1966

О ПРОСТРАНСТВЕ ОПОРНЫХ ЛИНЕАРОВ

Ю. ШИНКУНАС

В работе [2] Б. Л. Лаптев построил аппарат ковариантного дифференцирования в пространстве тензорных опорных элементов. В настоящей заметке рассматривается ковариантный дифференциал и теория кривизны для частного случая пространств опорных элементов в том смысле, что опорным объектом является линеар $\overset{i}{v}{}^{\alpha}$, который при допустимых преобразованиях координат в X_n

$$x^{\alpha'}=x^{\alpha'}(x^{\alpha})$$

характеризуется следующими формулами преобразования компонент:

$$\overset{i}{v}{}^{\alpha'}=B^i_k(\ln\Delta)\,A^{\alpha'}_{\alpha}\overset{k}{v}{}^{\alpha}$$

$$(\alpha,\ \beta,\ \gamma=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ i,\ j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ N),$$

где $A^{\alpha'}_{\alpha}$ – матрица преобразования координат в X_n, Δ – ее определитель, $B^i_k(u)$ – функции от параметра u, определяющие однопараметрическую линейную группу преобразований N-мерного арифметического пространства. Эти функции находятся как решения системы

$$\frac{dB^i_k}{du}=c^i_j B^j_k \qquad (B^i_j(0)=\delta^i_j),$$

где $\|c^i_j\|$ – некоторая заданная постоянная матрица (типовая матрица линеара) и $\operatorname{sp}\|c^i_j\|=c$ (см. [3]). Полученное пространство опорных элементов $(x^{\alpha},\ \overset{i}{v}{}^{\beta})$ назовем пространством $L_{n,v}$ опорных линеаров.

Продолженная группа аналитических преобразований пространства X_n определяется формами ω^{α} и ω^{α}_{β}, которые имеют следующую структуру:

$$D\omega^{\alpha}=[\omega^{\gamma},\ \omega^{\alpha}_{\gamma}],$$
$$D\omega^{\alpha}_{\beta}=[\omega^{\gamma}_{\beta},\ \omega^{\alpha}_{\gamma}]+[\omega^{\gamma},\ \omega^{\alpha}_{\beta\gamma}],$$
$$\omega^{\alpha}_{[\beta\gamma]}=0.$$

Первые интегралы вполне интегрируемой системы $\omega^{\alpha}=0$ можно рассматривать как локальные координаты точки пространства X_n, которое является пространством представления исходной группы аналитических преобразований. Система

$$\omega^{\alpha}=0,$$
$$\overset{i}{\Theta}{}^{\alpha}=0, \tag{1}$$

где

$$\overset{i}{\Theta}{}^{\alpha}=d\overset{i}{v}{}^{\alpha}+\overset{i}{v}{}^{\gamma}\omega^{\alpha}_{\gamma}+c^i_k\overset{k}{v}{}^{\alpha}\omega^{\gamma}_{\gamma},$$

вполне интегрируема, и первые интегралы этой системы определяют пространство представления продолженной группы аналитических преобразований. Таким образом, мы получили новое пространство — пространство опорных линеаров $L_{n,v}$, структурные уравнения которого имеют вид:

$$D\omega^\alpha = [\omega^\gamma,\ \omega^\alpha_\gamma],$$
$$D\overset{i}{\Theta}{}^\alpha = [\overset{i}{\Theta}{}^\gamma,\ \omega^\alpha_\gamma] + c^i_k\,[\overset{k}{\Theta}{}^\alpha,\ \omega^\gamma_\gamma] + [\omega^\gamma,\ \overset{i}{\Theta}{}^\alpha_\gamma], \tag{2}$$

где

$$\overset{i}{\Theta}{}^\alpha_\gamma = \overset{j}{v}{}^\varepsilon\,(\delta^i_j\,\omega^\alpha_{\gamma\varepsilon} + c^i_j\,\delta^\alpha_\gamma\,\omega^\sigma_{\sigma\varepsilon}).$$

В пространство $L_{n,v}$ линейную связность введем при помощи форм

$$\overset{i}{\tilde{\Theta}}{}^\alpha = \overset{i}{\Theta}{}^\alpha + \overset{i}{\Gamma}{}^\alpha_\gamma\,\omega^\gamma, \tag{3}$$

где $\overset{i}{\Gamma}{}^\alpha_\gamma$ определяются из системы дифференциальных уравнений:

$$d\overset{i}{\Gamma}{}^\alpha_\gamma - \overset{i}{\Gamma}{}^\alpha_\varepsilon\,\omega^\varepsilon_\gamma + \overset{i}{\Gamma}{}^\varepsilon_\gamma\,\omega^\alpha_\varepsilon + c^i_k\,\overset{k}{\Gamma}{}^\alpha_\gamma\,\omega^\varepsilon_\varepsilon - \overset{i}{\Theta}{}^\alpha_\gamma = \overset{i}{\Gamma}{}^\alpha_{\gamma\beta}\,\omega^\beta + \underset{j}{\overset{i}{\Gamma}}{}^\alpha_{\beta\gamma}\,\overset{j}{\Theta}{}^\beta. \tag{4}$$

Продолжая систему (4), получаем:

$$d\overset{i}{\Gamma}{}^\alpha_{\gamma\beta} - \overset{i}{\Gamma}{}^\alpha_{\gamma\varepsilon}\,\omega^\varepsilon_\beta - \overset{i}{\Gamma}{}^\alpha_{\varepsilon\beta}\,\omega^\varepsilon_\gamma + \overset{i}{\Gamma}{}^\varepsilon_{\gamma\beta}\,\omega^\alpha_\varepsilon - \overset{i}{\Gamma}{}^\alpha_\varepsilon\,\omega^\varepsilon_{\gamma\beta} + \overset{i}{\Gamma}{}^\varepsilon_\gamma\,\omega^\alpha_{\varepsilon\beta} + c^i_k\,\overset{k}{\Gamma}{}^\alpha_\gamma\,\omega^\varepsilon_{\varepsilon\beta} + c^i_k\,\overset{k}{\Gamma}{}^\alpha_{\gamma\beta}\,\omega^\varepsilon_\varepsilon -$$
$$- \underset{j}{\overset{i}{\Gamma}}{}^\alpha_{\varepsilon\gamma}\,\overset{j}{\Theta}{}^\varepsilon_\beta - \overset{i}{\Theta}{}^\alpha_{\gamma\beta} = \overset{i}{\Gamma}{}^\alpha_{\gamma\beta\varepsilon}\omega^\varepsilon + \underset{j}{\overset{i}{\Gamma}}{}^\alpha_{\gamma\varepsilon\beta}\,\overset{j}{\Theta}{}^\varepsilon, \tag{5}$$

$$d\underset{j}{\overset{i}{\Gamma}}{}^\alpha_{\gamma\beta} - \underset{j}{\overset{i}{\Gamma}}{}^\alpha_{\varepsilon\beta}\,\omega^\varepsilon_\gamma - \underset{j}{\overset{i}{\Gamma}}{}^\alpha_{\gamma\varepsilon}\,\omega^\varepsilon_\beta + \underset{j}{\overset{i}{\Gamma}}{}^\varepsilon_{\gamma\beta}\,\omega^\alpha_\varepsilon + c^i_k\,\underset{j}{\overset{k}{\Gamma}}{}^\alpha_{\gamma\beta}\,\omega^\varepsilon_\varepsilon - c^k_j\,\underset{k}{\overset{i}{\Gamma}}{}^\alpha_{\gamma\beta}\,\omega^\varepsilon_\varepsilon - \delta^i_j\,\omega^\alpha_{\gamma\beta} -$$
$$- c^i_j\,\delta^\alpha_\gamma\,\omega^\varepsilon_{\varepsilon\beta} = \underset{j}{\overset{i}{\Gamma}}{}^\alpha_{\gamma\beta\varepsilon}\,\omega^\varepsilon + \underset{jk}{\overset{i}{\Gamma}}{}^\alpha_{\gamma\beta\varepsilon}\,\overset{k}{\Theta}{}^\varepsilon, \tag{6}$$

где

$$\overset{i}{\Theta}{}^\alpha_{\gamma\beta} = \overset{j}{v}{}^\varepsilon\,(\delta^i_j\,\omega^\alpha_{\gamma\beta\varepsilon} + c^i_j\,\delta^\alpha_\gamma\,\omega^\sigma_{\sigma\beta\varepsilon}),$$
$$\overset{i}{\Gamma}{}^\alpha_{\gamma\,[\beta\varepsilon]} = 0,\quad \underset{j}{\overset{i}{\Gamma}}{}^\alpha_{\gamma\varepsilon\beta} = \underset{j}{\overset{i}{\Gamma}}{}^\alpha_{\gamma\beta\varepsilon},\quad \underset{jk}{\overset{i}{\Gamma}}{}^\alpha_{\gamma\beta\varepsilon} = \underset{kj}{\overset{i}{\Gamma}}{}^\alpha_{\varepsilon\beta\gamma}.$$

Формы $\overset{i}{\tilde{\Theta}}{}^\alpha$ имеют следующую структуру:

$$D\overset{i}{\tilde{\Theta}}{}^\alpha - [\overset{j}{\tilde{\Theta}}{}^\beta,\ \delta^i_j\,\omega^\alpha_\beta + \underset{j}{\overset{i}{\bar{\Gamma}}}{}^\alpha_{\beta\gamma}\,\omega^\gamma] - c^i_j\,[\overset{j}{\tilde{\Theta}}{}^\alpha,\ \omega^\beta_\beta + \underset{i}{\overset{i}{\check{\Gamma}}}{}^\beta_{\beta\gamma}\,\omega^\gamma] =$$
$$= (\overset{i}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma} - \underset{j}{\overset{i}{\Gamma}}{}^\alpha_{\varepsilon\gamma}\,\overset{j}{\Gamma}{}^\varepsilon_\beta)\,[\omega^\beta,\ \omega^\gamma], \tag{7}$$

где

$$\underset{j}{\overset{i}{\bar{\Gamma}}}{}^\alpha_{\gamma\beta} = \underset{j}{\overset{i}{\Gamma}}{}^\alpha_{\gamma\beta} - \frac{c^i_j\,\delta^\alpha_\gamma}{N+nc}\,\underset{k}{\overset{k}{\Gamma}}{}^\varepsilon_{\varepsilon\beta},\quad \underset{i}{\overset{i}{\check{\Gamma}}}{}^\alpha_{\gamma\beta} = \frac{1}{N}\,\underset{i}{\overset{i}{\bar{\Gamma}}}{}^\alpha_{\gamma\beta}.$$

Если ввести формы

$$\tilde{\omega}^\alpha_\beta = \omega^\alpha_\beta + \underset{i}{\overset{i}{\check{\Gamma}}}{}^\alpha_{\beta\gamma}\,\omega^\gamma, \tag{8}$$

то (7) примут вид:

$$D\,\overset{i}{\tilde{\Theta}}{}^\alpha - [\overset{i}{\tilde{\Theta}}{}^\gamma,\ \tilde{\omega}^\alpha_\gamma] - c^i_j\,[\overset{j}{\tilde{\Theta}}{}^\alpha,\ \tilde{\omega}^\gamma_\gamma] = \frac{1}{2}\,\overset{i}{R}{}^\alpha_{\beta\gamma}\,[\omega^\gamma,\ \omega^\beta] + \underset{j}{\overset{i}{S}}{}^\alpha_{\beta\gamma}\,[\overset{j}{\tilde{\Theta}}{}^\beta,\ \omega^\gamma], \tag{7'}$$

где

$$\overset{i}{R}{}^\alpha_{\beta\gamma} = \overset{i}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma} - \overset{i}{\Gamma}{}^\alpha_{\gamma\beta} - 2\,\underset{j}{\overset{i}{\Gamma}}{}^\alpha_{\varepsilon\,[\gamma}\,\overset{j}{\Gamma}{}^\varepsilon_{\beta]},\quad \underset{j}{\overset{i}{S}}{}^\alpha_{\beta\gamma} = \underset{j}{\overset{i}{\bar{\Gamma}}}{}^\alpha_{\beta\gamma} - \delta^i_j\,\underset{k}{\overset{k}{\check{\Gamma}}}{}^\alpha_{\beta\gamma}.$$

Формы $\tilde{\omega}^{\alpha}_{\beta}$, следуя терминологии Б. Л. Лаптева [2], будем называть формами усеченной аффинной связности. Структурные уравнения пространства опорных линеаров с усеченной аффинной связностью можно представить в виде:

$$D\omega^{\alpha}-[\omega^{\varepsilon},\ \tilde{\omega}^{\alpha}_{\varepsilon}]=\frac{1}{2}\ \overset{i}{\underset{i}{R}}{}^{\alpha}_{\varepsilon\gamma}[\omega^{\gamma},\ \omega^{\varepsilon}],$$

$$D\tilde{\omega}^{\alpha}_{\beta}-[\tilde{\omega}^{\gamma}_{\beta},\ \tilde{\omega}^{\alpha}_{\gamma}]=\frac{1}{2}\ \overset{i}{\underset{i}{R}}{}^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon}[\omega^{\varepsilon},\ \omega^{\gamma}]+\overset{i}{\underset{ij}{S}}{}^{\alpha}_{\beta\varepsilon\gamma}[\overset{j}{\tilde{\Theta}}{}^{\gamma},\ \omega^{\varepsilon}], \tag{9}$$

$$D\overset{i}{\tilde{\Theta}}{}^{\alpha}-[\overset{i}{\tilde{\Theta}}{}^{\gamma},\ \tilde{\omega}^{\alpha}_{\gamma}]-c^{i}_{j}[\overset{j}{\tilde{\Theta}}{}^{\alpha},\ \tilde{\omega}^{\gamma}_{\gamma}]=\frac{1}{2}\ \overset{i}{R}{}^{\alpha}_{\gamma\beta}[\omega^{\beta},\ \omega^{\gamma}]+\overset{i}{\underset{j}{S}}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}[\overset{j}{\tilde{\Theta}}{}^{\beta},\ \omega^{\gamma}],$$

где

$$\overset{i}{\underset{i}{R}}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}=2\ \overset{i}{\underset{i}{\check{\Gamma}}}{}^{\alpha}_{[\beta\gamma]},\ \ \overset{i}{\underset{i}{R}}{}^{\alpha}_{\beta\varepsilon\gamma}=2\ \overset{i}{\underset{i}{\check{\Gamma}}}{}^{\alpha}_{\beta\,[\varepsilon\gamma]}-2\ \overset{i}{\underset{i}{\check{\Gamma}}}{}^{\sigma}_{\beta\,[\gamma}\ \overset{j}{\underset{|j|}{\check{\Gamma}}}{}^{\alpha}_{|\sigma|\,\varepsilon]}-2\ \overset{i}{\underset{ij}{\check{\Gamma}}}{}^{\alpha}_{[\gamma\,|\,\beta\sigma\,|}\ \overset{j}{\Gamma}{}^{\sigma}_{\varepsilon]},\ \ \overset{i}{\underset{ij}{S}}{}^{\alpha}_{\beta\varepsilon\gamma}=\overset{i}{\underset{ij}{\check{\Gamma}}}{}^{\alpha}_{\beta\varepsilon\gamma}.$$

В дальнейшем будем рассматривать общую аффинную связность, определяемую формами:

$$\tilde{\omega}^{\alpha}=\omega^{\alpha},\ \ \tilde{\omega}^{\alpha}_{\beta}=\omega^{\alpha}_{\beta}+\overset{i}{\underset{i}{L}}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}\,\omega^{\gamma}+\underset{k}{C}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}\,\overset{k}{\Theta}{}^{\gamma}, \tag{10}$$

где

$$d\overset{i}{\underset{i}{L}}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}-\overset{i}{\underset{i}{L}}{}^{\alpha}_{\varepsilon\gamma}\,\omega^{\varepsilon}_{\beta}-\overset{i}{\underset{i}{L}}{}^{\alpha}_{\beta\varepsilon}\,\omega^{\varepsilon}_{\gamma}+\overset{i}{\underset{i}{L}}{}^{\varepsilon}_{\beta\gamma}\,\omega^{\alpha}_{\varepsilon}-\underset{k}{C}{}^{\alpha}_{\beta\varepsilon}\,\overset{k}{\Theta}{}^{\varepsilon}_{\gamma}-\omega^{\alpha}_{\beta\gamma}=\overset{i}{\underset{i}{L}}{}^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon}\,\omega^{\varepsilon}+\overset{i}{\underset{ij}{L}}{}^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon}\,\overset{j}{\Theta}{}^{\varepsilon}, \tag{11}$$

$$d\underset{k}{C}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}-\underset{k}{C}{}^{\alpha}_{\varepsilon\gamma}\,\omega^{\varepsilon}_{\beta}-\underset{k}{C}{}^{\alpha}_{\beta\varepsilon}\,\omega^{\varepsilon}_{\gamma}+\underset{k}{C}{}^{\varepsilon}_{\beta\gamma}\,\omega^{\alpha}_{\varepsilon}-c^{j}_{k}\,\underset{j}{C}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}\,\omega^{\varepsilon}_{\varepsilon}=\underset{k}{C}{}^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon}\,\omega^{\varepsilon}+\underset{kj}{C}{}^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon}\,\overset{j}{\Theta}{}^{\varepsilon}. \tag{12}$$

Нетрудно убедиться, что эта связность индуцирует линейную связность, определяемую формами:

$$\overset{i}{\tilde{\Theta}}{}^{\alpha}=\overset{i}{\underset{k}{E}}{}^{\alpha}_{\gamma}\,\overset{k}{\Theta}{}^{\gamma}+\overset{i}{E}{}^{\alpha}_{\gamma}\,\omega^{\gamma}, \tag{13}$$

где

$$\overset{i}{\underset{k}{E}}{}^{\alpha}_{\gamma}=\delta^{i}_{k}\,\delta^{\alpha}_{\gamma}+\overset{j}{v}{}^{\varepsilon}\,(\delta^{i}_{j}\,\underset{k}{C}{}^{\alpha}_{\varepsilon\gamma}+c^{i}_{j}\,\delta^{\alpha}_{\varepsilon}\,\underset{k}{C}{}^{\sigma}_{\sigma\gamma}),$$

$$\overset{i}{E}{}^{\alpha}_{\gamma}=\overset{j}{v}{}^{\varepsilon}\,(\delta^{i}_{j}\,\overset{k}{\underset{k}{L}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}+c^{i}_{j}\,\delta^{\alpha}_{\gamma}\,\overset{k}{\underset{k}{L}}{}^{\sigma}_{\sigma\varepsilon}).$$

Из (13) получаем:

$$\overset{k}{\Theta}{}^{\gamma}=\overset{k}{\underset{j}{\tilde{E}}}{}^{\gamma}_{\varepsilon}\,\overset{j}{\tilde{\Theta}}{}^{\varepsilon}-\overset{k}{\tilde{E}}{}^{\gamma}_{\varepsilon}\,\omega^{\varepsilon}, \tag{13'}$$

где

$$\overset{i}{\underset{k}{E}}{}^{\alpha}_{\gamma}\,\overset{k}{\underset{j}{\tilde{E}}}{}^{\gamma}_{\varepsilon}=\delta^{i}_{j}\,\delta^{\alpha}_{\varepsilon},\ \ \overset{k}{\tilde{E}}{}^{\gamma}_{\varepsilon}=\overset{i}{E}{}^{\alpha}_{\varepsilon}\,\overset{k}{\underset{i}{\tilde{E}}}{}^{\gamma}_{\alpha}.$$

Величины $\overset{i}{\underset{j}{\tilde{E}}}{}^{\alpha}_{\varepsilon}$ и $\overset{i}{\tilde{E}}{}^{\alpha}_{\varepsilon}$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$d\overset{i}{\underset{j}{\tilde{E}}}{}^{\alpha}_{\varepsilon}-\overset{i}{\underset{j}{\tilde{E}}}{}^{\alpha}_{\gamma}\,\omega^{\gamma}_{\varepsilon}+\overset{i}{\underset{j}{\tilde{E}}}{}^{\gamma}_{\varepsilon}\,\omega^{\alpha}_{\gamma}+c^{i}_{k}\,\overset{k}{\underset{j}{\tilde{E}}}{}^{\alpha}_{\varepsilon}\,\omega^{\gamma}_{\gamma}-c^{k}_{j}\,\overset{i}{\underset{k}{\tilde{E}}}{}^{\alpha}_{\varepsilon}\,\omega^{\gamma}_{\gamma}=\overset{i}{\underset{j}{\tilde{E}}}{}^{\alpha}_{\varepsilon\gamma}\,\omega^{\gamma}+\overset{i}{\underset{jk}{\tilde{E}}}{}^{\alpha}_{\varepsilon\gamma}\,\overset{k}{\Theta}{}^{\gamma}, \tag{14}$$

$$d\overset{i}{\tilde{E}}{}^{\alpha}_{\varepsilon}-\overset{i}{\tilde{E}}{}^{\alpha}_{\gamma}\,\omega^{\gamma}_{\varepsilon}+\overset{i}{\tilde{E}}{}^{\gamma}_{\varepsilon}\,\omega^{\alpha}_{\gamma}+c^{i}_{k}\,\overset{k}{\tilde{E}}{}^{\alpha}_{\varepsilon}\,\omega^{\gamma}_{\gamma}-\overset{i}{\underset{j}{\tilde{E}}}{}^{\alpha}_{\gamma}\,\overset{j}{\Theta}{}^{\gamma}_{\varepsilon}=\overset{i}{\tilde{E}}{}^{\alpha}_{\varepsilon\gamma}\,\omega^{\gamma}+\overset{i}{\underset{j}{\tilde{E}}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}\,\overset{j}{\Theta}{}^{\varepsilon} \tag{15}$$

$$(\overset{i}{\underset{j}{\tilde{E}}}{}^{\alpha}_{\varepsilon\gamma}=\overset{i}{\underset{j}{\tilde{E}}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon},\ \overset{i}{\tilde{E}}{}^{\alpha}_{\varepsilon\gamma}=\overset{i}{\tilde{E}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon},\ \overset{i}{\underset{jk}{\tilde{E}}}{}^{\alpha}_{\varepsilon\gamma}=\overset{i}{\underset{kj}{\tilde{E}}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}).$$

Если учесть (13′), то (10) примут вид:

$$\tilde\omega^\alpha=\omega^\alpha,\quad \tilde\omega^\alpha_\beta=\omega^\alpha_\beta+\underset{i}{\overset{i}{\check L}}{}^\alpha_{\beta\gamma}\,\omega^\gamma+\underset{k}{\check C}{}^\alpha_{\beta\gamma}\,\overset{k}{\tilde\Theta}{}^\gamma, \tag{10′}$$

где

$$\underset{i}{\overset{i}{\check L}}{}^\alpha_{\beta\gamma}=\underset{i}{\overset{i}{L}}{}^\alpha_{\beta\gamma}-\underset{k}{C}{}^\alpha_{\beta\varepsilon}\,\overset{k}{\tilde E}{}^\varepsilon_\gamma,\quad \underset{j}{\check C}{}^\alpha_{\beta\gamma}=\underset{k}{C}{}^\alpha_{\beta\varepsilon}\,\underset{j}{\overset{k}{\tilde E}}{}^\varepsilon_\gamma.$$

Легко найти, что:

$$d\underset{i}{\overset{i}{\check L}}{}^\alpha_{\beta\gamma}-\underset{i}{\overset{i}{\check L}}{}^\alpha_{\varepsilon\gamma}\,\omega^\varepsilon_\beta-\underset{i}{\overset{i}{\check L}}{}^\alpha_{\beta\varepsilon}\,\omega^\varepsilon_\gamma+\underset{i}{\overset{i}{\check L}}{}^\varepsilon_{\beta\gamma}\,\omega^\alpha_\varepsilon-\omega^\alpha_{\beta\gamma}=\underset{i}{\overset{i}{\check L}}{}^\alpha_{\beta\gamma\varepsilon}\,\omega^\varepsilon+\underset{ij}{\overset{i}{\check L}}{}^\alpha_{\beta\gamma\varepsilon}\,\overset{j}{\Theta}{}^\varepsilon, \tag{16}$$

$$d\underset{k}{\check C}{}^\alpha_{\beta\gamma}-\underset{k}{\check C}{}^\alpha_{\varepsilon\gamma}\,\omega^\varepsilon_\beta-\underset{k}{\check C}{}^\alpha_{\beta\varepsilon}\,\omega^\varepsilon_\gamma+\underset{k}{\check C}{}^\varepsilon_{\beta\gamma}\,\omega^\alpha_\varepsilon-c^j_k\,\underset{j}{\check C}{}^\alpha_{\beta\gamma}\,\omega^\varepsilon_\varepsilon=\underset{k}{\check C}{}^\alpha_{\beta\gamma\varepsilon}\,\omega^\varepsilon+\underset{kj}{\check C}{}^\alpha_{\beta\gamma\varepsilon}\,\overset{j}{\Theta}{}^\varepsilon. \tag{17}$$

Структурные уравнения пространства опорных линеаров с аффинной связностью имеют вид:

$$D\,\omega^\alpha-[\omega^\varepsilon,\ \tilde\omega^\alpha_\varepsilon]=\frac12\ \underset{i}{\overset{i}{R}}{}^\alpha_{\varepsilon\beta}\,[\omega^\beta,\ \omega^\varepsilon]+\underset{k}{\check C}{}^\alpha_{\varepsilon\beta}\,[\overset{k}{\tilde\Theta}{}^\beta,\ \omega^\varepsilon], \tag{18}$$

$$D\tilde\omega^\alpha_\beta-[\tilde\omega^\gamma_\beta,\ \tilde\omega^\alpha_\gamma]=\frac12\ \underset{i}{\overset{i}{K}}{}^\alpha_{\beta\gamma\varepsilon}\,[\omega^\varepsilon,\ \omega^\gamma]+\underset{j}{P}{}^\alpha_{\beta\varepsilon\gamma}\,[\overset{j}{\tilde\Theta}{}^\varepsilon,\ \omega^\gamma]+\frac12\ \underset{jk}{S}{}^\alpha_{\beta\varepsilon\gamma}\,[\overset{j}{\tilde\Theta}{}^\varepsilon,\ \overset{k}{\tilde\Theta}{}^\gamma], \tag{19}$$

$$D\overset{i}{\tilde\Theta}{}^\alpha-[\overset{i}{\tilde\Theta}{}^\gamma,\ \tilde\omega^\alpha_\gamma]-c^i_k\,[\overset{k}{\tilde\Theta}{}^\alpha,\ \tilde\omega^\gamma_\gamma]=\frac12\ \overset{i}{K}{}^\alpha_{\varepsilon\gamma}\,[\omega^\gamma,\ \omega^\varepsilon]+\underset{j}{\overset{i}{P}}{}^\alpha_{\varepsilon\gamma}\,[\overset{j}{\tilde\Theta}{}^\varepsilon,\ \omega^\gamma]+\frac12\ \underset{jk}{\overset{i}{S}}{}^\alpha_{\varepsilon\gamma}\,[\overset{j}{\tilde\Theta}{}^\varepsilon,\ \overset{k}{\tilde\Theta}{}^\gamma], \tag{20}$$

где

$$\underset{i}{\overset{i}{R}}{}^\alpha_{\varepsilon\beta}=2\,\underset{i}{\overset{i}{\check L}}{}^\alpha_{[\varepsilon\beta]}, \tag{21}$$

$$\underset{i}{\overset{i}{K}}{}^\alpha_{\beta\gamma\varepsilon}=2\,\underset{i}{\overset{i}{\check L}}{}^\alpha_{\beta\,[\gamma\varepsilon]}-2\,\underset{ij}{\overset{i}{\check L}}{}^\alpha_{\beta\,[\gamma\,|\tau|}\,\overset{j}{\tilde E}{}^\tau_{\varepsilon]}-2\,\underset{i}{\overset{i}{\check L}}{}^\tau_{\beta\,[\varepsilon}\,\underset{|j|}{\overset{j}{\check L}}{}^\alpha_{|\tau|\gamma]}+\underset{j}{\check C}{}^\alpha_{\beta\tau}\,\overset{j}{K}{}^\tau_{\gamma\varepsilon}, \tag{22}$$

$$\underset{j}{P}{}^\alpha_{\beta\varepsilon\gamma}=\underset{j}{\check C}{}^\alpha_{\beta\varepsilon\gamma}-\underset{jk}{\check C}{}^\alpha_{\beta\varepsilon\sigma}\,\overset{k}{\tilde E}{}^\sigma_\gamma-\underset{i}{\overset{i}{\check L}}{}^\tau_{\beta\gamma}\,\underset{j}{\check C}{}^\alpha_{\tau\varepsilon}-\underset{j}{\check C}{}^\alpha_{\beta\tau}\,\underset{i}{\overset{i}{\check L}}{}^\tau_{\varepsilon\gamma}+\underset{j}{\check C}{}^\tau_{\beta\varepsilon}\,\underset{i}{\overset{i}{\check L}}{}^\alpha_{\tau\gamma}-c^k_j\,\underset{k}{\check C}{}^\alpha_{\beta\varepsilon}\,\underset{i}{\overset{i}{\check L}}{}^\tau_{\tau\gamma}-\underset{ik}{\overset{i}{\check L}}{}^\alpha_{\beta\gamma\tau}\,\underset{j}{\overset{k}{\tilde E}}{}^\tau_\varepsilon+\underset{k}{\check C}{}^\alpha_{\beta\sigma}\,\overset{k}{P}{}^\sigma_{\varepsilon\gamma}, \tag{23}$$

$$\underset{jk}{S}{}^\alpha_{\beta\varepsilon\tau}=2\,{}_{\{}\underset{j|l|}{\check C}{}^\alpha_{|\beta|\varepsilon|\gamma|}\,\underset{k}{\overset{l}{\tilde E}}{}^\gamma_{\tau\}}-2\,{}_{\{}\underset{k}{\check C}{}^\gamma_{|\beta|\tau}\,\underset{j}{\check C}{}^\alpha_{|\gamma|\varepsilon\}}+\underset{l}{\check C}{}^\alpha_{\beta\sigma}\,(\underset{kj}{\overset{l}{S}}{}^\sigma_{\tau\varepsilon}-2\,\delta^{\ l}_{\{j}\,\underset{k}{\check C}{}^\sigma_{\varepsilon\tau\}}-2\,c^{\ l}_{\{j}\,\delta^\sigma_\varepsilon\,\underset{k}{\check C}{}^\gamma_{|\gamma|\tau\}}), \tag{24}$$

$$\overset{i}{K}{}^\alpha_{\varepsilon\gamma}=2\,\underset{k}{\overset{i}{E}}{}^\alpha_\tau\,(\overset{k}{\tilde E}{}^\tau_{[\varepsilon\gamma]}-\overset{k}{\tilde E}{}^\tau_{[\varepsilon|\sigma|}\,\underset{j}{\overset{j}{\tilde E}}{}^\sigma_{\gamma]}), \tag{25}$$

$$\underset{j}{\overset{i}{P}}{}^\alpha_{\varepsilon\gamma}=\underset{l}{\overset{i}{E}}{}^\alpha_\tau\Big(\underset{j}{\overset{l}{\tilde E}}{}^\tau_{\varepsilon\gamma}+\underset{p}{\overset{l}{\tilde E}}{}^\tau_{\gamma\sigma}\,\underset{j}{\overset{p}{\tilde E}}{}^\sigma_\varepsilon-\underset{p}{\overset{l}{\tilde E}}{}^\tau_\rho\,(\underset{jk}{\overset{p}{\tilde E}}{}^\rho_{\varepsilon\sigma}\,\overset{k}{\tilde E}{}^\sigma_\gamma+\delta^p_j\,\underset{r}{\overset{r}{\check L}}{}^\rho_{\varepsilon\gamma}+c^p_j\,\underset{r}{\overset{r}{\check L}}{}^\sigma_{\sigma\gamma}\,\delta^\rho_\varepsilon)\Big), \tag{26}$$

$$\underset{jk}{\overset{i}{S}}{}^\alpha_{\varepsilon\gamma}=2\,\underset{l}{\overset{i}{E}}{}^\alpha_\tau\,({}_{\{}\underset{j|p|}{\overset{l}{\tilde E}}{}^{\ \tau}_{\varepsilon|\sigma|}\,\underset{k}{\overset{p}{\tilde E}}{}^\sigma_{\gamma\}}+\delta^{\ l}_{\{j}\,\underset{k}{\check C}{}^\tau_{\varepsilon\gamma\}}+c^{\ l}_{\{j}\,\delta^\tau_\varepsilon\,\underset{k}{\check C}{}^\sigma_{|\sigma|\gamma\}}). \tag{27}$$

Скобки $\{\ldots\}$ означают алтернирование по двум парам индексов, например,

$${}_{\{}\underset{l}{\check C}{}^\gamma_{|\beta|\tau}\,\underset{j}{\check C}{}^\alpha_{|\gamma|\varepsilon\}}=\frac12\ (\underset{l}{\check C}{}^\gamma_{\beta\tau}\,\underset{j}{\check C}{}^\alpha_{\gamma\varepsilon}-\underset{j}{\check C}{}^\gamma_{\beta\varepsilon}\,\underset{l}{\check C}{}^\alpha_{\gamma\tau}).$$

Линеар $\underset{i}{\overset{i}{R}}{}^\alpha_{\varepsilon\beta}$ будем называть линеаром кручения пространства $L_{n,v}$, $\underset{i}{\overset{i}{K}}{}^\alpha_{\beta\gamma\varepsilon}$ – первым картановым линеаром кривизны, $\underset{j}{P}{}^\alpha_{\beta\varepsilon\gamma}$ – вторым картановым линеаром кривизны и $\underset{jk}{S}{}^\alpha_{\beta\varepsilon\gamma}$ – третьим картановым линеаром кривизны. Линеары $\overset{i}{K}{}^\alpha_{\varepsilon\gamma}$, $\underset{j}{\overset{i}{P}}{}^\alpha_{\varepsilon\gamma}$ и $\underset{jk}{\overset{i}{S}}{}^\alpha_{\varepsilon\gamma}$ будем называть соответственно первым, вторым и третьим картановыми линеарами допольнительной кривизны.

Инвариантное дифференцирование. Если дано поле линеара, определенное дифференциальными уравнениями

$$d\overset{i}{T}{}^{\alpha_1\dots\alpha_p}_{\beta_1\dots\beta_q}+\sum_{t=1}^{p}\overset{i}{T}{}^{\alpha_1\dots\gamma\dots\alpha_p}_{\beta_1\dots\beta_q}\omega^{\alpha_t}_{\gamma}-\sum_{f=1}^{q}\overset{i}{T}{}^{\alpha_1\dots\alpha_p}_{\beta_1\dots\gamma\dots\beta_q}\omega^{\gamma}_{\beta_f}+$$
$$+c^i_k\overset{k}{T}{}^{\alpha_1\dots\alpha_p}_{\beta_1\dots\beta_q}\omega^{\gamma}_{\gamma}=\overset{i}{T}{}^{\alpha_1\dots\alpha_p}_{\varepsilon,\beta_1\dots\beta_q}\omega^{\varepsilon}+\underset{j}{\overset{i}{T}}{}^{\alpha_1\dots\alpha_p}_{\varepsilon,\beta_1\dots\beta_q}\overset{j}{\Theta}{}^{\varepsilon},$$

то аппарат инвариантного дифференцирования получим заменой в этих уравнениях ω^α_β их выражениями через $\tilde\omega^\alpha_\beta$ из уравнений (10′). Таким образом получаем, что инвариантный дифференциал определяется равенствами

$$\delta\overset{i}{T}{}^{\alpha_1\dots\alpha_p}_{\beta_1\dots\beta_q}=\Big(\overset{i}{T}{}^{\alpha_1\dots\alpha_p}_{\varepsilon,\beta_1\dots\beta_q}+\sum_{t=1}^{p}\overset{i}{T}{}^{\alpha_1\dots\gamma\dots\alpha_p}_{\beta_1\dots\beta_q}\underset{j}{\overset{j}{\check L}}{}^{\alpha_t}_{\gamma\varepsilon}-\sum_{f=1}^{q}\overset{i}{T}{}^{\alpha_1\dots\alpha_p}_{\beta_1\dots\gamma\dots\beta_q}\underset{j}{\overset{j}{\check L}}{}^{\gamma}_{\beta_f\varepsilon}+$$
$$+c^i_j\overset{j}{T}{}^{\alpha_1\dots\alpha_p}_{\beta_1\dots\beta_q}\underset{k}{\overset{k}{\check L}}{}^{\gamma}_{\gamma\varepsilon}-\underset{j}{\overset{i}{T}}{}^{\alpha_1\dots\alpha_p}_{\gamma,\beta_1\dots\beta_q}\overset{j}{\check E}{}^{\gamma}_{\varepsilon}\Big)\omega^{\varepsilon}+\Big(\underset{j}{\overset{i}{T}}{}^{\alpha_1\dots\alpha_p}_{\varepsilon,\beta_1\dots\beta_q}\underset{k}{\overset{j}{\check E}}{}^{\varepsilon}_{\gamma}+$$
$$+\sum_{t=1}^{p}\overset{i}{T}{}^{\alpha_1\dots\sigma\dots\alpha_p}_{\beta_1\dots\beta_q}\underset{k}{\check C}{}^{\alpha_t}_{\sigma\gamma}-\sum_{f=1}^{q}\overset{i}{T}{}^{\alpha_1\dots\alpha_p}_{\beta_1\dots\sigma\dots\beta_q}\underset{k}{\check C}{}^{\sigma}_{\beta_f\gamma}+c^i_j\overset{j}{T}{}^{\alpha_1\dots\alpha_p}_{\beta_1\dots\beta_q}\underset{k}{\check C}{}^{\sigma}_{\sigma\gamma}\Big)\overset{k}{\tilde\Theta}{}^{\gamma}.$$

Величины

$$\delta_\varepsilon\overset{i}{T}{}^{\alpha_1\dots\alpha_p}_{\beta_1\dots\beta_q}=\overset{i}{T}{}^{\alpha_1\dots\alpha_p}_{\varepsilon,\beta_1\dots\beta_q}-\underset{j}{\overset{i}{T}}{}^{\alpha_1\dots\alpha_p}_{\gamma,\beta_1\dots\beta_q}\overset{j}{\check E}{}^{\gamma}_{\varepsilon}+\sum_{t=1}^{p}\overset{i}{T}{}^{\alpha_1\dots\gamma\dots\alpha_p}_{\beta_1\dots\beta_q}\underset{j}{\overset{j}{\check L}}{}^{\alpha_t}_{\gamma\varepsilon}-$$
$$-\sum_{f=1}^{q}\overset{i}{T}{}^{\alpha_1\dots\alpha_p}_{\beta_1\dots\gamma\dots\beta_q}\underset{j}{\overset{j}{\check L}}{}^{\gamma}_{\beta_f\varepsilon}+c^i_k\overset{k}{T}{}^{\alpha_1\dots\alpha_p}_{\beta_1\dots\beta_q}\underset{l}{\overset{l}{\check L}}{}^{\gamma}_{\gamma\varepsilon}$$

и

$$\underset{k}{\delta_\gamma}\overset{i}{T}{}^{\alpha_1\dots\alpha_p}_{\beta_1\dots\beta_q}=\underset{j}{\overset{i}{T}}{}^{\alpha_1\dots\alpha_p}_{\varepsilon,\beta_1\dots\beta_q}\underset{k}{\overset{j}{\check E}}{}^{\varepsilon}_{\gamma}+\sum_{t=1}^{p}\overset{i}{T}{}^{\alpha_1\dots\sigma\dots\alpha_p}_{\beta_1\dots\beta_q}\underset{k}{\check C}{}^{\alpha_t}_{\sigma\gamma}-$$
$$-\sum_{f=1}^{q}\overset{i}{T}{}^{\alpha_1\dots\alpha_p}_{\beta_1\dots\sigma\dots\beta_q}\underset{k}{\check C}{}^{\sigma}_{\beta_f\gamma}+c^i_j\overset{j}{T}{}^{\alpha_1\dots\alpha_p}_{\beta_1\dots\beta_q}\underset{k}{\check C}{}^{\sigma}_{\sigma\gamma}$$

будем называть соответственно инвариантными производными линеара первого и второго рода. Используя инвариантную производную первого рода, равенства (23) можно записать в виде:

$$\underset{j}{P}{}^{\alpha}_{\beta\varepsilon\gamma}=\underset{j}{\delta_\gamma}\check C^{\alpha}_{\beta\varepsilon}-\underset{ik}{\overset{i}{\check L}}{}^{\alpha}_{\beta\gamma\tau}\underset{j}{\overset{k}{\check E}}{}^{\tau}_{\varepsilon}+\underset{k}{\check C}{}^{\alpha}_{\beta\sigma}\underset{j}{\overset{k}{P}}{}^{\sigma}_{\varepsilon\gamma}. \tag{23′}$$

Тождества Бианки. Тождества, которые являются аналогами тождеств Бианки, мы получим, дифференцируя внешним образом уравнения (18)—(20). Они имеют вид:

$$D\Omega^{\alpha}=[\tilde\omega^{\alpha}_{\varepsilon},\ \Omega^{\varepsilon}]+[\omega^{\varepsilon},\ \Omega^{\alpha}_{\varepsilon}], \tag{28}$$

$$D\Omega^{\beta}_{\alpha}=[\tilde\omega^{\gamma}_{\alpha},\ \Omega^{\beta}_{\gamma}]-[\Omega^{\gamma}_{\alpha},\ \tilde\omega^{\beta}_{\gamma}], \tag{29}$$

$$D\overset{i}{\Omega}{}^{\alpha}=[\overset{i}{\tilde\Theta}{}^{\gamma},\ \Omega^{\alpha}_{\gamma}]+c^i_k[\overset{k}{\tilde\Theta}{}^{\alpha},\ \Omega^{\gamma}_{\gamma}]-[\overset{i}{\Omega}{}^{\gamma},\ \tilde\omega^{\alpha}_{\gamma}]-c^i_k[\overset{k}{\Omega}{}^{\alpha},\ \tilde\omega^{\gamma}_{\gamma}], \tag{30}$$

где

$$\Omega^{\alpha}=\frac{1}{2}\,\overset{i}{\underset{l}{R}}{}^{\alpha}_{\varepsilon\beta}\,[\omega^{\varepsilon},\ \omega^{\beta}]+\overset{k}{\underset{k}{\check{C}}}{}^{\alpha}_{\varepsilon\beta}\,[\tilde{\Theta}^{\beta},\ \omega^{\varepsilon}],\tag{31}$$

$$\Omega^{\beta}_{\alpha}=\frac{1}{2}\,\overset{i}{\underset{i}{K}}{}^{\beta}_{\alpha\gamma\varepsilon}\,[\omega^{\varepsilon},\ \omega^{\gamma}]+\overset{i}{\underset{j}{P}}{}^{\beta}_{\alpha\varepsilon\gamma}\,[\overset{j}{\tilde{\Theta}}{}^{\varepsilon},\ \omega^{\gamma}]+\frac{1}{2}\,\underset{jk}{S}{}^{\beta}_{\alpha\varepsilon\gamma}\,[\overset{j}{\tilde{\Theta}}{}^{\varepsilon},\ \overset{k}{\tilde{\Theta}}{}^{\gamma}],\tag{32}$$

$$\overset{i}{\Omega}{}^{\alpha}=\frac{1}{2}\,\overset{i}{K}{}^{\alpha}_{\varepsilon\gamma}\,[\omega^{\varepsilon},\ \omega^{\gamma}]+\overset{i}{\underset{j}{P}}{}^{\alpha}_{\varepsilon\gamma}\,[\overset{j}{\tilde{\Theta}}{}^{\varepsilon},\ \omega^{\gamma}]+\frac{1}{2}\,\overset{i}{\underset{jk}{S}}{}^{\alpha}_{\varepsilon\gamma}\,[\overset{j}{\tilde{\Theta}}{}^{\varepsilon},\ \overset{k}{\tilde{\Theta}}{}^{\gamma}].\tag{33}$$

Если в (28) выполнить вычисления, подставляя выражения форм Ω^{α} из (31), Ω^{β}_{α} из (32) и $\tilde{\omega}^{\alpha}_{\varepsilon}$ из (10′), и разложить полученный результат по независимым внешним кубическим формам $[\omega^{\alpha},\ \omega^{\beta},\ \omega^{\gamma}]$, $[\omega^{\alpha},\ \omega^{\beta},\ \overset{j}{\tilde{\Theta}}{}^{\gamma}]$, $[\omega^{\alpha},\ \overset{j}{\tilde{\Theta}}{}^{\gamma},\ \overset{k}{\tilde{\Theta}}{}^{\varepsilon}]$, то, приравнивая нулю коэффициенты при этих формах, получим (24) и еще следующие соотношения:

$$\overset{i}{\underset{i}{K}}{}^{\beta}_{[\alpha\gamma\varepsilon]}-2\delta_{[\alpha}\,\overset{i}{\underset{|i|}{R}}{}^{\beta}_{\gamma\varepsilon]}+4\,\overset{i}{\underset{i}{R}}{}^{\sigma}_{[\alpha\gamma}\,\overset{j}{\underset{|j|}{R}}{}^{\beta}{}_{|\sigma|\varepsilon]}-\underset{k}{\check{C}}{}^{\beta}_{[\alpha|\sigma|}\,\overset{k}{K}{}^{\sigma}_{\gamma\varepsilon]}=0,\tag{34}$$

$$\underset{j}{\delta_{\sigma}}\,\overset{i}{\underset{i}{R}}{}^{\beta}_{\alpha\gamma}-\underset{j}{\check{C}}{}^{\beta}_{\tau\sigma}\,\overset{i}{\underset{i}{R}}{}^{\tau}_{\alpha\gamma}+2\,\overset{i}{\underset{i}{R}}{}^{\beta}_{[\alpha|\tau|}\,\underset{|j|}{\check{C}}{}^{\tau}_{\gamma]\sigma}+\delta_{[\alpha}\,\underset{|j|}{\check{C}}{}^{\beta}_{\gamma]\sigma}+\underset{k}{\check{C}}{}^{\beta}_{[\alpha|\tau|}\,\overset{k}{\underset{|j|}{P}}{}^{\tau}{}_{|\sigma|\gamma]}-\underset{j}{P}{}^{\beta}_{[\alpha|\sigma|\gamma]}=0.\tag{35}$$

Выполнив аналогичные вычисления, из (29) получаем:

$$\delta_{[\alpha}\,\overset{i}{\underset{|i|}{K}}{}^{\beta}{}_{|\sigma|\gamma\varepsilon]}-\underset{k}{P}{}^{\beta}_{\sigma\tau[\alpha}\,\overset{k}{K}{}^{\tau}_{\gamma\varepsilon]}-2\,\overset{l}{\underset{i}{K}}{}^{\beta}_{\sigma\tau[\alpha}\,\overset{j}{\underset{|j|}{R}}{}^{\tau}_{\gamma\varepsilon]}=0,\tag{36}$$

$$\underset{j}{\delta_{\sigma}}\,\overset{i}{\underset{i}{K}}{}^{\beta}_{\alpha\gamma\varepsilon}-2\,\overset{i}{\underset{i}{K}}{}^{\beta}_{\alpha\tau[\gamma}\,\underset{|j|}{\check{C}}{}^{\tau}_{\varepsilon]\sigma}-2\,\delta_{[\gamma}\,\underset{|j|}{P}{}^{\beta}{}_{|\alpha\sigma|\varepsilon]}+2\,\underset{j}{P}{}^{\beta}_{\alpha\sigma\tau}\,\overset{l}{\underset{l}{R}}{}^{\tau}_{\gamma\varepsilon}+2\,\underset{k}{P}{}^{\beta}_{\alpha\tau[\gamma}\,\overset{k}{\underset{|j|}{P}}{}^{\tau}{}_{|\sigma|\varepsilon]}+\underset{kj}{S}{}^{\beta}_{\alpha\tau\sigma}\,\overset{k}{K}{}^{\tau}_{\gamma\varepsilon}=0,\tag{37}$$

$$\left\{\underset{j}{\delta_{\sigma}}\,\underset{k}{P}{}^{\beta}{}_{|\alpha|\varepsilon}\right\}_{\gamma}+\left\{\underset{j}{\check{C}}{}^{\tau}{}_{|\gamma|\sigma}\,\underset{k}{P}{}^{\beta}{}_{|\alpha|\varepsilon}\right\}_{\tau}+\frac{1}{2}\,\underset{l}{P}{}^{\beta}_{\alpha\tau\gamma}\,\overset{l}{\underset{jk}{S}}{}^{\tau}_{\sigma\varepsilon}-\underset{l}{\left\{\underset{k}{S}{}^{\beta}{}_{|\alpha\tau|\varepsilon}\,\overset{l}{\underset{j}{P}}{}^{\tau}_{\sigma}\right\}}_{\gamma}-\frac{1}{2}\,\delta_{\gamma}\,\underset{jk}{S}{}^{\beta}_{\alpha\sigma\varepsilon}=0\tag{38}$$

и

$$\left\{\underset{l}{\delta_{\sigma}}\,\underset{jk}{S}{}^{\beta}{}_{|\alpha|\varepsilon\gamma}\right\}+\underset{p}{\left\{\underset{l}{S}{}^{\beta}{}_{|\alpha\tau|\sigma}\,\overset{p}{\underset{jk}{S}}{}^{\tau}_{\varepsilon\gamma}\right\}}=0.\tag{39}$$

Из (30), в силу (32), (33) и (10′), следуют тождества:

$$\delta_{[\alpha}\,\overset{i}{K}{}^{\beta}_{\gamma\varepsilon]}+\overset{i}{\underset{j}{P}}{}^{\beta}_{[\alpha|\sigma|}\,\overset{j}{K}{}^{\sigma}_{\varepsilon\gamma]}=0,\tag{40}$$

$$\frac{1}{2}\,\underset{j}{\delta_{\sigma}}\,\overset{l}{K}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}+\overset{i}{K}{}^{\alpha}_{\tau[\varepsilon}\,\underset{|j|}{\check{C}}{}^{\tau}_{\gamma]\sigma}-\delta_{[\gamma}\,\overset{i}{\underset{|j|}{P}}{}^{\alpha}{}_{|\sigma|\varepsilon]}+\overset{l}{\underset{j}{P}}{}^{\alpha}_{\sigma\tau}\,\overset{k}{\underset{k}{R}}{}^{\tau}_{\gamma\varepsilon}+\overset{i}{\underset{k}{P}}{}^{\alpha}_{\tau[\gamma}\,\overset{k}{\underset{|j|}{P}}{}^{\tau}{}_{|\sigma|\varepsilon]}+$$
$$+\frac{1}{2}\,\overset{i}{\underset{lj}{S}}{}^{\alpha}_{\tau\sigma}\,\overset{l}{K}{}^{\tau}_{\gamma\varepsilon}-\frac{1}{2}\,(\delta^{i}_{j}\,\overset{k}{\underset{k}{K}}{}^{\alpha}_{\sigma\gamma\varepsilon}+c^{i}_{j}\,\overset{k}{\underset{k}{K}}{}^{\tau}_{\tau\gamma\varepsilon})=0,\tag{41}$$

$$\left\{\underset{k}{\delta_{\varepsilon}}\,\overset{i}{\underset{j}{P}}{}^{\alpha}_{\sigma}\right\}_{\beta}+\left\{\overset{i}{\underset{j}{P}}{}^{\alpha}_{\sigma|\tau|}\,\underset{k}{\check{C}}{}^{\tau}{}_{|\beta|\varepsilon}\right\}+\frac{1}{2}\,\delta_{\beta}\,\overset{i}{\underset{jk}{S}}{}^{\alpha}_{\sigma\varepsilon}+\underset{l}{\left\{\overset{i}{\underset{k}{S}}{}^{\alpha}{}_{|\tau|\varepsilon}\,\overset{l}{\underset{j}{P}}{}^{\tau}_{\sigma}\right\}}_{\beta}+$$
$$+\frac{1}{2}\,\overset{i}{\underset{l}{P}}{}^{\alpha}_{\tau\beta}\,\overset{l}{\underset{kj}{S}}{}^{\tau}_{\varepsilon\sigma}+\delta_{\left\{j\right.}\,\overset{i}{\underset{\left.k\right\}}{P}}{}^{\alpha}_{\sigma\varepsilon}+c^{\ i}_{\left\{j\right.}\,\delta^{\alpha}_{\sigma}\,\underset{\left.k\right\}}{P}{}^{\tau}{}_{|\tau|\varepsilon\,\beta}=0\tag{42}$$

и

$$\left\{\underset{l}{\delta_{\sigma}}\,\overset{i}{\underset{jk}{S}}{}^{\alpha}_{\varepsilon\gamma}\right\}+2\,\underset{p}{\left\{\overset{i}{\underset{k}{S}}{}^{\alpha}{}_{|\tau|\gamma}\,\overset{p}{\underset{lj}{S}}{}^{\tau}_{\gamma\varepsilon}\right\}}-\delta_{\left\{k\right.}\,\overset{i}{\underset{\left.lj\right\}}{S}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon\sigma}-c^{\ i}_{\left\{k\right.}\,\delta^{\alpha}_{\gamma}\,\underset{\left.lj\right\}}{S}{}^{\tau}{}_{|\tau|\varepsilon\sigma}=0.\tag{43}$$

Тождества (34) – (43) аналогичны тождествам Бианки пространства копункторов [1].

Считаю своим приятным долгом поблагодарить доц. В. Близникаса за руководство и помощь в работе.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
21.II.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Близникас. Полный объект центро-проективной связности и объект кручения-кривизны пространства центральных копункторов, Лит. мат. сб., **IV**, № 4 (1964).
2. Б. Л. Лаптев. Ковариантный дифференциал и теория дифференциальных инвариантов в пространстве тензорных опорных элементов, Учен. зап. Казанского гос. ун-та, 118, кн. 4, (1958).
3. А. Е. Либер. О дифференциальных комитантах некоторых линейных объектов, Изв. высш. учебн. зав., 6 (19), 1960.

APIE ATRAMINIŲ LINEARŲ ERDVĘ

J. ŠINKŪNAS

(*Reziumė*)

Šiame straipsnyje nagrinėjamas atskiras atraminių elementų erdvės atvejis. Už atraminį elementą imamas objektas $\overset{i}{v}{}^{\alpha}$ [3] ir nagrinėjama erdvė, vadinama atraminių linearų erdve. Sudaryta šios erdvės kreivumo teorija.

SUR L'ESPACE DES LINÉARS D'APPUIS

J. ŠINKŪNAS

(*Résumé*)

Dans cet article on expose un cas particulier d'espace des éléments d'appuis. On prend object $\overset{i}{v}{}^{\alpha}$ [3] pour un élément d'appui et l'espace envisagé est nommé l'espace des linéars d'appuis. On élabore la théorie de courbure de cet espace.