ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ

Л. А. ПЕТРОСЯН, Н. В. МУРЗОВ

Структура классических уравнений движения материальной точки позволяет исследовать встречающиеся в механике антагонистические задачи методами теории дифференциальных игр. Под дифференциальной игрой понимают многошаговый процесс с непрерывным временем, при котором каждый из участников игры непрерывно контролирует в соответствии со своими интересами изменение позиционной переменной.

Мы рассмотрим шесть моделей (три модели преследования и три модели перетягивания), не исчерпывающих, разумеется, всех возможных случаев применения теории игр, которые тем не менее включают в себя достаточно широкий класс задач.

1. Преследование с ограниченным временем $T \geqslant 0$

Преследование происходит в n-мерном евклидовом пространстве R^n. Две частицы – преследователь P и преследуемый E – с массами m_P и m_E в начальный момент времени $t=0$ находятся в точках $q^0=(q_1^0, \ldots, q_n^0) \in R^n$, $r^0=(r_1^0, \ldots, r_n^0) \in R^n$ и обладают импульсами $p^0=(p_1^0, \ldots, p_n^0) \in R^n$, $s^0=$ $=(s_1^0, \ldots, s_n^0) \in R^n$ соответственно. Игроки P и E перемещаются в R^n, имея возможность в каждый момент времени изменять направление прилагаемых сил, величины которых, вообще говоря, могут зависеть от местоположений игроков и их импульсов. На R^{4n} задана достаточно гладкая вещественная функция $U(q, p, r, s)$. Пусть $q(T)$, $p(T)$, $r(T)$, $s(T)$ – состояние нашей системы в момент времени $t=T$. Тогда целью P является максимизация величины

$$U[q(T), \quad p(T), \quad r(T), \quad s(T)],$$

а игрок E преследует противоположную цель.

При этом в каждый момент времени игроки имеют полную информацию о состоянии системы.

Дадим формальное определение игры.

Пусть $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{E}$ множества вектор-функций

$$\varphi(q, p, r, s, T) = [\varphi_1(q, p, r, s, T), \ldots, \varphi_n(q, p, r, s, T)]$$

и

$$\psi(q, p, r, s, T) = [\psi_1(q, p, r, s, T), \ldots, \psi_n(q, p, r, s, T)],$$

обладающих следующими свойствами:

$$1.\quad \sum_{i=1}^{n} [\varphi_i(q,\ p,\ r,\ s,\ T)]^2 = \Phi^2(q,\ p,\ r,\ s).$$

$$2.\quad \sum_{i=1}^{n} [\psi_i(q,\ p,\ r,\ s,\ T)]^2 = \Psi^2(q,\ p,\ r,\ s), \qquad (1.1)$$

где $\Phi \geqslant 0$ и $\Psi \geqslant 0$ – заданные функции.

3. При любых $\varphi \in \mathfrak{P}$ и $\psi \in \mathfrak{E}$ система уравнений

$$\dot{p}_i = \varphi_i(q,\ p,\ r,\ s,\ T) \qquad \dot{q}_i = \frac{1}{m_P} p_i$$

и

$$\dot{s}_i = \psi_i(q,\ p,\ r,\ s,\ T) \qquad \dot{r}_i = \frac{1}{m_E} s_i \qquad (1.2)$$

$$i = 1,\ \ldots,\ n$$

имеет единственное решение при любых начальных условиях q^0, p^0, r^0, s^0.

Множества вектор-функций $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{E}$ представляют собой множества стратегий P и E.

В ситуации $(\varphi,\ \psi)$, $\varphi \in \mathfrak{P}$, $\psi \in \mathfrak{E}$ функция выигрыша $K(q^0,\ p^0,\ r^0,\ s^0,\ \varphi,\ \psi)$ определяется следующим образом. Пусть $q(t)$, $p(t)$, $r(t)$, $s(t)$ – решение системы уравнений (1.2) в ситуации $(\varphi,\ \psi)$ при начальных условиях q^0, p^0, r^0, s^0. Тогда

$$K(q^0,\ p^0,\ r^0,\ s^0,\ \varphi,\ \psi) = U[q(T),\ p(T),\ r(T),\ s(T)],$$

где T – предписанная заранее продолжительность игры, а $U(q,\ p,\ r,\ s)$ – достаточно гладкая вещественная функция, заданная на R^{4n}.

Задав множества стратегий игроков и функцию выигрыша в каждой ситуации, мы определили некоторую игру преследования в нормальной форме. Обозначим ее через $\Gamma_T(q^0,\ p^0,\ r^0,\ s^0)$.

Предположим, что в игре $\Gamma_T(q,\ p,\ r,\ s)$ существует ситуация равновесия в чистых стратегиях и пусть

$$V(q,\ p,\ r,\ s,\ T) = \mathrm{val}\ \Gamma_T(q,\ p,\ r,\ s).$$

Пусть, далее, $q^*(t)$, $r^*(t)$ – оптимальные траектории игроков P и E, а $p^*(t)$, $s^*(t)$ – соответствующие импульсы вдоль оптимальных траекторий.

Исследуем изменение функции значения игры $V(q,\ p,\ r,\ s,\ T)$ вдоль $q^*(t)$, $p^*(t)$, $r^*(t)$, $s^*(t)$. Из принципа оптимальности (см. [1]) имеем

$$V[q^*(t),\ p^*(t),\ r^*(t),\ s^*(t),\ T-t] = U[q^*(T),\ p^*(T),\ r^*(T),\ s^*(T)] \qquad (1.3)$$

при всех $t \in [0,\ T]$.

Можно показать, что имеет место следующая

Лемма. *Если частные производные*

$$\frac{\partial V}{\partial q_i},\ \frac{\partial V}{\partial p_i},\ \frac{\partial V}{\partial r_i},\ \frac{\partial V}{\partial s_i},\ \frac{\partial V}{\partial T},\quad i = 1,\ \ldots,\ n,$$

существуют, то функция $V(q,\ p,\ r,\ s,\ T)$ удовлетворяет следующей системе дифференциально-экстремальных уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial T} - \frac{1}{\mu(1+\alpha)} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} p_i + \alpha \frac{\partial V}{\partial r_i} s_i\right) = \max_{\{\varphi\}} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial p_i} \varphi_i + \frac{\partial V}{\partial s_i} \psi_i^*\right) \quad (1.4)$$

при условии

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2 = \Phi^2 \tag{1.5}$$

и

$$\frac{\partial V}{\partial T} - \frac{1}{\mu(1+\alpha)} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} p_i + \alpha \frac{\partial V}{\partial r_i} s_i \right) = \min_{\{\psi\}} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial p_i} \varphi_i^* + \frac{\partial V}{\partial s_i} \psi_i \right) \tag{1.6}$$

при условии

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_i^2 = \Psi^2 \tag{1.7}$$

при начальном условии

$$V(q, p, r, s, T)|_{T=0} = U(q, p, s, r), \tag{1.8}$$

где $\alpha = \frac{m_p}{m_E}$, *а* $\mu = \frac{m_p m_E}{m_p + m_E}$ — *приведенная масса.*

Для определения максимума в (1.4) при условии (1.5) и минимума в (1.6) при условии (1.7) пользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа, что дает нам

$$\varphi_i^* = +\Phi \frac{\partial V}{\partial p_i} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial p_i} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}},$$

$$\psi_i^* = -\Psi \frac{\partial V}{\partial s_i} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial s_i} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{1.9}$$

$$i = 1, \ldots, n$$

Подставляя выражения для оптимальных стратегий (1.9) в (1.4) и (1.6), получаем уравнение

$$\frac{\partial V}{\partial T} - \frac{1}{\mu(1+\alpha)} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} p_i + \alpha \frac{\partial V}{\partial r_i} s_i \right) +$$

$$+ \Psi \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial s_i} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \Phi \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial p_i} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 0. \tag{1.10}$$

Таким образом, мы получили следующую теорему.

Теорема 1. *Для того, чтобы игра* $\Gamma_T(q, p, r, s)$ *имела непрерывно дифференцируемое значение в чистых стратегиях, необходимо, чтобы задача Коши для уравнения* (1.10) *при начальных условиях* (1.8) *имела решение.*

Теорема 2. *Пусть* $V(q, p, r, s, T)$ *является решением уравнения* (1.10) *при условии* (1.8) *и пусть функции* $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_n)$ *и* $\tilde{\psi} = (\tilde{\psi}_1, \ldots, \tilde{\psi}_n)$, *где*

$$\tilde{\varphi}_i = +\Phi \frac{\partial V}{\partial p_i} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial p_i} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}},$$

$$\tilde{\psi}_i = -\Psi \frac{\partial V}{\partial s_i} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial s_i} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$i = 1, \ldots, n$$

принадлежат множествам $\mathfrak{P}$ *и* $\mathfrak{E}$ *соответственно.*

Тогда

$$\operatorname{val} \Gamma_T(q, p, r, s) = V(q, p, r, s, T).$$

Доказательство. Докажем неравенство

$$K(q^0, p^0, r^0, s^0, \varphi, \tilde{\psi}) \leqslant K(q^0, p^0, r^0, s^0, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \leqslant K(q^0, p^0, r^0, s^0, \tilde{\varphi}, \psi) \quad (1.11)$$

для всех $\varphi \in \mathfrak{P}$ и $\psi \in \mathfrak{E}$.

Пусть $\tilde{q}(t)$, $\tilde{p}(t)$, $\tilde{r}(t)$, $\tilde{s}(t)$ решение системы (1.2) в ситуации $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ при начальных условиях q^0, p^0, r^0, s^0. Тогда

$$V[\tilde{q}(t), \quad \tilde{p}(t), \quad \tilde{r}(t), \quad \tilde{s}(t), \quad T-t] = c \quad (1.12)$$

для всех $t \in [0, T]$. Из (1.8) имеем

$$c = U[\tilde{q}(t), \quad \tilde{p}(t), \quad \tilde{r}(t), \quad \tilde{s}(t)]. \quad (1.13)$$

Из (1.12) и (1.13) получаем

$$V(q^0, p^0, r^0, s^0, T) = K(q^0, p^0, r^0, s^0, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}).$$

Докажем левую сторону неравенства (1.11). Пусть $\hat{q}(t)$, $\hat{p}(t)$, $\hat{r}(t)$, $\hat{s}(t)$ решение системы (1.2) в ситуации $(\varphi, \tilde{\psi})$ при начальных условиях q^0, p^0, r^0, s^0. Тогда из (1.4) имеем $\frac{dV}{dt} \leqslant 0$. Отсюда сразу следует, что

$$V[(\hat{q}(t), \quad \hat{p}(t), \quad \hat{r}(t), \quad \hat{s}(t), \quad T-t] \leqslant V(q^0, p^0, r^0, s^0, T) \quad (1.14)$$

для всех $t \in [0, T]$. Полагая в (1.14) $t = T$, получаем левую сторону неравенства (1.11). Аналогично доказывается и правая сторона неравенства (1.11).

2. Достижение границы за кратчайшее время

Рассматриваемая игра отличается от игры $\Gamma_T(q, p, r, s)$ только тем, что время игры T не фиксировано заранее, и функцией выигрыша, которая определяется следующим образом.

В $R^{4n} = \{q, p, r, s\}$ задано $(4n-1)$-мерное многообразие B. Пусть $l(t) = \{q(t), p(t), r(t), s(t)\}$ — решение системы (1.2) при начальных условиях q^0, p^0, r^0, s^0 в ситуации (φ, ψ).

Пусть, далее,

$$t_B = \min_{\{t\}} [l(t) \in B]. \quad (2.1)$$

Тогда

$$K(q^0, p^0, r^0, s^0, \varphi, \psi) = -t_B. \quad (2.2)$$

Обозначим полученную таким образом игру $\Gamma(q, p, r, s)$.

Предположим, что в игре $\Gamma(q, p, r, s)$ существует ситуация равновесия в чистых стратегиях φ^*, ψ^* и пусть

$$T(q, p, r, s) = \operatorname{val} \Gamma(q, p, r, s),$$

а $l^*(t)$ — решение системы уравнений (1.2) при начальных условиях $l^0 = \{q^0, p^0, r^0, s^0\}$ в ситуации равновесия.

Тогда из принципа оптимальности мы имеем

$$T[l^*(t)] = T(l^0) + t. \quad (2.3)$$

Лемма. *Если частные производные*

$$\frac{\partial T}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial T}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial T}{\partial r_i}, \quad \frac{\partial T}{\partial s_i}, \quad i=1, \ldots, n,$$

существуют, то функция $T(q, p, r, s)$ удовлетворяет следующей системе дифференциально-экстремальных уравнений

$$\max_{\{\varphi\}}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial p_i}\varphi_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial s_i}\psi_i^*\right] = -\left[-1 + \frac{1}{\mu(1+\alpha)}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}p_i + \alpha\frac{\partial T}{\partial r_i}s_i\right)\right] \tag{2.4}$$

при условии

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2 = \Phi^2 \tag{2.5}$$

и

$$\min_{\{\psi\}}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial p_i}\varphi_i^* + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial s_i}\psi_i\right] = -\left[-1 + \frac{1}{\mu(1+\alpha)}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}p_i + \alpha\frac{\partial T}{\partial r_i}s_i\right)\right] \tag{2.6}$$

при условии

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_i^2 = \Psi^2 \tag{2.7}$$

при граничном условии

$$T(q, p, r, s)/_B = 0.$$

Оптимальные стратегии в игре $\Gamma(q, p, r, s)$ имеют следующий вид:

$$\varphi_i^* = +\Phi\frac{\partial T}{\partial p_i}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial p_i}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{2.8}$$

$$\psi_i^* = -\Psi\frac{\partial T}{\partial s_i}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial s_i}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}. \quad i=1, \ldots, n \tag{2.9}$$

Теорема 3. *Для того, чтобы игра $\Gamma(q, p, r, s)$ имела непрерывно дифференцируемое значение в чистых стратегиях, необходимо, чтобы уравнение*

$$\Phi\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial p_i}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} - \Psi\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial s_i}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\frac{1}{\mu(1+\alpha)}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}p_i + \alpha\frac{\partial T}{\partial r_i}S_i\right) - 1 = 0 \tag{2.10}$$

при условии

$$T(q, p, r, s)/_B = 0 \tag{2.11}$$

имело решение.

Теорема 4. *Пусть функция $T(q, p, r, s) \leqslant 0$ является решением уравнения (2.10) при условии (2.11) и пусть φ^* и ψ^*, определяемые формально* *формулами* (2.8) *и* (2.9), *принадлежат множествам* $\mathfrak{P}$ *и* $\mathfrak{E}$ *соответственно. Тогда*

$$\mathrm{val}\,\Gamma(q, p, r, s) = T(q, p, r, s).$$

Доказательство теорем 3, 4 вполне аналогично доказательству теорем 1, 2.

3. Преследование со стохастическим временем

В рассматриваемой игре продолжительность игры T является случайной величиной с абсолютно непрерывной функцией распределения $F(t)$, плотностью $f(t)$ и множеством возможных значений в отрезке $[0, T_0]$. В остальном игра полностью совпадает с игрой $\Gamma_T(q, p, r, s)$. Мы будем ее обозначать через $\Gamma_f(q, p, r, s)$. В каждой ситуации (φ, ψ) при начальных условиях q, p, r, s математическое ожидание выигрыша P равно

$$\bar{U}_f(q, p, r, s, \varphi, \psi) = \int_0^{T_0} U[q(t), p(t), r(t), s(t)]\, f(t)\, dt, \tag{3.1}$$

где $q(t), p(t), r(t), s(t)$ – решение системы уравнений (1.2) при начальных условиях q, p, r, s.

Для каждого момента времени $t \in [0, T_0]$ определим семейство подыгр $\Gamma_f(q, p, r, s, t)$ игры $\Gamma_f(q, p, r, s)$.

Определение. Подыгрой $\Gamma_f(q, p, r, s, t)$ мы будем называть игру $\Gamma_{f_1}(q, p, r, s)$, в которой плотность распределения определяется следующим образом:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \leqslant x < t \\ \dfrac{f(x)}{\int_t^{T_0} f(x)\,dx}, & \text{если} \quad t \leqslant x \leqslant T_0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Очевидно, что математическое ожидание выигрыша в подыгре $\Gamma_f(q, p, r, s, t)$ в ситуации (φ, ψ) равно

$$\bar{U}_f(q, p, r, s, t, \varphi, \psi) = \frac{\int_t^{T_0} U[q(t), p(t), r(t), s(t)]\, f(t)\, dt}{\int_t^{T_0} f(t)\, dt}. \tag{3.3}$$

Пусть в подыгре $\Gamma_f(q, p, r, s, t)$ существует ситуация равновесия в чистых стратегиях φ^*, ψ^* и $q^*(t), p^*(t), r^*(t), s^*(t)$ – траектория системы в этой ситуации. Обозначим

$$V(q, p, r, s, t) = \mathrm{val}\,\Gamma_f(q, p, r, s, t).$$

Очевидно, что вдоль оптимальной траектории

$$V[q^*(t), p^*(t), r^*(t), s^*(t), t] = \frac{\int_t^{T_0} U[q^*(t), p^*(t), r^*(t), s^*(t)]\, f(t)\, dt}{\int_t^{T_0} f(t)\, dt}. \tag{3.4}$$

Лемма. *Если частные производные*

$$\frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial V}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial V}{\partial r_i}, \quad \frac{\partial V}{\partial s_i}, \quad \frac{\partial V}{\partial t}, \quad i=1, \ldots, n,$$

существуют, то функция $V(q, p, r, s, t)$ удовлетворяет следующей системе дифференциально-экстремальных уравнений

$$\max_{\{\varphi\}} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial V}{\partial p_i} \varphi_i + \frac{\partial V}{\partial s_i} \psi_i^*\right] = -\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{\mu(1+\alpha)} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} p_i + \alpha \frac{\partial V}{\partial r_i} s_i\right) -$$

$$- \frac{f(t)}{1-F(t)} \left[U(q, p, r, s) - V(q, p, r, s, t)\right] \tag{3.5}$$

при условии

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2 = \Phi^2 \tag{3.6}$$

и

$$\min_{\{\psi\}} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial V}{\partial p_i} \varphi_i^* + \frac{\partial V}{\partial s_i} \psi_j\right] = -\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{\mu(1+\alpha)} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} p_i + \alpha \frac{\partial V}{\partial r_i} s_i\right) -$$

$$- \frac{f(t)}{1-F(t)} \left[U(q, p, r, s) - V(q, p, r, s, t)\right], \tag{3.7}$$

при условии

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_i^2 = \Psi^2 \tag{3.8}$$

при начальном условии

$$V(q, p, r, s, t)\big|_{t=T_0} = U(q, p, r, s) \tag{3.9}$$

$\left(\text{здесь } F(t) = \int\limits_0^t f(t)\, dt\right)$.

Оптимальные стратегии определяются по следующим формулам:

$$\varphi_i^* = \Phi \frac{\partial V}{\partial p_i} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial p_i}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{3.10}$$

$$\psi_i^* = -\Psi \frac{\partial V}{\partial s_i} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial s_i}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}. \quad i=1, \ldots, n \tag{3.11}$$

Теорема 5. *Для того, чтобы игра $\Gamma_f(q, p, r, s, t)$ имела непрерывно дифференцируемое значение в чистых стратегиях, необходимо, чтобы задача Коши для уравнения*

$$\Phi\left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial p_i}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} - \Psi\left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial s_i}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\mu(1+\alpha)} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} p_i + \alpha \frac{\partial V}{\partial r_i} s_i\right) +$$

$$+ \frac{f(t)}{1-F(t)} \left[U(q, p, r, s) - V(q, p, r, s, t)\right] = 0 \tag{3.12}$$

при начальном условии (3.9) *имела решение.*

$$\mathrm{val}\, \Gamma_f(q, p, r, s, t) = V(q, p, r, s, t).$$

4. Перетягивание в поле внешних сил

В n-мерном евклидовом пространстве R^n задано $(n-1)$-мерное многообразие B и векторное поле сил $F(q, p, t) = \{F_1(q, p, t), \ldots, F_n(q, p, t)\}$. Частица ν массы m в начальный момент времени находится в точке $q^0 = (q_1^0, \ldots, q_n^0)$ и обладает импульсом $p^0 = (p_1^0, \ldots, p_n^0)$. Оно может перемещаться в R^n под действием поля сил F и сил, приложенных к ней игроками I и II. При этом целью игрока I является перевод частицы ν на многообразие B за кратчайшее время. Игрок II преследует противоположную цель. В каждый момент времени t игроки имеют информацию о местоположении частицы ν, ее импульсе и времени, прошедшем с момента начала игры.

Дадим формальное определение игры. Положим $T=[0, \infty]$. Пусть $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{E}$ множества вектор-функций

$$\varphi(q, p, t)=\{\varphi_1(q, p, t), \ldots, \varphi_n(q, p, t)\}$$

и

$$\psi(q, p, t)=\{\psi_1(q, p, t), \ldots, \psi_n(q, p, t)\},$$

обладающих следующими свойствами:

1. $\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i^2(q, p, t) = \Phi^2(q, p, t).$

2. $\sum\limits_{i=1}^{n} \psi_i^2(q, p, t) = \Psi^2(q, p, t),$ (4.1)

где $\Phi \geqslant 0$, $\Psi \geqslant 0$ заданные функции, $\Phi - \Psi > \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} F_i^2}$.

3. При любых $\varphi \in \mathfrak{P}$ и $\psi \in \mathfrak{E}$ система уравнений

$$\dot{p}_i = \varphi_i - \psi_i + F_i, \quad i=1, \ldots, n \tag{4.2}$$

имеет единственное решение при любых начальных условиях*) q^0, p^0 и заданном поле сил $F(q, p, t)=\{F_1(q, p, t), \ldots, F_n(q, p, t)\}$.

Множества $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{E}$ являются множествами стратегий игроков I и II.

В ситуации (φ, ψ), $\varphi \in \mathfrak{P}$, $\psi \in \mathfrak{E}$ при начальных условиях q^0, p^0 и заданном поле сил F функция выигрыша $K(q^0, p^0, \varphi, \psi, t_0)$ определяется следующим образом. Пусть $q(t)$ траектория частицы ν, полученная как решение системы уравнений (4.2) при начальных условиях q^0, p^0 в ситуации φ, ψ и при наличии внешнего поля сил $F(q, p, t)$.

Тогда, если

$$t_B = \min_{\{t\}} \{ q(t) \in B \},$$

то выигрыш равен

$$K(q^0, p^0, \varphi, \psi, t_0) = -t_B$$

(в случае, когда траектория $q(t)$ не пересекает B, $t_B = \infty$).

---

*) Начальные условия в момент времени $t=t_0$.

Обозначим получившуюся таким образом игру $\Gamma(q, p, F)$. Предположим, что в игре $\Gamma(q, p, F)$ существует ситуация равновесия и пусть

$$T(q, p, t) = \mathrm{val}\,\Gamma(q, p, F).$$

Проводя рассуждения, вполне аналогичные рассуждениям в задачах преследования 1 – 3, мы получаем следующую теорему.

Теорема 7. *Для того, чтобы игра $\Gamma(q, p, F)$ имела непрерывно дифференцируемое значение в чистых стратегиях, необходимо, чтобы задача Коши для уравнения*

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial p_i}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}(\Phi-\Psi)+\sum_{i=1}^{n}F_i\frac{\partial T}{\partial p_i}+\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}p_i\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial T}{\partial t}-1=0 \tag{4.5}$$

имела решение при начальном условии

$$T(q, p, t)/_B = 0. \tag{4.6}$$

При этом оптимальные стратегии определяются по формулам

$$\varphi_i^* = \Phi\frac{\partial T}{\partial p_i}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial p_i}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{4.7}$$

$$\psi_i^* = \Psi\frac{\partial T}{\partial p_i}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial p_i}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{4.8}$$

Теорема 8. *Пусть $T(q, p, t) \leqslant 0$ решение задачи Коши для уравнения* (4.5) *при начальном условии* (4.7) *и пусть функции $(\tilde\varphi_1, \ldots, \tilde\varphi_n)$, $(\tilde\psi_1, \ldots, \tilde\psi_n)$, формально определяемые по формулам* (4.7) *и* (4.8), *принадлежат соответственно множествам $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{E}$. Тогда*

$$\mathrm{val}\,\Gamma(q, p, F) = T(q, p, t).$$

5. Перетягивание с ограниченным временем

Рассматриваемая в этом пункте игра отличается от игры $\Gamma(q, p, F)$ тем, что в ней поле внешних сил отсутствует, продолжительность игры ограничена некоторым числом $T \geqslant 0$, функции $\Phi \geqslant 0$ и $\Psi \geqslant 0$ зависят от (q, p, T), и функцией выигрыша, которая определяется следующим образом.

На R^{2n} задана достаточно гладкая вещественная функция $U(q, p)$. Пусть $q(T)$, $p(T)$ местоположение и импульс частицы в момент времени $t = T$, тогда выигрыш в ситуации (φ, ψ) при начальных условиях q, p равен

$$U\big(q(T), p(T)\big).$$

Так же, как это делалось в задаче I в случае преследования, мы, исследуя поведение функции значения игры вдоль оптимальной траектории, получаем, что существование дифференцируемого значения игры в чистых стратегиях эквивалентно существованию решения задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial T}-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial q_i}p_i-(\Phi-\Psi)\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial p_i}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=0 \tag{5.1}$$

при начальном условии

$$V(q, p, T)/_{T=0} = U(q, p). \tag{5.2}$$

При этом оптимальные стратегии определяются по формулам

$$\varphi_i^* = \Phi \frac{\partial V}{\partial p_i} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial p_i} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \tag{5.3}$$

и

$$\psi_i^* = \Psi \frac{\partial V}{\partial p_i} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial p_i} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{5.4}$$

6. Перетягивание со стохастическим временем

В рассматриваемой игре продолжительность игры T является случайной величиной с абсолютно непрерывной функцией распределения $F(t)$, плотностью $f(t)$ и множеством возможных значений в отрезке $[0, T_0]$. В остальном игра полностью совпадает с игрой $\Gamma(q, p, T)$, рассмотренной в 5. Мы будем ее обозначать $\Gamma_f(q, p)$. Так же, как это делалось в 3 для случая преследования со стохастическим временем, можно показать, что существование непрерывно дифференцируемого значения игры в чистых стратегиях эквивалентно существованию решения задачи Коши для уравнения

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial p_i} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} (\Phi - \Psi) + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial q_i} p_i + \\ + \frac{f(t)}{1 - F(t)} [U(q, p) - V(q, p, t)] = 0 \tag{6.1}$$

при начальном условии

$$V(q, p, t)|_{t=T_0} = U(q, p). \tag{6.2}$$

Оптимальные стратегии игроков I и II имеют при этом вид

$$\varphi_i^* = \Phi \frac{\partial V}{\partial p_i} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial p_i} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \tag{6.3}$$

и

$$\psi_i^* = \Psi \cdot \frac{\partial V}{\partial p_i} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial p_i} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{6.4}$$

В заключение отметим, что задачи преследования, в которых игроки имеют возможность в каждый момент времени выбирать направление вектора скорости и массы соответствующих материальных точек равных нулю, рассматривались в [2], [3], где для функции значения игры получены уравнения аналогичные (1.10), (2.10), (3.12). В наиболее общей форме задача преследования рассмотрена в [4].

Нетрудно убедиться, что задачи на перетягивание 4—6 описывают многие из практически интересных моделей динамики как точки, так и системы материальных точек. В частности, движение точки-переменной массы, движение при наличии сопротивления, а также эволюцию системы взаимодействующих частиц, не вступающих между собой в коалиции.

Ленинградский ордена Ленина
Государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило в редакцию
1.II.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Беллман, Процессы регулирования с адаптацией, Наука, 1964.
2. Л. А. Петросян, Сведение одной дифференциальной игры на выживание к решению задачи Коши для дифференциального уравнения в частных производных первого порядка, ДАН Арм. ССР, т. 40, в. 4 (1965).
3. A. Zięba, "Fundamental equations of the theory of persuit". Transactions of the second Prague conference in math. statistics..., 1959.
4. Л. С. Понтрягин, О некоторых дифференциальных играх, ДАН СССР, т. 156, № 4 (1964).

LOŠIMŲ TEORIJOS UŽDAVINIAI MECHANIKOJE

L. PETROSIANAS, N. MURZOVAS

(*Reziumė*)

Darbe nagrinėjami įvairūs persekiojimo ir „galynėjimosi“ uždaviniai. Atitinkamų lošimų modeliams išvestos pagrindinės lygtys, kurias turi patenkinti lošimo reikšmės funkcijos. Koši uždavinio šioms lygtims su dalinėmis išvestinėmis sprendinio egzistavimas yra ekvivalentiškas atitinkamų lošimų išsprendžiamumui grynų strategijų aibėse.

GAME THEORETICAL PROBLEMS IN MECHANICS

L. A. PETROSJAN, N. V. MURSOV

(*Summary*)

The various problems of persuit and "peretjagivanie" are investigated. For corresponding game theoretical models the fundamental equations for the value function are derived. The existence of the solution of the Cauchy problem for this partial differential equations is equivalent to the existence of the solutions in pure strategies of corresponding games.