О СПЕКТРЕ МАРКОВА

Г. А. ФРЕЙМАН, А. А. ЮДИН

В этой статье уточняется структура спектра Маркова. Пусть

$$M=\{\ldots,\ a_{-2},\ a_{-1},\ a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\}$$

обозначает бесконечную в обе стороны последовательность натуральных чисел,

$$\mu_k(M)=[0;\ a_{k-1},\ a_{k-2},\ \ldots]+a_k+[0;\ a_{k+1},\ a_{k+2},\ \ldots]$$

([ ] – знак непрерывной дроби),

$$\mu(M)=\sup_k \mu_k(M);$$

множество [$\{\mu(M)\}$ всех значений функции $\mu(M)$ – спектр Маркова (см., напр., [1]).

Б. Н. Делоне показал, что из результатов М. Холла [2] следует принадлежность спектру Маркова любого $x\geqslant 6{,}1$.

Обозначим через μ_0 нижнюю грань множества чисел, для каждого из которых все числа больше него принадлежат спектру Маркова.

Таким образом, результат Б. Н. Делоне означает, что $\mu_0\leqslant 6{,}1$.

В настоящей работе показано, что

$$\mu_0<5{,}118.$$

Нижеследующие лемма 1 и теорема 1 представляют используемую в дальнейшем изложении перефразировку результатов [2].

Лемма 1. *Будем говорить, что производится выброс из конечной системы непересекающихся замкнутых интервалов, если из какого-то замкнутого интервала* $[a,\ b]$ *данной системы выбрасывается открытый интервал* $(a_1,\ b_1)$, *причем выполняется условие*

$$b_1-a_1\leqslant \min(a_1-a,\ b-b_1). \tag{1}$$

Если произвести выброс из замкнутого интервала $[c,\ d]$, затем выброс из системы, состоящей из оставшихся двух замкнутых интервалов и т. д., то, производя счетное число выбросов, в пределе получим множество E такое, что любое число $z\in[2c,\ 2d]$ представляемо в виде

$$z=x_1+x_2,\ \ x_1,\ \ x_2\in E.$$

С помощью этой леммы доказывается нижеследующая

Теорема 1 (Холл). *Каждое число из интервала* $(\sqrt{2}-1,\ 4\sqrt{2}-4)$ *представимо в виде суммы двух непрерывных дробей, неполные частные которых не превышают* 4, *а значения принадлежат интервалу* $(0,\ 1)$.

Доказательство. Поясним, каким образом множество B непрерывных дробей интервала $(0, 1)$, неполные частные которых не превышают 4, могут быть получены с помощью процесса выбросов, описанного в лемме 1.

Очевидно, что

$$\max_{\alpha \in B} \alpha = [0;\ 1,\ 4,\ 1,\ 4,\ \ldots] = 2(\sqrt{2}-1) = \beta_1, \tag{2}$$

$$\min_{\alpha \in B} \alpha = [0;\ 4,\ 1,\ 4\ 1,\ \ldots] = \frac{\sqrt{2}-1}{2} = \beta_2, \tag{3}$$

так что в данном случае

$$[c,\ d] = \left[\frac{\sqrt{2}-1}{2},\ 2(\sqrt{2}-1)\right].$$

Рассмотрим множества чисел

$$B_i^{(1)} = \left\{\frac{1}{i+\alpha}\right\}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant 4, \tag{4}$$

где $\alpha \in B$. Очевидно, что

$$B_i^{(1)} \subset Z_i^{(1)} = \left[\frac{1}{i+\beta_1},\ \frac{1}{i+\beta_2}\right].$$

Множество $\bigcup_{i=1}^{4} Z_i^{(1)}$ получается из $[\beta_1,\ \beta_2]$ последовательными выбросами интервалов

$$I_1^{(1)},\ I_2^{(1)},\ I_3^{(1)},\ I_i^{(1)} = \left(\frac{1}{i+1+\beta_2},\ \frac{1}{i+\beta_1}\right), \qquad 1 \leqslant i \leqslant 3.$$

Рассматривая вторые неполные частные, произведем аналогичное построение в сегментах $Z_i^{(1)}$. Неограниченно продолжая это построение, получим в пределе множество B.

Подсчеты М. Холла показывают, что при этом построении выбросы удовлетворяют условию (1).

Таким образом, к B можно применить лемму 1, показав тем самым, справедливость теоремы 1.

Следствие.

$$\mu_0 \leqslant 5{,}681.$$

Доказательство. Рассмотрим бесконечный в обе стороны ряд натуральных чисел

$$M^* = \{\ldots,\ a_{-2},\ a_{-1},\ 5,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\},$$

где $a_0 = 5$, $1 \leqslant a_i \leqslant 4$, $i \neq 0$, так что $[0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots] \in B$ и $[0;\ a_{-1},\ a_{-2},\ \ldots] \in B$.

Очевидно, что при $k \neq 0$

$$\mu_k(M^*) \leqslant 4 + [0;\ 1,\ 4,\ 1,\ 4,\ \ldots] + [0;\ 1,\ 5,\ 1,\ 4,\ 1,\ 4,\ \ldots] < 5{,}681.$$

Поэтому в тех случаях, когда

$$[0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots] + [0,\ a_{-1},\ a_{-2},\ \ldots] \geqslant 0{,}681,$$

мы имеем

$$\mu(M^*) = 5 + [0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots] + [0;\ a_{-1},\ a_{-2},\ \ldots].$$

Применяя к последнему равенству теорему Холла, мы получим, что все числа от 5,681 до 6,65 принадлежат спектру Маркова.

Покажем теперь, как усилить приведенные результаты.

Пусть D — множество непрерывных дробей α, $0 < \alpha < 1$, с неполными частными, не превышающими 4 и такими, что в их последовательности неполных частных нет пар (1, 4); (2, 4) (пара — совокупность двух последовательных неполных частных).

Пусть $N \subset D$ определяется дополнительным условием $q_1 \neq 4$.

Теорема 2. *Если* $5-\sqrt{21} \leqslant z \leqslant \sqrt{21}-3$, *то* $z=\alpha_1+\alpha_2$, α_1, $\alpha_2 \in D$.

Доказательство. Как и для (2) и (3) имеем

$$\max_{\alpha \in D} \alpha=[0;\ 1,\ 3,\ 1,\ 3,\ \ldots]=\delta_1=\frac{\sqrt{21}-3}{2},$$

$$\min_{\alpha \in D} \alpha=[0;\ 4,\ 1,\ 3,\ 1,\ 3,\ \ldots]=\delta_2=\frac{5-\sqrt{21}}{2},$$

$$\max_{\alpha \in N} \alpha=[0;\ 1,\ 3,\ 1,\ 3,\ \ldots]=\nu_1=\delta_1,$$

$$\min_{\alpha \in N} \alpha=[0;\ 3,\ 1,\ 3,\ 1,\ \ldots]=\nu_2=\frac{\sqrt{21}-3}{6},$$

$$[c,\ d]=[\delta_1,\ \delta_2].$$

Пусть $B_i^{(1)}$ по-прежнему определяются с помощью (4), где $\alpha \in N$ для $i=1,\ 2$ и $\alpha \in D$ при $i=3,\ 4$. Очевидно, что

$$B_i^{(1)} \subset Z_i^{(1)}=\left[\frac{1}{i+\nu_1},\ \frac{1}{i+\nu_2}\right] \qquad i=1,\ 2$$

и

$$B_i^{(1)} \subset Z_i^{(1)}=\left[\frac{1}{i+\delta_1},\ \frac{1}{i+\delta_2}\right] \qquad i=3,\ 4.$$

При первых трех выбросах выбрасываются последовательно интервалы

$$I_1^{(1)}=\left(\frac{1}{2+\nu_2},\ \frac{1}{1+\nu_1}\right),\ I_2^{(1)}=\left(\frac{1}{3+\delta_2},\ \frac{1}{2+\nu_1}\right),\ I_3^{(1)}=\left(\frac{1}{4+\delta_2},\ \frac{1}{3+\delta_1}\right).$$

Процесс построения дальнейших выбросов понятен. Оценим выполнение условия (1) при каждом выбросе. Для этого нужно рассмотреть три последовательных выброса из замкнутого интервала

$$z^{(n)}=\left\{\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{\ddots}{+\cfrac{1}{q_n+\Theta}}}}\right\},$$

где $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n$ — фиксированные натуральные числа, $1 \leqslant q_j \leqslant 4$, и среди пар $(q_j,\ q_{j+1})$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$ нет пар (1, 4), (2, 4)

$$\delta_2 \leqslant \Theta \leqslant \delta_1, \text{ если } q_n=3 \text{ или } 4$$

$$\nu_2 \leqslant \Theta \leqslant \nu_1, \text{ если } q_n=1 \text{ или } 2$$

(при $n=1$ и $q_1=i$, $1 \leqslant i \leqslant 4$, $z^{(1)}=z_i^{(1)}$).

Вычисления проведем лишь для четного n. Отличия для случая нечетного n несущественны.

Пусть $\dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, $\dfrac{P_n}{Q_n}$ — подходящие дроби чисел из $Z^{(n)}$.

Сегменты $Z_i^{(n+1)}$ определяются формулами

$$Z_i^{(n+1)}=[\bar{A}_i,\ \bar{B}_i],\ \left(\bar{A}_i=\frac{P_n(i+M)+P_{n-1}}{Q_n(i+M)+Q_{n-1}}\right),\ \bar{B}_i=\frac{P_n(i+m)+P_{n-1}}{Q_n(i+m)+Q_{n-1}}\Big),$$

где значения, принимаемые i, m, M, нижеследующие.

Если $q_n=3$ или 4, то $1\leqslant i\leqslant 4$,

$$M=\delta_1,\ m=\begin{cases}\delta_2, & \text{если } i=3 \text{ или } 4\\ \nu_2, & \text{если } i=1 \text{ или } 2.\end{cases}$$

Если же $q_n=1$ или 2, то $1\leqslant i\leqslant 3$,

$$M=\delta_1,\ m=\begin{cases}\delta_2, & \text{если } i=3\\ \nu_2, & \text{если } i=1 \text{ или } 2.\end{cases}$$

Если $q_n=3$ или 4, то при первом выбросе интервала $(\bar{B}_2,\ \bar{A}_1)$ нужно оценить отношения $\frac{\bar{A}_1-\bar{B}_2}{\bar{B}_1-\bar{A}_1}$ и $\frac{\bar{A}_1-\bar{B}_2}{\bar{B}_2-\bar{A}_2}$, при втором — отношения $\frac{\bar{A}_2-\bar{B}_3}{\bar{B}_2-\bar{A}_2}$ и $\frac{\bar{A}_2-\bar{B}_3}{\bar{B}_3-\bar{A}_3}$, при третьем — отношения $\frac{\bar{A}_3-\bar{B}_4}{\bar{B}_3-\bar{A}_3}$ и $\frac{\bar{A}_3-\bar{B}_4}{\bar{B}_4-\bar{A}_4}$.

Если $q_n=1$ или 2, то придется оценить отношения

$$\frac{\bar{A}_1-\bar{B}_2}{\bar{B}_1-\bar{A}_1},\quad \frac{\bar{A}_1-\bar{B}_2}{\bar{B}_2-\bar{A}_2} \text{ и } \frac{\bar{A}_2-\bar{B}_3}{\bar{B}_2-\bar{A}_2},\quad \frac{\bar{A}_2-\bar{B}_3}{\bar{B}_3-\bar{A}_3}.$$

Проведем подробно оценку первого отношения

$$\bar{A}_1-\bar{B}_2=\frac{P_n(1+\delta_1)+P_{n-1}}{Q_n(1+\delta_1)+Q_{n-1}}-\frac{P_n(2+\nu_2)+P_{n-1}}{Q_n(2+\nu_2)+Q_{n-1}}=$$

$$=\frac{1+\nu_2-\delta_1}{\left(Q_n(1+\delta_1)+Q_{n-1}\right)\left(Q_n(2+\nu_2)+Q_{n-1}\right)};$$

$$\bar{B}_1-\bar{A}_1=\frac{\delta_1-\nu_2}{\left(Q_n(1+\delta_1)+Q_{n-1}\right)\left(Q_n(1+\nu_2)+Q_{n-1}\right)};$$

$$\frac{\bar{A}_1-\bar{B}_2}{\bar{B}_1-\bar{A}_1}=\frac{1+\nu_2-\delta_1}{\delta_1-\nu_2}\ \frac{1+\nu_2+\frac{Q_{n-1}}{Q_n}}{2+\nu_2+\frac{Q_{n-1}}{Q_n}}<\frac{1+\nu_2-\delta_1}{\delta_1-\nu_2}\ \frac{1+\nu_2}{2+\nu_2}\approx 0{,}499.$$

Аналогично получим

$$\frac{\bar{A}_1-\bar{B}_2}{\bar{B}_2-\bar{A}_2}<\frac{1+\nu_2-\delta_1}{2+\delta_1-\nu_2}\ \frac{5+\delta_1}{3+\nu_2}\approx 0{,}548,$$

$$\frac{\bar{A}_2-\bar{B}_3}{\bar{B}_2-\bar{A}_2}<\frac{1+\delta_2-\delta_1}{\delta_1-\nu_2}\ \frac{2+\delta_1}{3+\delta_1}\approx 0{,}526,$$

$$\frac{\bar{A}_2-\bar{B}_3}{\bar{B}_3-\bar{A}_3}<\frac{1+\delta_2-\delta_1}{1+\delta_1-\delta_2}\ \frac{5+\delta_1}{4+\delta_2}\approx 0{,}362,$$

$$\frac{\bar{A}_3-\bar{B}_4}{\bar{B}_3-\bar{A}_3}<\frac{1+\delta_2-\delta_1}{1-\delta_1-\delta_2}\ \frac{3+\delta_2}{4+\delta_2}\approx 0{,}545,$$

$$\frac{\bar{A}_3-\bar{B}_4}{\bar{B}_4-\bar{A}_4}<\frac{1+\delta_2-\delta_1}{\delta_1-\delta_2}\ \frac{5+\delta_2}{4+\delta_2}\approx 0{,}887.$$

В случае $q_n=1$ или 2 придется оценить дополнительно два отношения

$$\frac{\bar{A}_1-\bar{B}_2}{\bar{B}_2-\bar{A}_2}<\frac{1+\nu_2-\delta_1}{1+\delta_1-\nu_2}\ \frac{4+\delta_1}{2+\delta_2}\approx 0{,}518$$

и

$$\frac{\bar{A}_2-\bar{B}_3}{\bar{B}_3-\bar{A}_3}<\frac{1+\delta_2-\delta_1}{\delta_1-\delta_2}\ \frac{4+\delta_1}{3+\delta_1}\approx 0{,}903.$$

Мы проверили выполнение условий леммы 1, откуда следует справедливость теоремы.

Теорема 3.

$$\mu_0 \leqslant 5{,}118.$$

Доказательство. Рассмотрим ряд

$$M^{\times\times} = \{\ldots,\ a_{-2},\ a_{-1},\ 4,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\},$$

где $a_0 = 4$, $1 \leqslant a_i \leqslant 4$, причем, если $a_i = 1$ или 2, то при $i \geqslant 1$, $a_{i+1} \neq 4$, а при $i \leqslant -1$, $a_{i-1} \neq 4$.

Таким образом,

$$[0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots] \in D \text{ и } [0;\ a_{-1},\ a_{-2},\ \ldots] \in D.$$

Очевидно, что при $k \neq 0$

$$\mu_k(M^{\times\times}) \leqslant 4 + [0;\ 1,\ 4,\ 4,\ 4,\ 1,\ 3,\ \ldots] + [0;\ 3,\ 4,\ 3,\ 4,\ \ldots] < 5{,}118.$$

Поэтому в тех случаях, когда

$$[0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots] + [0;\ a_{-1},\ a_{-2},\ \ldots] > 1{,}118,$$

мы имеем

$$\mu(M^{\times\times}) = 4 + [0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots] + [0;\ a_{-1},\ a_{-2},\ \ldots].$$

Применяя к последнему равенству теорему 2, мы получаем, что числа от 5,118, до 5,583 принадлежат спектру Маркова.

Рассмотрим ряд

$$\ldots,\ a_{-2},\ a_{-1},\ 5,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,$$

где $a_0 = 5$, $1 \leqslant a_i \leqslant 4$, причем, если $a_i = 1$ или 2, то при $i \geqslant 1$, $a_{i+1} \neq 4$, а при $i \leqslant -1$, $a_{i-1} \neq 4$, показываем, что и числа оставшегося промежутка [5, 583; 5, 681] принадлежат спектру Маркова.

Москва

Поступило в редакцию
8.II.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Г. Когония. Труды Тбилисского университета, т. XXIV, 1963.
2. M. Hall. Ann. Math. Princeton, (2), 48, (1947), 966–993.

APIE MARKOVO SPEKTRĄ

G. A. FREIMANAS, A. A. JUDINAS

(*Reziumė*)

Patobulintu M. Hallo metodu parodoma, kad visi skaičiai $x \geqslant 5{,}118$ priklauso Markovo spektrui.

ON MARKOVIAN SPECTRUM

G. A. FREIMAN, A. A. YUDIN

(*Summary*)

An improvement of M. Hall's method has allowed to prove that all numbers $x \geqslant 5{,}118$ belong to the Markovian spectrum.