можно выбрать произвольно. Если же $P^{110}_{t_0 s_0}=0$, то решения следует искать в той же форме, что и для нуля первой группы. Случай, когда

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} Q(\lambda_0+t_0,\ \mu_0+s_0)=0,$$

рассмотрим ниже.

Аналогично строится решение в виде (b). Только при определении коэффициента $a^{120}_{t_0 s_0}$ в (6) будет $\frac{\partial}{\partial\mu} Q(\lambda_0+t_0,\mu_0+s_0)$ вместо $\frac{\partial}{\partial\lambda} Q(\lambda_0+t_0,\mu_0+s_0)$.

При $\tau=2$ решение строим в форме

$$u_{2\sigma}=z^{\lambda_0+t_2}\, w^{\mu_0+s_2}\, \Phi_{2\sigma 0}(z,\ w)+\tilde{u}_{1\sigma}\ln z,$$

или

$$u_{2\sigma}=z^{\lambda_0+t_2}\, w^{\mu_0+s_2}\, \Phi_{2\sigma 0}(z,\ w)+\tilde{u}_{1\sigma}\ln w,$$

где $\tilde{u}_{1\sigma}$ еще неопределенная функция, имеющая такую же структуру, как и $u_{1\sigma}$. Таким образом, возможны четыре решения:

$$u_{21}=\varphi_0+\varphi_1\ln z+\varphi_2\ln^2 z, \tag{A}$$

$$u_{22}=\varphi_0+\varphi_1\ln z+\varphi_2\ln z\ \ln w,$$

$$u_{23}=\varphi_0+\varphi_1\ln w+\varphi_2\ln z\ln w,$$

$$u_{24}=\varphi_0+\varphi_1\ln w+\varphi_2\ln^2 w.$$

Вообще $u_{\tau\sigma}$ имеет 2^τ различных решения. Так как их построение аналогичное, то рассмотрим вид (A).

$$u_{21}=z^{\lambda_0+s_2}\, w^{\mu_0+s_2}\, \Phi_{210}(z,\ w)+$$
$$+z^{\lambda_0+s_1}\, w^{\mu_0+t_1}\, \Phi_{211}(z,\ w)\ln z+z^{\lambda_0+t_0}\, w^{\mu_0+s_0}\, \Phi_{212}(z,\ w)\ \ln^2 z.$$

Замечая, что

$$L\left(\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\left(z^\lambda f(z,\ w)\right)\right)=L\left(z^\lambda f(z,\ w)\ \ln^2 z\right)=\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\ L\left(z^\lambda f(z,\ w)\right),$$

и учитывая (5), можем записать

$$L(u_{21})=L\left(z^{\lambda_0+t_2}\, w^{\mu_0+s_2}\, \Phi_{210}(z,\ w)\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[L\left(z^{\lambda+t_1}\, w^{\mu+s_1}\, \Phi_{211}(z,\ w)\right)\right]_{\substack{\lambda=\lambda_0\\ \mu=\mu_0}}+\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\left[L\left(z^{\lambda+t_0}\, w^{\mu+s_0}\, \Phi_{212}(z,\ w)\right)\right]_{\substack{\lambda=\lambda_0\\ \mu=\mu_0}}=0.$$

Отсюда имеем

$$L\left(z^{\lambda_0+t_0}\, w^{\mu_0+s_0}\, \Phi_{212}(z,\ w)\ \ln^2 z+\left[z^{\lambda_0+t_1}\, w^{\mu_0+s_1}\, F_{211}(z,\ w,\ \lambda_0,\ \mu_0)+\right.\right.$$
$$\left.+2\, z^{\lambda_0+t_0}\, w^{\mu_0+s_0}\, \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(F_{212}(z,\ w,\ \lambda,\ \mu)\right)_{\substack{\lambda=\lambda_0\\ \mu=\mu_0}}\right]\ln z+$$
$$+z^{\lambda_0+t_2}\, w^{\mu_0+s_2}\, F_{210}(z,\ w,\ \lambda_0,\ \mu_0)+z^{\lambda_0+t_1}\, w^{\mu_0+s_1}\, \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(F_{211}(z,\ w,\ \lambda,\ \mu)\right)_{\substack{\lambda=\lambda_0\\ \mu=\mu_0}}+$$
$$+z^{\lambda_0+t_0}\, w^{\mu_0+s_0}\, \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\left(F_{212}(z,\ w,\ \lambda,\ \mu)\right)_{\substack{\lambda=\lambda_0\\ \mu=\mu_0}}=0.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\ln z$, получаем систему для определения функции $\Phi_{212}(z, w)$, $\Phi_{211}(z, w)$ и $\Phi_{210}(z, w)$:

$$L\left(z^{\lambda_0+t_0} w^{\mu_0+s_0} \Phi_{212}(z, w)\right)=0,$$

$$z^{t_1} w^{s_1} F_{211}(z, w, \lambda_0, \mu_0)+2z^{t_0} w^{s_0} \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[F_{212}(z, w, \lambda, \mu)\right]_{\substack{\lambda=\lambda_0\\ \mu=\mu_0}}=0,$$

$$z^{t_2} w^{s_2} F_{210}(z, w, \lambda_0, \mu_0)+z^{t_1} w^{s_1} \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[F_{211}(z, w, \lambda, \mu)\right]_{\substack{\lambda=\lambda_0\\ \mu=\mu_0}}+$$
$$+z^{t_0} w^{s_0} \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\left[F_{212}(z, w, \lambda, \mu)\right]_{\substack{\lambda=\lambda_0\\ \mu=\mu_0}}=0.$$

Сравнивая с (4) видим, что

$$\Phi_{212}(z, w)\equiv\Phi_{010}(z, w).$$

Построение функции $\Phi_{211}(z, w)$ производится таким же путем, как построили функцию $\Phi_{110}(z, w)$.

Функцию $\Phi_{210}(z, w)$ определяем из третьего уравнения системы. Здесь знаменатель обращается в нуль при вычислениях $a^{210}_{t_1 s_1}$ и $a^{210}_{t_0 s_0}$, которые имеют выражения:

$$a^{210}_{t_1 s_1}=-\frac{P^{210}_{t_1 s_1}+\frac{\partial}{\partial\lambda} Q(\lambda_0+t_1, \mu_0+s_1)\, a^{211}_{00}}{Q(\lambda_0+t_1+\mu_0+s_1)},$$

$$a^{210}_{t_0 s_0}=-\frac{P^{210}_{t_0 s_0}+\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[Q(\lambda+t_0, \mu+s_0)\, a^{211}_{t_0 s_0}+P^{211}_{t_0 s_0}\right]_{\substack{\lambda=\lambda_0\\ \mu=\mu_0}}+\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} Q(\lambda_0+t_0, \mu_0+s_0)\, a^{212}_{00}}{Q(\lambda_0+t_0, \mu_0+s_0)}.$$

Коэффициент $a^{210}_{t_1 s_1}$ определяем таким же образом, как и $a^{110}_{t_0 s_0}$. Во втором выражении числитель обратим в нуль выбором неопределенного слагаемого $\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[Q(\lambda+t_0, \mu+s_0)\, a^{211}_{t_0 s_0}+P^{211}_{t_0 s_0}\right]_{\substack{\lambda=\lambda_0\\ \mu=\mu_0}}$. Здесь тоже имеет место замечание об обращении в нуль $\frac{\partial Q}{\partial\lambda}$. Очевидно, обращение в нуль $\frac{\partial^2 Q}{\partial\lambda^2}$, при $\frac{\partial Q}{\partial\lambda}\neq 0$, на форму решения не влияет. Получение всех остальных коэффициентов a^{210}_{pq} трудностей не представляет.

Идя таким путем, построим решения $u_{3\sigma}, u_{4\sigma}, \ldots, u_{\nu-1,\sigma}$.

Вначале мы предполагали, что в каждой группе имеется лишь по одному нулю. Если бы имелось по нескольку нулей в группах, объем работы, безусловно, увеличился бы, хотя ее последовательность осталась бы той же. Как пример рассмотрим построение решений, когда нули расположены по вышеприведенной таблице.

Следуя изложенному, работу выполняем так. Сперва построим решения, соответствующие всем нулям первой группы.

$$u^1_{01}=z^{\lambda_0+5} w^{\mu_0} \Phi^1_{010}(z, w) \text{ для нуля } (\lambda_0+5, \mu_0),$$
$$u^2_{01}=z^{\lambda_0+2} w^{\mu_0+2} \Phi^2_{010}(z, w) \text{ для нуля } (\lambda_0+2, \mu_0+2),$$
$$u^3_{01}=z^{\lambda_0} w^{\mu_0+3} \Phi^3_{010}(z, w) \text{ для нуля } (\lambda_0, \mu_0+3).$$

Решения, соответствующие нулям второй группы, будут такие: для нуля $(\lambda_0+2,\ \mu_0)$:

$$u_{11}^1 = z^{\lambda_0+2}\ w^{\mu_0}\ \Phi_{110}^1(z,\ w) + \left(z^{\lambda_0+5}\ w^{\mu_0}\ \Phi_{010}^1(z,\ w) + z^{\lambda_0+2}\ w^{\mu_0+2}\ \Phi_{010}^2(z,\ w)\right)\ln z,$$

$$u_{12}^1 = z^{\lambda_0+2}\ w^{\mu_0}\ \Phi_{120}^1(z,\ w) + \left(z^{\lambda_0+5}\ w^{\mu_0}\ \Phi_{010}^1(z,\ w) + z^{\lambda_0+2}\ w^{\mu_0+2}\ \Phi_{010}^2(z,\ w)\right)\ln w;$$

для нуля $(\lambda_0+1,\ \mu_0+2)$:

$$u_{11}^2 = z^{\lambda_0+1}\ w^{\mu_0+2}\ \Phi_{110}^2(z,\ w) + z^{\lambda_0+2}\ w^{\mu_0+2}\ \Phi_{010}^2(z,\ w)\ln z,$$

$$u_{12}^2 = z^{\lambda_0+1}\ w^{\mu_0+2}\ \Phi_{120}^2(z,\ w) + z^{\lambda_0+2}\ w^{\mu_0+2}\ \Phi_{010}^2(z,\ w)\ln w.$$

Возможны еще два решения:

$$U_{11}^1 = z^{\lambda_0+2}\ w^{\mu_0}\ \Phi_{1a0}^1(z,\ w) + z^{\lambda_0+5}\ w^{\mu_0}\ \Phi_{010}^1(z,\ w)\ln z +$$
$$+ z^{\lambda_0+2}\ w^{\mu_0+2}\ \Phi_{010}^2(z,\ w)\ln w,$$

$$U_{12}^1 = z^{\lambda_0+2}\ w^{\mu_0}\ \Phi_{1b0}^1(z,\ w) + z^{\lambda_0+5}\ w^{\mu_0}\ \Phi_{010}^1(z,\ w)\ln w +$$
$$+ z^{\lambda_0+2}\ w^{\mu_0+2}\ \Phi_{010}^2(z,\ w)\ln z.$$

Однако очевидно, что $u_{11}^1 + u_{12}^1 = U_{11}^1 + U_{12}^1$.

Точно также строятся решения для остальных нулей.

4. При построении решения уравнения (1) мы не рассматривали случая, когда имеются кратные корни. Пусть, как и сказано в теореме, характеристический полином (2) удовлетворяет условиям:

$$\left.\frac{\partial^{\zeta_\tau+\delta_\tau} Q(\lambda+t_\tau,\ \mu+s_\tau)}{\partial\lambda^{\zeta_\tau}\,\partial\mu^{\delta_\tau}}\right|_{\substack{\lambda=\lambda_0\\ \mu=\mu_0}} = 0, \tag{7}$$

при $\zeta_\tau = 0,\ 1,\ \ldots,\ \alpha_\tau,\quad \delta_\tau = 0,\ 1,\ \ldots,\ \beta_\tau$ и $\tau = 0,\ 1,\ \ldots,\ \nu-1$.

Решения строим последовательно для нулей каждой группы. При $\tau = 0$ решения ищем в виде

$$\bar{u}_0 = z^{\lambda+t_0}\ w^{\mu+s_0}\ \Phi_{010}(z,\ w),$$

где

$$\Phi_{000}(z,\ w) = \sum_{p+q=0}^{\infty} a_{pq}^{010}\ z^p\ w^q.$$

Подставляя в уравнение (1), имеем согласно (V)

$$L(\bar{u}_0) = Q(\lambda+t_0,\ \mu+s_0)\ a_{00}^{010}\ z^{\lambda+t_0}\ w^{\mu+s_0} +$$
$$+ \left[Q(\lambda+t_0+1,\ \mu+s_0)\ a_{10}^{010} + P_{10}^{010}\right] z^{\lambda+t_0+1}\ w^{\mu+s_0} +$$
$$+ \left[Q(\lambda+t_0,\ \mu+s_0+1)\ a_{01}^{010} + P_{01}^{010}\right] z^{\lambda+t_0}\ w^{\mu+s_0+1} + \ldots$$

Коэффициенты a_{pq}^{010}, при $p+q \geqslant 1$ выбираем так, чтобы квадратные скобки обратились в нуль. Тогда

$$L(\bar{u}_0) = Q(\lambda+t_0,\ \mu+s_0)\ a_{00}^{010}\ z^{\lambda+t_0}\ w^{\mu+s_0}. \tag{8}$$

Так как $Q(\lambda_0+t_0,\ \mu_0+s_0)=0$, то функция

$$\bar{u}_0\Big|_{(\lambda_0,\mu_0)}=u_{01}^{(0)}=z^{\lambda_0+t_0}\,w^{\mu_0+s_0}\sum_{p+q=0}^{\infty}[a_{pq}^{010}]_{\substack{\lambda=\lambda_0\\ \mu=\mu_0}}\,z^p\,w^q$$

является решением уравнения (1).

Теперь воспользуемся коммутативностью линейного дифференциального оператора $L(u)$ относительно дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}L(u)=L\left(\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right).$$

Дифференцируя соотношение (8) по λ, имеем

$$L\left(\frac{\partial\bar{u}_0}{\partial\lambda}\right)=\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}Q(\lambda+t_0,\ \mu+s_0)+Q(\lambda+t_0,\ \mu+s_0)\ln z\right]a_{00}^{010}\,z^{\lambda+t_0}\,w^{\mu+s_0}.$$

Согласно условию (7), при $\lambda=\lambda_0,\ \mu=\mu_0$

$$L\left(\frac{\partial\bar{u}_0}{\partial\lambda}\right)=0.$$

Таким образом, функция $\frac{\partial\bar{u}_0}{\partial\lambda}$ является решением уравнения (1) и имеет вид

$$\frac{\partial\bar{u}_0}{\partial\lambda}=z^{\lambda_0+t_0}\,w^{\mu_0+s_0}\sum_{p+q=0}^{\infty}\left[\frac{\partial a_{pq}^{010}}{\partial\lambda}\right]_{\substack{\lambda=\lambda_0\\ \mu=\mu_0}}z^p\,w^q+$$

$$+z^{\lambda_0+t_0}\,w^{\mu_0+s_0}\sum_{p+q=1}^{\infty}a_{pq}^{010}\,z^p\,w^q\ln z=u_{01}^{(1)}.$$

Продолжая таким путем рассуждения, построим решения $u_{01}^{(2)},\ u_{01}^{(3)},\ \ldots,\ u_{01}^{(\alpha_0+\beta_0)}$. Решение, построенное с учетом всех частных производных характеристического полинома (2) по λ и μ, обозначим $u_{01}^{\zeta_0+\delta_0}$ и оно имеет форму

$$u_{01}^{\zeta_0+\delta_0}=z^{\lambda_0+t_0}w^{\mu_0+s_0}\sum_{i=0}^{\zeta_0}\sum_{j=0}^{\delta_0}\Phi_{010}^{(ij)}(z,\ w)\ln^{\zeta-i}z\ln^{\delta-j}w,$$

где $\zeta_0=0,\ 1,\ \ldots,\ \alpha_0,\ \delta_0=0,\ 1,\ \ldots,\ \beta_0$, а $\Phi_{010}^{(ij)}(z,\ w)$ имеет вид

$$\Phi_{010}^{(ij)}(z,\ w)=\sum_{p+q=0}^{\infty}\left[\frac{\partial^{i+j}a_{pq}^{010}}{\partial\lambda^i\,\partial\mu^j}\right]_{\substack{\lambda=\lambda_0\\ \mu=\mu_0}}z^p\,w^q=\sum_{p+q=0}^{\infty}a_{pq}^{010,\,ij}\,z^p\,w^q.$$

Решения, соответствующие нулю второй группы, ищем в виде, рассмотренном в предыдущем пункте, а именно

$$\bar{u}_1=z^{\lambda+t_1}\,w^{\mu+s_1}\,\Phi_{100}(z,\ w)+\tilde{u}_{01}\ln z,$$

где $\tilde{u}_{01}$ — еще неопределенная функция, имеющая такую форму

$$\tilde{u}_{01}=z^{\lambda+t_0}\,w^{\mu+s_0}\sum_{i=0}^{\alpha_0}\sum_{j=0}^{\beta_0}\Phi_{010}^{(ij)}(z,\ w)\ln^{\alpha_0-i}z\ln^{\beta_0-j}w.$$

Дальше, дифференцируя по λ α_1 раз и по μ β_1 раз, строим решения аналогично изложенному в этом и в предыдущем пунктах.

Продолжая таким путем рассуждения, построим все решения, утверждаемые теоремой.

5. Теперь докажем равномерную сходимость функции $\Phi^{(ij)}_{\tau\sigma\gamma}(z, w)$. Доказательство следует провести в таком же порядке, как строим функции. Сперва докажем сходимость $\Phi^{(00)}_{010}(z, w)$. Эта функция совпадает с построенной в [2]. Там же дано доказательство о равномерной сходимости в некоторой окрестности начала координат. Ввиду того, что доказательство сходимости всех функций основывается на изложенном в [2], это изложение здесь кратко и приведем.

В отличие от принятых нами обозначений, ради упрощения, запишем

$$\Phi^{(00)}_{010}(z, w) = \sum_{p+q=0}^{\infty} b_{pq} z^p w^q,$$

где

$$b_{pq} = \frac{-\sum\limits_{s=0}^{p}\sum\limits_{t=0}^{q}\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{k}\left(a^{(j,\,k-j)}_{p-s,\,q-t} - a^{(j,\,k-j)}_{00}\right)\dfrac{\Gamma(\lambda_0+s+1)}{\Gamma(\lambda_0+s+j+1)}\,\dfrac{\Gamma(\mu_0+t+1)}{\Gamma(\mu_0+t+k-j+1)}\,b_{st}}{Q(\lambda_0+p,\ \mu_0+q)}. \tag{9}$$

Здесь $a^{(j,\,k-j)}_{pq}$ — коэффициенты ряда Тейлора функций $F_{j,\,k-j}(z, w)$.

Теперь оценим сверху числитель в (9). Пусть $M = \max|F_{j,\,k-j}(z, w)|$ в бицилиндре $|z| < R$, $|w| < R$ для всех $k = 0, 1, \ldots, n$, $j = 0, 1, \ldots, k$. По неравенству Коши

$$|a^{(j,\,k-j)}_{p-s,\,q-t}| < \frac{M}{R^{(p+q)-(s+t)}}.$$

Обозначив $\max\limits_{s+t=m}|b_{st}| = A_m$, $p+q=\nu$ и учитывая, что

$$\left|\frac{\Gamma(\lambda_0+s+1)}{\Gamma(\lambda_0+s+j+1)}\,\frac{\Gamma(\mu_0+t+1)}{\Gamma(\mu_0+t+k-j+1)}\right| < C_0(s+t)^k,\quad \sum_{k=0}^{n}(s+t)^k < C_1(s+t)^n,$$

где $C_0 = \mathrm{const}$ и $C_1 = \mathrm{const}$, имеем

$$\left|\sum_{s=0}^{p}\sum_{t=0}^{q}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\left(a^{(j,\,k-j)}_{p-s,\,q-t} - a^{(j,\,k-j)}_{00}\right)\frac{\Gamma(\lambda_0+s+1)}{\Gamma(\lambda_0+s+j+1}\,\frac{\Gamma(\mu_0+t+1)}{\Gamma(\mu_0+t+k-j+1)}\,b_{st}\right| <$$

$$< \frac{M C_0 C_1}{R^\nu}\sum_{m=1}^{\nu-1} R^m m^n A_m.$$

Для оценки знаменателя снизу имеем неравенство

$$|Q(\lambda_0+p,\ \mu_0+q)| > \beta\nu^n,\quad \beta > 0 = \mathrm{const}.$$

Таким образом,

$$|b_{pq}| < \frac{C}{R^\nu}\sum_{m=1}^{\nu-1} R^m\left(\frac{m}{\nu}\right)^n A_m. \tag{10}$$

Полагая $A_m = \left(\frac{B}{R}\right)^m$ для всех $m = 1, 2, \ldots, \nu - 1$, где $\beta > 1$ приходим к неравенству

$$A_\nu < \left(\frac{B}{R}\right)^\nu.$$

Итак, при $|w| = r$;

$$|\Phi_{010}^{00}(z, w)| = \left|\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} b_{pq} z^p w^q\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{p=0}^{\infty}\left[\sum_{q=0}^{\infty}\left(\frac{B}{R}\right)^{p+q} r^q\right]|z|^p = \frac{R}{R - Br}\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{B}{R}\right)^p |z|^p.$$

Таким образом, при $|z| < \frac{R}{B}$ и $|w| < \frac{R}{B}$ ряд сходится равномерно и представляет аналитическую функцию.

6. Рассмотрим функции

$$\Phi_{010}^{(ij)}(z, w) = \sum_{p+q=0}^{\infty} a_{pq}^{010,\, ij} z^p w^q$$

при $i \geqslant 0$, $j \geqslant 0$, $i + j > 0$. Здесь

$$a_{pq}^{010,\, ij} = \left.\frac{\partial^{i+j} a_{pq}^{010}}{\partial\lambda^i\, \partial\mu^j}\right|_{\substack{\lambda=\lambda_0 \\ \mu=\mu_0}}$$

и, как видно из (9), является правильной рациональной функцией от λ и μ. При дифференцировании этой функции по λ по μ, степень знаменателя растет быстрее, чем степень числителя. Следовательно, приведенные оценки для коэффициентов в пункте 6 не ухудшаются. Значит, при $i = 0, 1, \ldots, \alpha_0$, $j = 0, 1, \ldots, \beta_0$, все функции $\Phi_{010}^{(ij)}(z, w)$ — аналитические в некоторой окрестности начала координат.

Теперь убеждаемся в аналитичности функций

$$\Phi_{\tau\sigma\mu}^{(ij)}(z, w) = \sum_{p+q=0}^{\infty} a_{pq}^{\tau\sigma\gamma,\, ij} z^p w^q,$$

когда $\tau = 1, 2, \ldots, \nu - 1$, $\gamma = 0, 1, \ldots, \tau$, а σ — натуральное число, удовлетворяющее условию $\sigma \leqslant 2^\tau$. В этом случае выражение коэффициентов отличается от (9) лишь тем, что к числителю прибавляется конечное число ограниченных слагаемых. От этого оценки, данные в п. 5, отличаются лишь на постоянный множитель. Таким образом, функции (11) аналитические в некоторой окрестности начала координат.

Рассмотрим случай, когда функции $F_{j,\,k-j}(z, w)$ целые, при $k = 0, 1, \ldots, n - 1$, $j = 0, 1, \ldots, k$ и $F_{j,\,n-j}(z, w) \equiv \mathrm{const}$. Теперь оценка улучшается, так как в числителе суммирование ведется до $n - 1$. Имеет место неравенство для всех ν

$$A_\nu < \frac{C}{\nu R^\nu}\sum_{m=1}^{\nu-1} R^m \left(\frac{m}{\nu}\right)^{n-1} A_m.$$

Положим $A_m < E\left(\frac{B}{R}\right)^m$, где $E = \text{const}$ и $B = 1 + q$, $q > 0$. Получаем

$$A_\nu < E\left(\frac{B}{R}\right)^\nu \frac{C(1+q)}{\nu q^2}.$$

Пусть ν_0 такое число, что $\frac{C(1+q)}{\nu q^2} < 1$ когда $\nu > \nu_0$. Выбираем теперь число E такое, чтобы было $A_\nu < E\left(\frac{B}{R}\right)^\nu$ для всех $\nu \leqslant \nu_0$. Тогда

$$A_\nu < E\left(\frac{B}{R}\right)^\nu.$$

При $|w| = r < \frac{R}{B}$ имеем

$$|\Phi_{010}^{(00)}(z, w)| = \left|\sum_{p+q=0}^{\infty} b_{pq} z^p w^q\right| \leqslant \frac{RE}{R - Br} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{B}{R}\right)^p |z|^p.$$

Таким образом, при $|z| < \frac{R}{B}$ и $|w| < \frac{R}{B}$ ряд сходится равномерно. Ввиду того, что B фиксированное число, а R произвольное, $\Phi_{010}^{(00)}(z, w)$ является целой функцией. Из рассуждений, приведенных в начале этого пункта, следует, что и все $\Phi_{\tau\sigma\gamma}^{(ij)}(z, w)$ тоже целые. Более подробные исследования даны в [2], в пунктах 4 и 5. Этим заканчиваем доказательство теоремы.

7. Теперь заметим, что мы нашли все линейно независимые решения уравнения (1), соответствующие показателям (λ_0, μ_0). Выражение (1*a*) не может содержать логарифмов более высоких степеней, чем рассмотренное нами. Действительно, предположим, что имеются два ,,простых" нуля (λ_0, μ_0) и $(\lambda_0 + i, \mu_0 + j)$, где $i \geqslant 0$, $j \geqslant 0$, при $i + j > 0$, являются целыми числами. В отличие от изложенного, решение ищем в виде

$$u = z^{\lambda_0} w^{\mu_0} \Phi_0(z, w) + z^{\lambda_0 + i} w^{\mu_0 + j} \Phi_1(z, w) \ln z + z^{\lambda_0 + i} w^{\mu_0 + j} \Phi_2(z, w) \ln^2 z.$$

Подставляя в дифференциальное уравнение, приходим к соотношению (в прежних обозначениях)

$$F_1(z, w, \lambda_0, \mu_0) + z\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big[F_2(z, w, \lambda, \mu)\Big]_{\substack{\lambda = \lambda_0 \\ \mu = \mu_0}} = 0,$$

что возможно лишь при $\Phi_2(z, w) \equiv 0$.

Полученные нами результаты распространяются и на уравнения с большим чем 2 числом независимых переменных, однако, из-за громоздкости записей, на этом останавливаться не будем.

Считаю своим приятным долгом поблагодарить доцента Ш. И. Стрелица за внимание к настоящей работе.

Вильнюсский Государственный педагогический институт

Поступило в редакцию 18.II.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Ш. И. Стрелиц, Аналог теоремы Фукса для решений линейных уравнений в частных производных, Мат. сб., т. 60 (102), № 2 (1963).
2. И. В. Киселюс, Аналитические решения одного класса линейных уравнений в частных производных, Лит. мат. сб., т. 5, № 1 (1965).

VIENOS TIESINIŲ LYGČIŲ SU DALINĖMIS IŠVESTINĖMIS KLASĖS SPRENDINIŲ SISTEMA

J. KISIELIUS

(*R e z i u m ė*)

Darbe įrodyta sekanti

Teorema. Sakysime, kad lygtyje su dalinėmis išvestinėmis

$$L(u)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}F_{j,\,k-j}(z,\ w)\,z^j w^{k-j}\frac{\partial^k u}{\partial z^j\,\partial w^{k-j}}=0,$$

kur $F_{j,\,k-j}(z,\ w)$ funkcijos reguliarios bicilindre $|z|<R$, $|w|<R$, homogeninė forma

$$\sum_{j=0}^{n}F_{j,\,n-j}(0,0)\,\eta_1^j\,\eta_2^{k-j}$$

nevirsta nuliumi, kai η_1 ir η_2 neigiami ir $\eta_1+\eta_2=1$. Tegu charakteringasis polinomas

$$Q(\lambda,\ \mu)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}F_{j,\,k-j}(0,\ 0)\,\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+j+1)}\,\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+k-j+1)}$$

tenkina sąlygas

$$\left.\frac{\partial^{\zeta_\tau+\delta_\tau}Q(\lambda+t_\tau,\ \mu+s_\tau)}{\partial\lambda^{\zeta_\tau}\,\partial\mu^{\delta_\tau}}\right|_{\substack{\lambda=\lambda_0\\ \mu=\mu_0}}=0\qquad(\zeta_\tau=0,\ 1,\ \ldots,\ \alpha_\tau\ \ \delta_\tau=0,\ 1,\ \ldots,\ \beta_\tau)$$

ir turi ν nulių pavidalo $(\lambda_0+t_\tau,\ \mu_0+s_\tau)$, kur t_τ ir s_τ sveiki neneigiami skaičiai, $\tau=0,\ 1,\ \ldots,\ \nu-1$ Tuomet egzistuoja sistema tiesiškai nepriklausomų sprendinių:

$$u_{\tau\sigma}=\sum_{\gamma=0}^{\tau}z^{\lambda_0+t_\tau-\gamma}\,w^{\mu_0+s_\tau-\gamma}\ln^\alpha z\,\ln^\beta w\sum_{i=0}^{\zeta_\tau}\sum_{j=0}^{\delta_\tau}\Phi_{\tau\sigma\gamma}^{(ij)}(z,\ w)\ln^{\zeta_\tau-i}z\ln^{\delta_\tau-j}w,$$

$$\sigma=1,\ 2,\ \ldots,\ \tilde{\Sigma}_\tau,$$

kur α ir β sveiki neneigiami skaičiai, tokie kad $\alpha+\beta=\gamma$.

Funkcijos $\Phi_{\tau\sigma\gamma}^{(ij)}(z,\ w)$ yra analizinės funkcijos koordinačių pradžios aplinkoje. Atskiru atveju, kai $F_{j,\,n-j}(z,\ w)\equiv\text{const}$, o visos kitos funkcijos $F_{j,\,k-j}(z,\ w)$, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$ sveikos, tai ir $\Phi_{\tau\sigma\gamma}^{(ij)}(z,\ w)$ sveikos funkcijos.

EIN SYSTEM VON LÖSUNGEN EINER KLASSE LINEAREN GLEICHUNGEN MIT PARTIELLEN ABLEITUNGEN

J. KISIELIUS

(*Z u s a m m e n f a s s u n g*)

In der vorliegenden Arbeit beweisen wir den folgenden

Satz. Es sei die homogene Form

$$\sum_{j=0}^{n}F_{j,\,n-j}(0,\ 0)\ \eta_1^j\ \eta_2^{n-j}$$

der partiellen Differentialgleichungen

$$L(u)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}F_{j,\,k-j}(z,\ w)\ z^j\,w^{k-j}\ \frac{\partial^k u}{\partial z^j\,\partial w^{k-j}}=0,$$

wo $F_{j,\,k-j}(z, w)$ reguläre Funktionen im Bizylinder $|z|<R$, $|w|<R$, sind, verschieden von Null für alle nichtnegative η_1, η_2 mit $\eta_1+\eta_2=1$. Charakteristisches Polynom

$$Q(\lambda, \mu)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} F_{j,\,k-j}(0, 0)\,\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+j+1)}\;\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+k-j+1)}$$

befriedigt folgende Bedingungen

$$\left.\frac{\partial^{\zeta_\tau+\delta_\tau} Q(\lambda+t_\tau, \mu+s_\tau)}{\partial\lambda^{\zeta_\tau}\,\partial\mu^{\delta_\tau}}\right|_{\substack{\lambda=\lambda_0\\ \mu=\mu_0}}=0 \qquad (\zeta_\tau=0, 1, \ldots, \alpha_\tau, \quad \delta_\tau=0, 1, \ldots, \beta_\tau)$$

und hat ν Wurzeln folgender Formen $(\lambda_0+t_\tau, \mu_0+s_\tau)$, wo t_τ und s_τ ganze nichtnegative Zahlen sind $(\tau=0, 1, \ldots, \nu-1)$. Dann existiert ein System linearunabhängiger Lösungen der Form

$$u_{\tau\sigma}=\sum_{\gamma=0}^{\tau} z^{\lambda_0+t_\tau-\gamma}\, w^{\mu_0+s_\tau-\gamma}\ln^\alpha z\,\ln^\beta w\sum_{i=0}^{\zeta_\tau}\sum_{j=0}^{\delta_\tau}\Phi_{\tau\sigma\gamma}^{(ij)}(z, w)\ln^{\zeta_\tau-i} z\,\ln^{\delta_\tau-j} w,$$

$$\sigma=1, 2, \ldots, 2^\tau,$$

wo α und β ganze nichtnegative Zahlen sind, und $\alpha+\beta=\gamma$.

$\Phi_{\tau\sigma\gamma}^{(ij)}(z, w)$ sind reguläre Funktionen in der Umgebung des Anfangspunktes des Koordinatensystems. Im besonderen Falle, wenn die Funktionen $F_{j,\,n-j}(z, w)\equiv\mathrm{const}$ und alle übrigen $F_{j,\,k-j}(z, w)$, $k=0, 1, \ldots, n-1$, ganze sind, sind $\Phi_{\tau\sigma\gamma}^{(ij)}(z, w)$ ganze Funktionen.