VI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 4
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1966

ОГРАНИЧЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

А. С. АВДЖЯН

I. Введение

Н. Н. Красовский [2] ввел специальные функционалы для исследования устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Эти функционалы будем называть функционалами Ляпунова—Красовского.

В настоящей статье с помощью функционалов Ляпунова—Красовского исследуется равномерная ограниченность и равномерная ограниченность в пределе решений некоторых систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Рассматривается система дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t)=f\Big[t,\ x(t),\ x\big(t-\tau_1(t)\big),\ \ldots,\ x\big(t-\tau_m(t)\big)\Big], \tag{1}$$

где $x(t)$ и f обозначают вектор-функции, $\tau_i(t)\geqslant 0$ $(i=1,\ \ldots,\ m)$.

Рассмотрим множество E_{t_0}, которое состоит из точки t_0 и из всех значений $t-\tau_i(t)$ $(i=1,\ \ldots,\ m)$, которые меньше t_0 при $t\geqslant t_0$. Множество E_{t_0} называется начальным множеством. Начальная функция $\varphi(t)$, которая является вектор-функцией, задается на начальном множестве $E_{t_0}=[t_0-\tau,\ t_0]$.

Предполагается, что в системе (1) функции f, φ и τ удовлетворяют условиям существования и единственности решения (см., например, [1], [4], [5]).

Систему (1) можно записать в виде

$$\dot{x}(t)=f[t,\ x(t+s)], \tag{2}$$

где компонентами вектора f являются функционалы, определенные на множестве непрерывных функций на $[-\tau,\ 0]$, $\tau>0$.

Пусть C_{t_0} пространство непрерывных функций, заданных на E_{t_0} с нормой

$$\|\varphi\|_{C_{t_0}}=\sup_{t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0}\|\varphi(t)\|.$$

Дадим сводку символов, которые будут использованы в дальнейшем:

I — интервал $0\leqslant t<\infty$,

$\|\varphi\|$ — евклидова норма вектора φ,

E_H — множество начальных функций φ, для которых $\|\varphi\|\leqslant H$,

$E^*_{H_0}$ — множество начальных функций φ, для которых $\|\varphi\|\geqslant H_0$,

Δ — топологическое произведение пространств $I\times E_H$,

Δ^* — топологическое произведение пространств $I\times E^*_{H_0}$,

$x(t;\varphi,t_0)$ — решение системы (2) с начальной функцией φ в начальный момент времени t_0,

$f\in c_0(x)$ — обозначает, что правая часть системы (2) удовлетворяет условию Липшица по x с постоянной константой.

Определение 1. Решение $x(t;\ \varphi,\ t_0)$ системы (2) называется ограниченным, если существует положительное число β, такое, что $\|x(t;\ \varphi,\ t_0)\|\leqslant\beta$ для $t\geqslant t_0$. Если все решения системы (2) ограничены, мы скажем, что решения системы (2) ограничены.

Определение 2. Решения системы (2) называются равномерно ограниченными, если для всех решений $x(t;\ \varphi,\ t_0)$ с $\varphi\in E_H$ существует $\beta>0$ такое, что $\|x(t;\ \varphi,\ t_0)\|\leqslant\beta$ для $t\geqslant t_0$, причем β зависит только от H, но не зависит от t_0.

Определение 3. Решение $x(t;\ \varphi,\ t_0)$ системы (2) называется ограниченным в пределе границей B, если существуют положительные числа B и T, такие, что $\|x(t;\ \varphi,\ t_0)\|\leqslant B$ для $t>t_0+T$, где B не зависит от частного решения, тогда как T может зависеть от решения.

Определение 4. Решения системы (2) называются равномерно ограниченными в пределе границей B, если для всех решений $x(t;\ \varphi,\ t_0)$, где $\varphi\in E_H$, существуют такие числа B и T, что $\|x(t;\ \varphi,\ t_0)\|\leqslant B$ для $t>t_0+T$. Причем, T зависит от H, но не зависит от t_0.

Определение 5. Тривиальное решение системы (2) называется равномерно асимптотически устойчивым, если существует такое $\delta>0$, что для каждого $\varepsilon>0$ существует $T(\varepsilon)$ такое, что при $t>t_1+T(\varepsilon)$ $\|x(t;\ \varphi, t_0)\|<\varepsilon$ для любой непрерывной начальной функции $\varphi(t)$, удовлетворяющей неравенству $\|\varphi(t)\|<\delta$ на начальном множестве E_{t_1}, где δ не зависит от выбора t_1, $t_1\geqslant t_0$.

Определение 6. Функционал Ляпунова—Красовского $v[t,\varphi]=v[t,\ \varphi_1(s),\ \ldots,\ \varphi_n(s)]$, определенный на вектор-функции $\{\varphi_1(s),\ \varphi_2(s),\ \ldots,\ \varphi_n(s)\}$ $(-\tau\leqslant s\leqslant 0)$, называется определенно-положительным в Δ, если можно указать непрерывную функцию $\omega(r)>0$ при $r\neq 0$, $\omega(0)=0$, удовлетворяющую условию $v[t,\ \varphi]\geqslant\omega(\|\varphi\|)$.

Аналогично дается определение определенно-отрицательного функционала Ляпунова—Красовского.

Для упрощения формулировок введем несколько соглашений.

Скажем, что функционал Ляпунова—Красовского $v[t,\ \varphi]$ обладает свойством A, если существует непрерывная, возрастающая функция $a(r)$, такая, что $v[t,\ \varphi]\leqslant a(\|\varphi\|)$. Скажем, что функционал Ляпунова—Красовского $v[t,\ \varphi]$ обладает свойством B, если существует неотрицательная, непрерывная функция $b(r)$, такая, что $v[t,\ \varphi]\geqslant b(\|\varphi\|)$, причем, $b(r)\to\infty$ при $r\to\infty$. Наконец, мы скажем, что функционал Ляпунова—Красовского $v[t,\ \varphi]$ обладает свойством C, если существует положительная, непрерывная функция $c(r)$, такая, что правое верхнее производное число удовлетворяет неравенству

$$\limsup_{h\to+0}\frac{v[t+h,\ x(t+h+s;\ \varphi,\ t)]-v[t,\ x(t+s)]}{h}\leqslant -c(\|\varphi\|),$$

где

$$s\in[-\tau,\ 0],\quad h>0.$$

II. Ограниченность

Приведем сначала несколько известных фактов (см. [2], [8], [9]), которые нам понадобятся при доказательстве основных теорем.

1. Если в системе (2) $f \in c_0(x)$, то справедливо неравенство

$$\| x(t;\ \varphi_1,\ t_0) - x(t;\ \varphi_2,\ t_0) \| \leqslant \| \varphi_1 - \varphi_2 \| \cdot e^{L(t-t_0)}, \tag{3}$$

где L — постоянная Липшица.

2. Пусть даны системы

$$x(t) = f[t,\ x(t+s)] + g[t,\ x(t+s)]$$

и

$$\dot{y}(t) = f[t,\ y(t+s)] \quad \text{с} \quad f \in c_0(x).$$

Решения этих систем соответственно обозначим через $x(t;\ \varphi,\ t_0)$ и $y(t;\ \varphi,\ t_0)$. Тогда имеет место следующее неравенство

$$\| y(t;\ \varphi,\ t_0) - x(t;\ \varphi,\ t_0) \| \leqslant (e^{L(t-t_0)} - 1)\ \sup | g[t,\ x(t+s)] |. \tag{4}$$

3. **Теорема 1** (Халанай [8]). *Если тривиальное решение линейной системы $x(t) = A[t,\ x(t+s)]$ (5) равномерно асимптотически устойчиво, то существует функционал $v[t,\ \varphi]$, определенный для всех $t \geqslant 0$ в пространстве $C[-\tau,\ 0]$, обладающий свойствами*:

1° $\| \varphi \|^2 \leqslant v[t,\ \varphi] \leqslant k_1 \cdot \| \varphi \|^2$,

2° $| v[t,\ \varphi_1] - v[t,\ \varphi_2] | \leqslant k_1 (\| \varphi_1 \| + \| \varphi_2 \|) \cdot \| \varphi_1 - \varphi_2 \|$,

3° $\limsup\limits_{h \to +0} \dfrac{v[t+h,\ x(t+h+s;\ \varphi,\ t_0)] - v[t,\ x(t+s;\ \varphi,\ t_0)]}{h} \leqslant -\| x(t+s;\ \varphi,\ t_0) \|^2$.

Теорема 2 (Йосидзава [9]). *Если существует положительный функционал Ляпунова—Красовского $v[t,\ \varphi]$, определенный на Δ^* и обладающий свойствами A, B и C, то решения системы* (2) *равномерно ограничены в пределе.*

Теорема 3. *Если существует непрерывный функционал Ляпунова—Красовского $v[t,\ \varphi]$, определенный на Δ^* и обладающий свойствами A и B, и если функция $v^*(t) = v[t,\ x(t+s;\ \varphi,\ t_0)]$ монотонно убывает внутри Δ^* при $t \geqslant t_0$, $s \in [-\tau,\ 0]$, то решения системы* (2) *равномерно ограничены.*

Доказательство. По свойству A для данного H_1 (пусть $H_1 > H_0$) имеем $v[t,\ \varphi] \leqslant a(H_1)$ при $\| \varphi \| = H_1$. По свойству B можно выбрать $H_2 > H_1$ таким, что $b(H_2) > a(H_1)$.

Рассмотрим некоторое решение $x(t;\ \varphi,\ t_0)$ системы (2) с начальной функцией $\varphi \in E_{H_1}$, где $t \in I$, и функцию $v^*(t) = v[t,\ x(t+s;\ \varphi,\ t_0)]$. Предположим, что в некоторый момент $t = t_2$ выполняется равенство $\| x(t_2;\ \varphi,\ t_0) \| = H_2$. В противном случае теорема была бы доказана. Будем считать, что t_2 есть первый момент времени, когда это равенство обеспечено. Тогда в силу непрерывности решения и на основании того, что $\| x(t_0;\ \varphi,\ t_0) \| = \| \varphi(t_0) \| \leqslant H_1$, существует момент времени t_1, где $t_0 \leqslant t_1 < t_2$, что $\| x(t_1;\ \varphi,\ t_0) \| = H_1$. Пусть t_1 последний момент до момента t_2, при котором выполняется это равенство. Рассмотрев функцию $v^*(t)$ в моменты t_1 и t_2 и учитывая то, что

$$\| x(t_1+s;\ \varphi,\ t_0) \|_{C_{t_1}} = H_1, \qquad \| x(t_2+s;\ \varphi,\ t_0) \|_{C_{t_2}} = H_2,$$

получаем следующие неравенства

$$v^*(t_1) = v[t_1,\ x(t_1+s;\ \varphi,\ t_0)] \leqslant a(H_1) \quad \text{и} \quad v^*(t_2) = v[t_2,\ x(t_2+s;\ \varphi,\ t_0)] \geqslant b(H_2).$$

По условию теоремы $v^*(t)$ монотонно убывает внутри Δ^* при $t \geqslant t_0$, следовательно, $v^*(t_2) \leqslant v^*(t_1)$, а отсюда $b(H_2) \leqslant a(H_1)$. Получим противоречие тому, что $b(H_2) > a(H_1)$. Обозначив $H_2 = \beta$, получим, что для всех решений $x(t;\ \varphi,\ t_0)$ системы (2) с $\varphi \in E_{H_1}$ выполняется неравенство $\|x(t;\ \varphi,\ t_0)\| < \beta$, причем β зависит только от H_1, т. е. решения системы (2) равномерно ограничены. Теорема доказана.

Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = A[t,\ x(t+s)] + f[t,\ x(t+s)]. \tag{6}$$

Здесь $A[t,\ x(t+s)]$ — линейная часть системы (6), а $f[t,\ x(t+s)]$ — нелинейная часть.

Теорема 4. *Пусть решения укороченной линейной системы*

$$\dot{y}(t) = A[t,\ y(t+s)] \tag{7}$$

равномерно ограничены ($\|y(t;\ \varphi,\ t_0)\| \leqslant B \cdot \|\varphi\|$), *а решения системы* (6) *ограничены. Тогда, если для каждого решения* $x(t;\ \varphi,\ t_0)$ *существует такое* $B_1 > 0$, *что* $\|x(t;\ \varphi,\ t_0)\| \leqslant B_1 \cdot g(t) \cdot \|\varphi\|$, *причем*, $|f[t,\ x(t+s)]| \leqslant g(t) \cdot \|x(t+s)\|$ *для* $\|x(t+s)\| \leqslant H$, *где* $g(t)$ *некоторая непрерывная функция и при* $t \geqslant t_0$ *удовлетворяет условию* $0 \leqslant g(t) < \dfrac{1}{(2L+B_1)\cdot B}$ (L — постоянная Липшица), *то решения системы* (6) *равномерно ограничены.*

Доказательство. Пусть $x(t;\varphi,t_0)$ решение системы (6) и $y(t;\ \varphi,\ t_0)$ решение системы (7), где $t \in I$, $\varphi \in E_H$.

В силу равномерной ограниченности решений линейной системы (7) можно найти такое число $B > 1$, что $\|y(t;\ \varphi,\ t_0)\| \leqslant B \cdot \|\varphi\|$ для $t \geqslant t_0$.

Выберем функционал Ляпунова—Красовского

$$v[t,\ \varphi] = \sup_{\sigma \geqslant 0} \left\| y\left(t+\sigma+s;\ \varphi(u-t),\ t\right) \right\|, \tag{8}$$

где $t-\tau \leqslant u \leqslant t$, $-\tau \leqslant s \leqslant 0$, который определен в пространстве начальных функций, непрерывных на $[-\tau,\ 0]$.

Непрерывность функционала (8) доказана в книге [8].

Покажем, что функционал (8) удовлетворяет всем условиям теоремы 3 для системы (7). Действительно, очевидно, что при $\sigma = 0$ имеем

$$\left\| y\left(t+s;\ \varphi(u-t),\ t\right) \right\| = \|\varphi(u-t)\| = \|\varphi\|,$$

т. е.

$$v[t,\ \varphi] \geqslant \|\varphi\|. \tag{9}$$

В силу неравенства $\|y(t;\ \varphi,\ t_0)\| \leqslant B \cdot \|\varphi\|$ выполняется и неравенство

$$v[t,\ \varphi] \leqslant B \cdot \|\varphi\|. \tag{10}$$

Из неравенств (10) и (9) следует, что функционал (8) обладает свойствами A и B. Наконец, легко показать, что для любых двух значений t_2 и t_1, где $t_2 > t_1$, выполняется неравенство $v^*(t_2) - v^*(t_1) < 0$ вдоль решения $y(t;\ \varphi,\ t_0)$.

Рассмотрим решение $x(t;\ \varphi,\ t_0)$ системы (6) и функцию

$$v^*(t) = v[t,\ x(t+s;\ \varphi,\ t_0)].$$

Пусть $t_2 > t_1$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} v^*(t_2)-v^*(t_1) &= v[t_2,\ x(t_2+s;\ \varphi,\ t_0)]-v[t_1,\ x(t_1+s;\ \varphi,\ t_0)]= \\ &= \sup_{\sigma\geq 0}\left(\left\| x\left(t_2+\sigma+s;\ x(t_2+s;\ \varphi,\ t_0),\ t_2\right)\right\|\right)- \\ &-\sup_{\sigma\geq 0}\left(\left\| y\left(t_2+\sigma+s;\ x(t_2+s;\ \varphi,\ t_0),\ t_2\right)\right\|\right)+ \\ &+\sup_{\sigma\geq 0}\left(\left\| y\left(t_1+\sigma+s;\ x(t_1+s;\ \varphi,\ t_0),\ t_1\right)\right\|\right)- \\ &-\sup_{\sigma\geq 0}\left(\left\| x\left(t_1+\sigma+s;\ x(t_1+s;\ \varphi,\ t_0),\ t_1\right)\right\|\right)+ \\ &+\sup_{\sigma\geq 0}\left(\left\| y\left(t_2+\sigma+s;\ x(t_2+s;\ \varphi,\ t_0),\ t_2\right)\right\|\right)- \\ &-\sup_{\sigma\geq 0}\left(\left\| y\left(t_1+\sigma+s;\ x(t_1+s;\ \varphi,\ t_0),\ t_1\right)\right\|\right). \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Из (8) на основании неравенства (4) имеем:

$$\limsup_{h\to+0}\frac{v[t+h,\ x(t+h+s;\ \varphi,\ t)]-v[t+h,\ y(t+h+s;\ \varphi,\ t)]}{h}\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{h\to+0}\frac{(e^{Lh}-1)\,g(t)\cdot B\cdot\|\varphi\|}{h}=L\cdot g(t)\cdot B\cdot\|\varphi\|. \quad (12)$$

Оценивая каждую разность правой части равенства (11) на основании (12), получим

$$v^*(t_2)-v^*(t_1)\leqslant L\cdot g(t_2)\cdot B\cdot\|\varphi\|+L\cdot g(t_1)\cdot B\cdot\|\varphi\|+$$
$$+B\cdot\|x(t_2+s;\ \varphi,\ t_0)\|-\|\varphi\|. \quad (13)$$

По условию теоремы $\|x(t;\ \varphi,\ t_0)\|\leqslant B_1\cdot g(t)\cdot\|\varphi\|$. Тогда

$$\|x(t_2+s;\ \varphi,\ t_0)\|\leqslant B_1\cdot g(t_2)\cdot\|\varphi\|. \quad (14)$$

Подставляя оценку (14) в (13), получим

$$v^*(t_2)-v^*(t_1)\leqslant L\cdot g(t_2)\cdot B\cdot\|\varphi\|+L\cdot g(t_1)\cdot B\cdot\|\varphi\|+B\cdot B_1\cdot g(t_2)\cdot\|\varphi\|-\|\varphi\|.$$

Обозначим $\sup\limits_{t\in I} g(t)=M$.

Для того, чтобы $v^*(t_2)-v^*(t_1)<0$, достаточно выбрать функцию $g(t)$ так, что $M<\frac{1}{B(2L+B_1)}$ для $t\geqslant t_0$. Тогда по теореме 3 решения системы (6) равномерно ограничены. Теорема доказана.

Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t)&=f[t,\ x(t+s),\ y(t+s)], \\ \dot{y}(t)&=A[t,\ y(t+s)]+g[t,\ x(t+s),\ y(t+s)], \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

где для $\varphi\in E_{H_0}$, $\psi\in E_{H_0}$ выполняются неравенства

$$|f[t,\ x(t+s),\ y(t+s)]|<k\cdot\|x(t;\ \varphi,\ \psi,\ t_0)\| \quad (17)$$

и

$$|g[t,\ x(t+s),\ y(t+s)]|<k\cdot\|y(t;\ \varphi,\ \psi,\ t_0)\|,$$

где k — достаточно мало.

Рассмотрим линейную систему

$$\dot{z}(t)=A[t,\ z(t+s)]. \tag{18}$$

Теорема 5. *Если тривиальное решение системы* (18) *равномерно асимптотически устойчиво, то из равномерной ограниченности в пределе решений системы* (18) *вытекает равномерная ограниченность в пределе решений системы* (16).

Доказательство. Пусть $x(t;\ \varphi,\ \psi,\ t_0)$ и $y(t;\ \varphi,\ \psi,\ t_0)$ решение системы (16), $z(t;\ \psi,\ t_0)$ – решение системы (18) и $v[t,\ \psi]$ – функционал Ляпунова—Красовского, построенный для системы (18) и удовлетворяющий условиям теоремы 1, где $t\in I$, $\varphi\in E_{H_0}$, $\psi\in E_{H_0}$. Такой функционал $v[t,\ \psi]$ существует в силу линейности системы (18). $v[t,\ \varphi,\ \psi]$ – функционал, построенный для системы (16).

По свойству 1° теоремы 1 функционал $v[t,\ \psi]$ обладает свойствами A и B. Этими же свойствами будет обладать функционал $v[t,\ \varphi,\ \psi]$. Докажем, что функционал $v[t,\ \varphi,\ \psi]$ обладает свойством C.

Обозначим $v^*(t)=v[t,\ y(t+s;\ \varphi,\ \psi,\ t_0)]$ и рассмотрим следующее выражение:

$$\left.\begin{aligned}
&\limsup_{h\to+0}\frac{v^*(t+h)-v^*(t)}{h}=\\
&=\limsup_{h\to+0}\frac{v\left[t+h,\ y\left(t+h+s;\ y(t+s;\ \varphi,\ \psi,\ t_0),\ t\right)\right]-v\left[t,\ y(t+s;\ \varphi,\ \psi,\ t_0)\right]}{h}\leqslant\\
&\leqslant\limsup_{h\to+0}\frac{v\left[t+h,\ z\left(t+h+s;\ y(t+s;\ \varphi,\ \psi,\ t_0),\ t\right)\right]-v\left[t,\ y(t+s;\ \varphi,\ \psi,\ t_0)\right]}{h}+\\
&+\limsup_{h\to+0}\frac{v\left[t+h,y\left(t+h+s;y(t+s;\varphi,\psi,t_0),t\right)\right]-v\left[t+h,z\left(t+h+s;y(t+s;\varphi,\psi,t_0),t\right)\right]}{h}.
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

По свойству 2° теоремы 1, на основании неравенств (4) и (17) имеем

$$\begin{aligned}
&v\left[t+h,\ y\left(t+h+s;\ y(t+s;\ \varphi,\ \psi,\ t_0),\ t\right)\right]-\\
&-v\left[t+h,\ z\left(t+h+s;\ y(t+s;\ \varphi,\ \psi,\ t_0),\ t\right)\right]\leqslant\\
&\leqslant k_1\cdot\left(\left\|y(t+s;\ \varphi,\ \psi,\ t_0)\right\|+B\cdot\left\|y(t+s;\ \varphi,\ \psi,\ t_0)\right\|\right)\cdot\\
&\cdot(e^{Lh}-1)\cdot k\cdot\left\|y(t+s;\ \varphi,\ \psi,\ t_0)\right\|=\\
&=k_1\cdot k\cdot(1+B)\ (e^{Lh}-1)\cdot\left\|y(t+s;\ \varphi,\ \psi,\ t_0)\right\|^2.
\end{aligned}$$

В последней оценке учтено еще то, что из равномерной ограниченности в пределе решений системы (18) следует существование такого $B>0$, что

$$\left\|z\left(t+h+s;\ y(t+s;\ \varphi,\ \psi,\ t_0),\ t\right)\right\|<B\cdot\left\|y\left(t+s;\ \varphi,\ \psi,\ t_0),\ t\right)\right\|.$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to+0}\frac{k_1\cdot k\,(1+B)\cdot(e^{Lh}-1)\cdot\|y(t+s;\ \varphi,\ \psi,\ t_0)\|^2}{h}=\\
&=k_1\cdot k\cdot(1+B)\cdot L\cdot\|y(t+s;\ \varphi,\ \psi,\ t_0)\|^2.
\end{aligned} \tag{20}$$

По свойству 3° теоремы 1 функционала $v[t, \psi]$ и на основании равенства (20) из (19) окончательно получим

$$\limsup_{h\to+0} \frac{v^*(t+h)-v^*(t)}{h} \leqslant -\|y(t+s;\ \varphi,\ \psi,\ t_0)\|^2+$$
$$+k_1\cdot k\cdot L(1+B)\cdot\|y(t+s;\ \varphi,\ \psi,\ t_0)\|^2=$$
$$=-[1-k_1\cdot L\cdot k(1+B)]\cdot\|y(t+s;\ \varphi,\ \psi,\ t_0)\|^2.$$

Очевидно, что при $k<\frac{1}{k_1 L(1+B)}$ $\limsup\limits_{h\to+0}\frac{v^*(t+h)-v^*(t)}{h}<0$, т. е. функционал $v\ [t,\ \varphi,\ \psi]$ обладает свойством C. По теореме 2 решения системы (16) равномерно ограничены в пределе. Теорема доказана.

Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t)=A(t)\,x(t)+B(t)\cdot x(t-\tau), \tag{21}$$

где $x(t)$ матрица столбец, $A(t)$ и $B(t)$ $n\times n$ ограниченные матрицы, а запаздывание τ достаточно мало.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{y}(t)=[A(t)+B(t)]\cdot y(t). \tag{22}$$

Теорема 6. *Если решения системы* (22) *равномерно ограничены в пределе, то решения системы* (21) *тоже равномерно ограничены в пределе при достаточно малом* τ.

Доказательство. Так как решения системы (22) равномерно ограничены в пределе, то по доказанной Йосидзавой теореме [3], существует такая функция Ляпунова, которая обладает свойствами A, B и C на Δ^*. В частности, существует квадратичная форма $\big(v(t)\,y,\ y\big)$, где $v(t)$ непрерывно дифференцируемая ограниченная $n\times n$ матрица, производная которой в силу системы (22) равна $-\ (y,\ y)$.

Пусть $x(t)$ — некоторое решение системы (21), $t\in I$. Вычисляя выражение

$$\frac{d}{dt}\Big(v(t)\,x(t),\ x(t)\Big), \tag{23}$$

получим

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big(v(t)\,x(t),\ x(t)\Big)=\Big(\frac{dv}{dt}\,x(t),\ x(t)\Big)+\\
&+2\Big(v(t)\,\frac{dx(t)}{dt},\ x(t)\Big)=\Big(\frac{dv}{dt}\,x(t),\ x(t)\Big)+\\
&+2\Big(v(t)\Big(A(t)\,x(t)+B(t)\,x(t-\tau)\Big),\ x(t)\Big)=\\
&=\Big(\frac{dv}{dt}\,x(t),\ x(t)\Big)+2\Big(v(t)\Big(A(t)+B(t)\Big)\,x(t),\ x(t)\Big)+\\
&+2\Big(v(t)\,B(t)\Big(x(t-\tau)-x(t)\Big),\ x(t)\Big)=-\Big(x(t),\ x(t)\Big)+\\
&+2\Big(v(t)\,B(t)\int\limits_{t-\tau}^{t}\frac{dx(u)}{du}\,du,\ x(t)\Big)=-\Big(x(t),\ x(t)+\\
&+2\Big(v(t)\,B(t)\int\limits_{t-\tau}^{t}\Big[A(u)\,x(u)+B(u)\,x(u-\tau)\Big]du,\ x(t)\Big).
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Обозначим

$$L_1 = \sup_t |A(t)|, \quad L_2 = \sup_t |B(t)| \quad \text{и} \quad L_3 = \sup_t |v(t)\, B(t)|.$$

Подставляя эти значения в (24), получим следующую оценку:

$$\frac{d}{dt}\Big(v(t)\, x(t),\ x(t)\Big) \leqslant -|x(t)|^2 + 2\tau L_3 (L_1 + L_2) \cdot \sup_{t-2\tau \leqslant u \leqslant t} |x(u)| \cdot |x(t)| \leqslant$$

$$\leqslant -|x(t)|^2 + 2\tau L_3 (L_1 + L_2) \cdot |x(t)|^2.$$

Очевидно, что при

$$\tau < \frac{1}{2L_3 (L_1 + L_2)}$$

выражение (23) будет определенно-отрицательным, т. е. решения системы (21) равномерно ограничены в пределе. Теорема доказана.

В заключение приношу глубокую благодарность проф. Б. П. Демидовичу за постановку задачи и внимание к работе.

Я также глубоко благодарен своему научному руководителю доценту М. А. Доброхотовой за постоянное внимание и многие полезные советы.

Ярославский Государственный педагогический институт им. К. Д. Ушинского

Поступило в редакцию 20.IV.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. А. Каменский, ДАН СССР, 120:4 (1958), стр. 697—700.
2. Н. Н. Красовский, Некоторые задачи теории устойчивости движения, Физматгиз, М., 1959.
3. Т. Иосидзава, Математика, периодический сборник переводов иностранных статей, «Мир», М., 9:5, 1965, 95—127.
4. А. Д. Мышкис, Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, ТТЛ., М., 1951.
5. Л. Э. Эльсгольц, Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, «Наука», М., 1964.
6. Л. Э. Эльсгольц, Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Ун-т дружбы народов, т. I (1962), 114—115.
7. A. Halanay, Teoria Calitativa a Ecuatiilor differentiale, Edidura Academiei Republicii Populare Romîne, 1963.
8. T. Yoschizawa, Ultimate boundedness of Solutions and periodic Solution of functional-differential equations, "Colloq. internt. centre nat. rech. Scient.", N 148, 1965, 167—179.

KAI KURIŲ DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SISTEMŲ SU VĖLUOJANČIU ARGUMENTU SPRENDINIŲ APRĖŽTUMAS

A. AVDŽIANAS

(Reziumė)

Straipsnyje Liapunovo—Krasovskio funkcionalų pagalba nagrinėjamas kai kurių diferencialinių lygčių sistemų su vėluojančiu argumentu ir specialia dešine puse sprendinių tolygus aprėžtumas ir tolygus ribinis aprėžtumas. Sistemos turi sekantį bendrą pavidalą:

$$\dot{x}(t) = f\Big[t,\ x(t),\ x\big(t - \tau_1(t)\big),\ \ldots,\ x\big(t - \tau_m(t)\big)\Big],$$

kur $x(t)$ ir f yra aprėžtos vektorinės funkcijos, $\tau_i(t) \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

LIMITATION OF SOLUTIONS OF SOME SIMULTANEOUS DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A RETARDED ARGUMENT

A. AVDJAN

(Summary)

In this paper, using Ljapunov—Krassovsky functional uniform boundedness in investigated, as well as the uniform — ultimate boundedness within the solutions of some simultaneous differential equations with a retarded argument and a particular right-hand part. of the form

$$\dot{x}(t)=f\left[t,\ x(t),\ x\left(t-\tau_1(t)\right),\ \ldots,\ x\left(t-\tau_m(t)\right)\right]$$

where $x(t)$ and f denote vector-functions $\tau_i(t)\geqslant 0$ and bounded $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$.