VI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 4
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1966

О МНОГОМЕРНЫХ СЕТЯХ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. Т. БАЗЫЛЕВ

1. Пусть в n-мерном собственно евклидовом пространстве E_n, отнесенном к ортонормированной системе координат $\{0, \vec{I}_1, \ldots, \vec{I}_n\}$, задана p-поверхность V_p:

$$\vec{x} = x^h(u^1, \ldots, u^p)\vec{I}_h \qquad (h=1, 2, \ldots, n).$$

Функции $x^h(u^1, \ldots, u^p)$ предполагаются, как обычно, достаточно высокого класса дифференцируемости.

Присоединим к поверхности V_p подвижной полуортогональный репер $\{x, \vec{e}_h\}$, где орты $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p$ принадлежат касательной p-плоскости $T_p(x)$ к поверхности V_p в точке x, а векторы $\vec{e}_{p+1}, \ldots, \vec{e}_n$ образуют ортонормированный базис ортогонального дополнения $N_{n-p}(x)$ касательной плоскости $T_p(x)$.

Инфинитезимальные перемещения такого репера определяются уравнениями:

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i, \; d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j + \omega_i^\alpha \vec{e}_\alpha, \; d\vec{e}_\alpha = \omega_\alpha^i \vec{e}_i + \omega_\alpha^\beta \vec{e}_\beta$$
$$(i, j, k=1, 2, \ldots, p; \; \alpha, \beta = p+1, \ldots, n). \tag{1}$$

Следовательно, $\omega^\alpha = 0$, что при продолжении приводит к уравнениям

$$\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^j, \; b_{ij}^\alpha = b_{ji}^\alpha. \tag{2}$$

Функции $\gamma_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$ — компоненты первого основного тензора поверхности. Находим:

$$d\gamma_{ij} = \gamma_{ik}\omega_j^k + \gamma_{jk}\omega_i^k. \tag{3}$$

Дифференцируя тождество $\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$, где $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, получим:

$$\omega_\alpha^\beta + \omega_\beta^\alpha = 0. \tag{4}$$

Точно так же тождество $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_\alpha = 0$ приводит к соотношениям:

$$\omega_\alpha^k + \gamma^{ki}\omega_i^\alpha = 0, \tag{5}$$

где γ^{ki} — контравариантные компоненты метрического тензора γ_{ij} поверхности.

Как известно, функции b_{ij}^α для каждого фиксированного α образуют дважды ковариантный симметрический тензор. Мы имеем систему $n-p$ вторых основных тензоров b_{ij}^α поверхности V_p.

При замене базиса $\{\vec{e}_\alpha\}$ в плоскости $N_{n-p}(x)$ величины b_{ij}^α (i, j фиксированы) преобразуются как компоненты вектора и мы можем в плоскости $N_{n-p}(x)$ рассмотреть систему $\frac{p(p+1)}{2}$ векторов $\vec{b}_{ij} = \vec{b}_{ji} = b_{ij}^\alpha \vec{e}_\alpha$. Пусть q — число независимых векторов этой системы. Вместе с точкой x они определяют q-плоскость $N_q(x) \subset N_{n-p}(x)$.

Векторы $\vec{e}_a$ (a, $b = p+1$, ..., $p+q$) расположим в плоскости $N_q(x)$. Тогда все векторы $\vec{b}_{ij}$ будут разлагаться по q векторам $\vec{e}_a : \vec{b}_{ij} = b^a_{ij}\vec{e}_a$ и, следовательно,

$$b^\sigma_{ij} \equiv 0 \quad (\sigma = p+q+1, \ \dots, \ n). \tag{6}$$

Таким образом поверхность V_p имеет q линейно независимых вторых квадратных форм: $\Phi^a = b^a_{ij}\omega^i\omega^j$.

Внешнее дифференцирование системы $\omega^\sigma_i = 0$, полученной из системы (2) и тождеств (6), приводит в силу леммы Картана к соотношениям:

$$b^a_{ij}\omega^\sigma_a = c^\sigma_{ijk}\omega^k, \tag{7}$$

где c^σ_{ijk} симметричны по всем нижним индексам. Матрица (b^a_{ij}) имеет q строк и $\frac{p(p+1)}{2}$ столбцов. Ранг ее равен q. Пусть независимы столбцы с номерами $(i_r j_r)$ $(r = 1, 2, \ \dots, \ q)$ и матрица $(B^{i_r j_r}_a)$ — обратная к матрице $(b^a_{i_r j_r})$. Систему (7) разобьем на две системы:

$$b^a_{i_r j_r}\omega^\sigma_a = c^\sigma_{i_r j_r k}\omega^k; \tag{а}$$

$$b^\sigma_{i_t j_t}\omega^\sigma_a = c^\sigma_{i_t j_t k}\omega^k \qquad \left(t = q+1, \ \dots, \ \frac{p(p+1)}{2}\right). \tag{б}$$

Из системы (а) находим:

$$\omega^\sigma_a = B^{i_r j_r}_a c^\sigma_{i_r j_r k}\omega^k \tag{в}$$

и система (б) приводит к конечным соотношениям:

$$c^\sigma_{i_t j_t k} = b^a_{i_r j_t} B^{i_r j_r}_a c^\sigma_{i_r j_r k}. \tag{г}$$

Уравнения (в) показывают, что формы ω^σ_a — главные, а в силу (4) главными будут и формы ω^a_σ. Если для поверхности V_p арифметический инвариант q имеет максимальное значение $\frac{p(p+1)}{2}$, то системы (б), а, следовательно, и конечных соотношений (г) не будет.

Плоскость $E_{p+q}(x) = T_p(x) + N_q(x)$ есть соприкасающаяся плоскость к поверхности V_p в точке x (по Схоутену и Стройку ([1]) — область первой кривизны этой поверхности в точке x). Плоскость $N_q(x)$, которая является ортогональным дополнением касательной плоскости $T_p(x)$ в соприкасающейся $E_{p+q}(x)$, мы будем называть главной нормалью поверхности в точке x.

2. Пусть в некоторой области $\Omega \subset V_p$ (в частности на всей поверхности) задана сеть Σ_p. Векторы $\vec{e}_i$ подвижного репера будем теперь брать на касательных в точке x к линиям данной сети. Тогда формы $\omega^j_i (i \neq j)$ — главные:

$$\omega^j_i = a^j_{ik}\omega^k, \tag{8}$$

а условием голономности сети является симметрия функций a^j_{ik} по нижним индексам для всех значений индексов i, j, k; i, $k \neq j$.

Продолжение системы (8) имеет вид:

$$da^j_{ik} - a^j_{ie}\omega^e_k + \bar{a}^e_{ik}\omega^j_e + b^a_{ik}\omega^j_a = a^j_{iks}\omega^s. \tag{9}$$

Так как формы ω^j_a — главные в силу соотношений (5) и (2), то из (9) заключаем, что a^j_{ik} — инварианты сети.

Пусть на поверхности V_p дана линия $l: u^i = u^i(t)$. Тогда $\omega^i = a^i(t)\,dt$ (легко видеть, что коэффициенты линейных форм $\omega^i = a^i_k du^k$ не зависят от вторичных параметров) и

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \dot{\vec{x}} = a^i \vec{e}_i, \quad (\dot{\vec{x}})^2 = \gamma_{ij} a^i a^j.$$

Единичный вектор $\vec{i}_1$ касательной к линии l:

$$\vec{i}_1 = \frac{a^r \vec{e}_i}{\sqrt{\gamma_{ij} a^i a^j}}.$$

Если в качестве параметра t взять длину дуги s линии l, то

$$\gamma_{ij} a^i a^j = 1, \quad \vec{i}_1 = a^i \vec{e}_i, \quad a^i = \frac{\omega^i}{ds}.$$

Находим вектор абсолютной кривизны линии l в точке x:

$$\frac{d\vec{i}_1}{ds} = \vec{K}_T + \vec{K}_N,$$

где:

$$\vec{K}_T = \left(\frac{da^j}{ds} + a^j_{ik} a^i a^k\right) \vec{e}_j, \quad \vec{K}_N = b^a_{ij} a^i a^j \vec{e}_a; \tag{10}$$

$\vec{K}_T$ — вектор относительной кривизны [1], $\vec{K}_N$ — вектор вынужденной (или нормальной) кривизны линии l. Встречающиеся в формуле для $\vec{K}_T$ величины a^i_{ik} выражаются через $a^s_{ik}\,(s \neq i)$ из формулы (3) для $i = j\,(\gamma_{ii} = 1,\ d\gamma_{ii} = 0)$ и формулы (8).

Для линии ω^i сети Σ_p (все $\omega^k = 0$, кроме ω^i, i фиксировано) имеем: $a^i = 1$ и все остальные $a^k = 0$. Поэтому:

$$\vec{K}_{T(i)} = a^j_{ii} \vec{e}_j, \quad \vec{K}_{N(i)} = b^a_{ii} \vec{e}_a.$$

Следовательно, a^j_{ii} есть координата вектора относительной кривизны i-й линии сети в точке x по орту касательной j-й линии этой сети в той же точке; b^a_{ii} — координата вектора нормальной кривизны i-й линии сети в точке x.

3. Обозначим через d_j символ дифференцирования в направлении линии ω^j сети. Вектор

$$\frac{d_j \vec{e}_i}{\omega^j} = a^k_{ij} \vec{e}_k + b^a_{ij} \vec{e}_a \qquad (i \neq j)$$

называется вектором абсолютной кривизны векторного поля $\vec{e}_i$ вдоль линии ω^j; векторы $\vec{a}_{ij} = a^k_{ij} \vec{e}_k$ и $\vec{b}_{ij} = b^a_{ij} \vec{e}_a$ называются соответственно вектором относительной и вектором вынужденной кривизны поля $\vec{e}_i$ вдоль линии ω^j [1].

Очевидно, равенство $\vec{b}_{ij} = 0$ $(i \neq j)$ есть условие сопряженности направлений $\vec{e}_i$, $\vec{e}_j$ на поверхности. Равенство $\vec{a}_{ij} = 0$ является условием того, что вектор $\vec{e}_i$ переносится параллельно вдоль линии ω^j (при этом достаточно, чтобы $a^t_{ij} = 0$ при $t \neq i$).

Обозначим $\vec{a}_{ij} - \vec{a}_{ji} = 2\vec{a}_{[ij]}$. Отношение: $\vec{a}_{[ij]} \subset [x, \vec{e}_i, \vec{e}_j]$ $(i, j$ фиксированы, $i \neq j)$, то-есть $a^r_{ij} = a^r_{ji}$ $(r \neq i, j)$ выражает критерий того, что поверхность V_p расслаивается в $(p-2)$-направлении $\{\omega^r\}$ на двумерные поверхности, несущие сеть линий ω^i, ω^j. Если это имеет место для любых значений индексов i, j; $i \neq j$, то сеть Σ_p голономна.

Ясно, что и здесь мы можем рассматривать объект $\{\nu_{ij}^k\}$ неголономности сети:

$$\nu_{ij}^k = a_{ij}^k - a_{ji}^k \qquad (k \neq i,\ j),$$

его компоненты — инварианты этой сети.

4. $(p-1)$-плоскость $[x,\ \vec{e}_1,\ \ldots,\ \vec{e}_{i-1},\ \vec{e}_{i+1},\ \ldots,\ \vec{e}_p]$ является гиперплоскостью касательного пространства $T_p(x)$. Ее вектором нормали (в пространстве $T_p(x)$) служит вектор $\vec{E}^i = \gamma^{ij}\vec{e}_j$.

Таким образом, в области $\Omega \subset V_p$, где задана сеть Σ_p, определены p линейно независимых векторных полей $\vec{E}^i$; они определяют в этой области сеть Σ'_p, которую назовем взаимной данной сети Σ_p. Очевидно, для сети Σ'_p взаимной будет сеть Σ_p. Только ортогональная сеть совпадает со своей взаимной. В общем случае имеем:

$$d\vec{x} = \Omega_i \vec{E}^i, \quad \Omega_i = \gamma_{ij}\omega^j, \quad d\vec{E}^i = \Omega_j^i \vec{E}^j + \Omega^{ia}\vec{e}_a, \tag{11}$$

где:

$$\Omega_j^i = \gamma_{jk}\, d\gamma^{ki} + \gamma_{jk}\gamma^{it}\omega_t^k = -\omega_j^i, \quad \Omega^{ia} = \gamma^{ik}\omega_k^a, \tag{12}$$

при этом мы воспользовались формулами (3). Полагая

$$\Omega_j^i = A_j^{ik}\Omega_k, \quad \Omega^{ia} = B^{ija}\Omega_j$$

и, пользуясь формулами (2, 8), находим:

$$A_j^{ik} = -a_{jt}^i \gamma^{tk}, \quad B^{ija} = \gamma^{it}\gamma^{jk} b_{tk}^a;$$

отсюда следует

Теорема 1. *Для того, чтобы сеть Σ'_p, взаимная сети Σ_p, была голономной (сопряженной), необходимо и достаточно, чтобы данная сеть Σ_p удовлетворяла условию:*

$$a_{jt}^i \gamma^{tk} = a_{jt}^k \gamma^{ti}, \qquad i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ p;\quad i,\ k \neq j$$

(соответственно: $\gamma^{it}\gamma^{jk} b_{tk}^a = 0,\ i \neq j$).

Мы видим, что переход от данной сети к взаимной в общем случае не сохраняет таких свойств сети, как голономность и сопряженность.

5. Назовем псевдофокусом касательной $[x,\ \vec{e}_k]$ к линии ω^k данной сети такую точку $F_k^l \in [x,\ \vec{e}_k]$, смещение которой принадлежит плоскости:

$$[x,\ \vec{e}_1,\ \ldots,\ \vec{e}_{l-1},\ \vec{e}_{l+1},\ \ldots,\ \vec{e}_{p+q}],$$

когда точка x смещается в направлении линии ω^l $(l \neq k)$. Если

$$\vec{F}_k^l = \vec{x} + \lambda \vec{e}_k,$$

то

$$d\vec{F}_k^l = d\lambda\, \vec{e}_k + (\omega^i + \lambda a_{kj}^i \omega^j)\vec{e}_i + \lambda\omega_k^a \vec{e}_a.$$

Когда точка x описывает линию ω^l, имеем: $\omega^t = 0$ $(t \neq l)$, $\omega^l \neq 0$ и по определению точки F_k^l:

$$1 + \lambda a_{kl}^l = 0.$$

Следовательно, если $a_{kl}^l \neq 0$, то точка F_k^l с радиусом-вектором

$$\vec{F}_k^l = \vec{x} - \frac{1}{a_{kl}^l}\,\vec{e}_k$$

является псевдофокусом прямой $[x,\ \vec{e}_k]$.

Определение псевдофокусов F_k^l то же, что и в случае сети на поверхности $V_p \subset P_n$ ([2]), но здесь поле $N_q(x)$ главной нормали инвариантно связано с поверхностью. Поэтому и точки F_k^l инвариантно связаны с заданной на поверхности сетью.

Итак, в общем случае на каждой касательной к линиям сети $\Sigma_p \subset V_p \subset E_n$ инвариантным образом определяются $p-1$ точек F_k^l $(l \neq k)$. Если $a_{kl}^l = 0$, то псевдофокус F_k^l не существует (в E_n).

6. Условие параллельного перенесения вектора $\vec{E}^i$ вдоль линии ω^i сети Σ_p имеет вид: $d\vec{E}^i \in N_{n-p}(x)$, когда точка x смещается в направлении этой линии. В силу (11, 12) это приводит к соотношениям:

$$a_{ji}^i = 0. \tag{13}$$

Систему равенства (13) разобьем на две подсистемы:

$$a_{ji}^i = 0 \qquad (j \neq i), \tag{14}$$

$$a_{ii}^i = 0. \tag{15}$$

Равенства (14) показывают, что псевдофокусы F_j^i не существуют. Из (15) следует, что вектор $\vec{K}_{T(i)}$ относительной кривизны линии ω^i имеет равную нулю координату по вектору касательной этой линии:

$$\vec{K}_{T(i)} \in [x, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{i-1}, \vec{e}_{i+1}, \ldots, \vec{e}_p]. \tag{16}$$

Мы приходим к такому утверждению:

Теорема 2. *Вектор $\vec{E}^i = \gamma^{ij} \vec{e}_j$ переносится параллельно вдоль соответствующей линии ω^i сети Σ_p тогда и только тогда, когда на касательных к остальным линиям сети в точке x не существуют псевдофокусы F_j^i, а вектор относительной кривизны линии ω^i удовлетворяет условию* (16).

7. Множество сетей $\{\Sigma_p\}$ на поверхностях $V_p \subset E_n$ можно прежде всего разбить на три подмножества: неголономные, полуголономные и голономные сети с помощью объекта неголономности $\{\nu_{ij}^k\}$. Эти подмножества естественно разбиваются на следующие классы сетей:

а) полуортогональные и ортогональные сети (некоторые из γ_{ij}, $i \neq j$ или все равны нулю),

б) полусопряженные и сопряженные сети (условие $\vec{b}_{ij} = 0$, $i \neq j$, выполняется для некоторых или соответственно для всех таких векторов),

в) полугеодезические и геодезические сети (условие $\vec{a}_{ii} = 0$ выполняется для некоторых или для всех таких векторов),

г) сети, у которых в каждой точке x совпадают два, три, ... псевдофокусов на одной из касательных к линиям сети $(a_{ij}^i = a_{ik}^k = \ldots \neq 0,\ j,\ k \neq i)$ или на двух, трех, ... таких касательных,

д) сети, у которых некоторые из псевдофокусов (или все) не существуют $(a_{ij}^i = \ldots = 0)$,

$a' - g'$) сети Σ_p, у которых взаимные сети Σ_p' принадлежат одному из классов $(a-g)$.

Из класса д) выделяется подкласс получебышевских и чебышевских сетей (некоторые из векторов $\vec{a}_{ij}$, $i \neq j$ или соответственно все такие векторы нулевые). Чебышевские сети, следовательно, всегда голономны.

Точно так же из класса g') выделяются сети Σ_p, у которых взаимные сети Σ_p' являются получебышевскими, либо чебышевскими.

Так как переход от сети $\Sigma_p \subset V_p$ к взаимной сети дается формулами: $\vec{E}^i = \gamma^{ij}\vec{e}_j$, то нетрудно указать инвариантные признаки сетей $(a'-g')$ с помощью объектов γ_{ij}, b^a_{ij}, a^k_{ij}. Этот вопрос решается стандартно, и мы на нем останавливаться не будем.

8. Для точки $\vec{y} = \vec{x} + y^a \vec{e}_a$ главной нормали $N_q(x)$ имеем:

$$d\vec{y} = (\omega^i + y^a \omega^i_a)\vec{e}_i + (dy^b + y^a \omega^b_a)\vec{e}_b + y^a \omega^\sigma_a \vec{e}_\sigma. \tag{17}$$

Чтобы дифференциал точки y принадлежал нормальной плоскости $N_{n-p}(x)$, смещение точки x по поверхности V_p должно удовлетворять условию:

$$\omega^i + y^a \omega^i_a = 0 \tag{18}$$

или в силу (5) и (2):

$$\left(\sum_a \gamma^{ik} b^a_{kj} y^a - \delta^i_j\right) \omega^j = 0. \tag{19}$$

Так как при смещении точки x формы ω^j не могут обращаться в нуль одновременно, то y^a должны удовлетворять уравнению:

$$\det \left\| \sum_a \gamma^{ik} b^a_{kj} y^a - \delta^i_j \right\| = 0. \tag{20}$$

В общем случае это будет уравнение степени p относительно y^a. Оно определяет в плоскости $N_q(x)$ алгебраическую гиперповерхность порядка p, не проходящую через точку x. Эту поверхность мы назовем присоединенной к поверхности V_p в точке x и обозначим ее так: $\tilde{V}_{q-1}$. Для каждой точки $y \in \tilde{V}_{q-1}$ найдется такое направление смещения точки x по поверхности V_p, для которого $d\vec{y} \in N_{n-p}(x)$.

Поверхность $\tilde{V}_{q-1}$ можно получить иначе. Рассмотрим p-параметрическое семейство нормалей $N_{n-p}(x)$ нашей поверхности. Как известно, точка

$$\vec{z} = \vec{x} + y^a \vec{e}_a + z^\sigma \vec{e}_\sigma$$

называется фокусом плоскости $N_{n-p}(x)$, если найдется такое смещение этой плоскости внутри семейства (или, что то же самое, такое смещение точки x на поверхности V_p), для которого $d\vec{z} \in N_{n-p}(x)$. Если учесть, что в нашем случае $\omega^i_\sigma = 0$, то отыскание фокуса z плоскости $N_{n-p}(x)$ опять приводит к системе (18). Получается требование лишь на проекцию точки z на главную нормаль: эта проекция должна принадлежать поверхности $\tilde{V}_{q-1}$.

Таким образом, если через каждую точку $y \in \tilde{V}_{q-1}$ провести плоскость E_{n-p-q} — ортогональное дополнение к $N_q(x)$ в $N_{n-p}(x)$, то получим поверхность $V_{n-p-1} \subset N_{n-p}(x)$ с плоскими $(n-p-q)$-мерными образующими: для каждой точки $z \in V_{n-p-1}$ найдется такое направление смещения точки x по поверхности V_p, что $d\vec{z} \in N_{n-p}(x)$. Очевидно, для всех точек z одной и той же образующей E_{n-p-q} это направление смещения одно и то же. Главная нормаль пересекает каждую плоскость E_{n-p-q} в соответствующей точке y. Следовательно,

$$\tilde{V}_{q-1} = V_{n-p-1} \cap N_q(x).$$

Если для точки $y \in \tilde{V}_{q-1}$ (координаты ее удовлетворяют уравнению (20)) соответствующее направление $\{\omega^j\}$ смещения точки x, определяемое системой (19), удовлетворяет также условию:

$$y^a \omega_a^\sigma = 0,$$

то, как показывает (17), $d\vec{y} \in N_q(x)$ и точка y — фокус плоскости $N_q(x)$.

Отсюда заключаем, что место фокусов главной нормали $N_q(x)$ (если оно существует) принадлежит поверхности $\tilde{V}_{q-1}$. Если $p+q=n$, то поверхность $\tilde{V}_{q-1}$ всегда является местом фокусов плоскости $N_q(x)$.

Замечание. Указанную выше поверхность V_{n-p-1} впервые нашел Кюне ([3]), как место точек пересечения нормальной плоскости $N_{n-p}(x)$ с бесконечно близкими нормальными плоскостями $N_{n-p}(x+dx)$ и назвал эту поверхность „следом кривизны“ (Krümmungsspur).

Случай $V_2 \subset E_4$ исследовал Коммерель ([4]); здесь следом кривизны служит кривая 2-го порядка, которая была названа характеристикой поверхности V_2 в точке x.

Поверхность $\tilde{V}_{q-1}$ была выделена Д. И. Перепелкиным ([5]) как место точек пересечения плоскости $N_q(x)$ с теми бесконечно близкими плоскостями $N_{n-p}(x+dx)$, которые пересекают плоскость $N_q(x)$. Д. И. Перепелкин называет эту поверхность „многообразием K“ и устанавливает основные теоремы о строении этого многообразия.

Многообразие K Д. И. Перепелкина мы сочли здесь более удобным назвать присоединенной поверхностью (с привлечением термина „поверхность“; при $q=2$ получим присоединенную кривую $\tilde{V}_1$, а при $q=1-p$ точек). Изучая сети $\Sigma_p \subset V_p \subset E_n$, мы попутно устанавливаем некоторые свойства поверхности $\tilde{V}_{q-1}$, не указанные названными выше авторами.

9. В плоскости $N_q(x)$ найдем первую поляру ([6]) точки x относительно алгебраической гиперповерхности $\tilde{V}_{q-1}$. Если написать уравнение (20) в однородных координатах:

$$F(y^{p+1}, \ \ldots, \ y^{p+q}, \ y^0) = 0, \tag{21}$$

то уравнение искомой поляры имеет вид:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y^\alpha}\right)_0 y^\alpha = 0 \qquad (\alpha = p+1, \ \ldots, \ p+q, \ 0),$$

где нолик внизу скобки означает, что частные производные вычисляются в точке $x(0, \ \ldots, \ 0, \ 1)$.

Дифференцируя по y^{a_0} (a_0 фиксировано) левую часть уравнения (20), находим:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y^{a_0}}\right)_0 = (-1)^{p-1} \gamma^{ik} b_{ik}^{a_0}.$$

Уравнение (21) имеет вид:

$$a_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} (y^{\alpha_1})^{\varepsilon_1} (y^{\alpha_2})^{\varepsilon_2} \ldots (y^{\alpha_p})^{\varepsilon_p} + (-1)^p (y^0)^p = 0,$$

где $\varepsilon_g = 0,1$, причем, если $\varepsilon_g = 0$, то вместо $(y_g^\alpha)^{\varepsilon_g}$ надо подставить y^0 и положить $\alpha_g = 0$.

Находим:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y^0}\right)_0 = (-1)^p \cdot p.$$

Таким образом, первая поляра точки x относительно поверхности $\tilde{V}_{q-1}$ определяется уравнением:

$$\vec{M}\cdot\vec{xy}-1=0, \qquad (22)$$

где $\vec{M}=\frac{1}{p}\gamma^{ik}b_{ik}^{a}\vec{e}_a$ — вектор нормали плоскости (22), как гиперплоскости пространства $N_q(x)$ и $\vec{xy}=\vec{y}-\vec{x}$.

10. Для точек пересечения одномерной нормали $[x, \vec{e}_{a_0}]$ с поверхностью $\tilde{V}_{q-1}$ имеем:

$$\det\|\gamma^{ik}b_{kj}^{a_0}y^{a_0}-\delta_j^i\|=0.$$

Пусть $y_i^{a_0}$ $(i=1, 2, \ldots, p)$ — корни этого уравнения (среди них нет равных нулю). Точка $z\in[x, \vec{e}_{a_0}]$ называется гармоническим полюсом точки x относительно p точек y_i^a, если

$$\frac{p}{z}=\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{y_i^{a_0}}.$$

Можно показать, что плоскость (22) есть место гармонических полюсов точки x относительно точек пересечения поверхности $\tilde{V}_{q-1}$ с прямыми связки с центром в точке x, лежащими в плоскости главной нормали $N_q(x)$ (известное конструктивное определение первой поляры).

11. Возьмем в плоскости $T_p(x)$ систему p попарно ортогональных ортов:

$$\vec{i}_k=\lambda_k^i\vec{e}_i.$$

Кривые поверхности V_p, проходящие через точку x в направлении $\vec{i}_k$, имеют вектор нормальной кривизны в соответствии с формулой (10):

$$\vec{K}_{N(k)}=b_{ij}^{a}\lambda_k^i\lambda_k^j\vec{e}_a.$$

Рассмотрим вектор:

$$\vec{M}=\frac{1}{p}\sum_k\vec{K}_{N(k)}.$$

Мы имеем в плоскости $T_p(x)$ два векторных базиса: $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{i}_k\}$. Очевидно, матрица тензора γ^{ij} в базисе $\{\vec{i}_k\}$ будет единичной. По закону преобразования компонент тензора имеем:

$$\gamma^{ij}=\lambda_k^i\lambda_l^j\delta^{kl}=\sum_k\lambda_k^i\lambda_k^j.$$

Таким образом, вектор

$$\vec{M}=\frac{1}{p}\gamma^{ij}b_{ij}^{a}\vec{e}_a$$

не зависит от выбора ортонормированного базиса $\{\vec{i}_k\}$ в плоскости $T_p(x)$. Его называют вектором средней кривизны поверхности V_p в точке x [1, 7].

В дальнейшем мы будем предполагать $\vec{M}\neq 0$, то-есть исключим из рассмотрения минимальные поверхности. Прямую $[x, \vec{M}]$ назовем средней нормалью поверхности V_p.

Как мы замечаем, вектором нормали плоскости (22) служит вектор средней кривизны.

Пусть $\vec{m}$ — орт вектора $\vec{M}$. Точку z, определяемую равенством

$$\vec{z}=\vec{x}+\frac{\vec{m}}{|\vec{M}|},$$

назовем центром средней кривизны поверхности V_p в точке x. Если точка $y \in [x, \vec{M}]$, то $\vec{xy} = t\vec{M}$ и для точки y пересечения средней нормали с плоскостью (22), имеем:

$$\vec{M}^2 t - 1 = 0, \quad \vec{y} = \vec{x} + \frac{\vec{m}}{|\vec{M}|}.$$

Изложенное выше приводит к следующему утверждению:

Теорема 3. *Первая поляра точки x относительно присоединенной поверхности $\tilde{V}_{q-1}$ проходит через центр средней кривизны и ортогональна средней нормали.*

12. На нормали $[x, \vec{e}_{a_0}]$ (a_0 фиксировано) возьмем точку:

$$\vec{y} = \vec{x} + \rho \vec{e}_{a_0}. \tag{23}$$

Чтобы имело место отношение: $d\vec{y} \in N_{n-p}(x)$ (то-есть $y \in \tilde{V}_{q-1}$), надо потребовать:

$$\rho\omega^i_{a_0} + \omega^i = 0$$

(в системе (18) надо положить $y^{a_0} = \rho$, $y^b = 0$, $b \neq a_0$), что с помощью (5) и (2) можно записать в виде:

$$(\rho b^{a_0}_{ij} - \gamma_{ij})\,\omega^j = 0. \tag{24}$$

Следовательно, точка x должна смещаться в одном из главных направлений тензора $b^{a_0}_{ij}$ (7).

Таким образом для каждого поля одномерных нормалей $[x, \vec{e}_{a_0}] \subset N_q(x)$ определяется на поверхности V_p соответствующая ортогональная сеть линий кривизны (7). При этом, как следует из (20), значения ρ суть абсциссы точек пересечения прямой $[x, \vec{e}_{a_0}]$ с присоединенной поверхностью $\tilde{V}_{q-1}$. Это главные радиусы нормальной кривизны для вектора $\vec{e}_{a_0}$ (7).

Если главные направления для нормали $[x, \vec{e}_{a_0}]$ удовлетворяют условию $\omega^{\sigma}_{a_0} = 0$, то $d\vec{y} \in N_q(x)$ и точка y – фокус плоскости $N_q(x)$. Если, кроме того, $\omega^b_{a_0} = 0$, то y – фокус нормали $[x, \vec{e}_{a_0}]$, а поверхность (y) – эволюта поверхности V_p.

Заметим, что при отыскании главных направлений, соответствующих данной нормали $[x, \vec{e}_{a_0}]$, можно брать в качестве направляющего вектора этой нормали не обязательно орт $\vec{e}_{a_0}$, а любой коллинеарный с ним ненулевой вектор $\vec{L} = \lambda \vec{e}_{a_0}$. Уравнение (23) примет вид:

$$\vec{y} = \vec{x} + \rho_1 \vec{L}$$

и так как $\rho_1 \lambda = \rho$, то система (24) сохранится.

Если потребовать, чтобы проекция вектора $d\vec{L}$ на касательную плоскость $T_p(x)$ была коллинеарна вектору $d\vec{x}$ смещения точки x:

$$\lambda\omega^i_{a_0} = \mu\omega^i,$$

то мы опять придем к системе (24), определяющей главные направления относительно нормали $[x, \vec{e}_{a_0}]$, где теперь $\rho = -\frac{\lambda}{\mu}$.

Из сказанного при получении системы (18) следует, что для одномерной нормали $[x, \vec{n}]$, не принадлежащей главной нормали $N_q(x)$, сеть линий кривизны будет та же, что и для проекции прямой $[x, \vec{n}]$ на плоскость $N_q(x)$. Если же направление $\vec{n}$ принадлежит ортогональному дополнению к пространству $N_q(x)$ в пространстве $N_{n-p}(x)$, то для нормали $[x, \vec{n}]$ не существует сети линий кривизны.

Но из всех одномерных нормалей $[x, \vec{L}]\subset N_q(x)$ поверхности $V_p\subset E_n$ выделяется одна замечательная – средняя нормаль $[x, \vec{M}]$, инвариантно присоединенная к поверхности V_p (неминимальной).

Найдем сеть линий кривизны относительно средней нормали. Для этого потребуем, чтобы смещение $d\vec{x}$ точки x по поверхности было коллинеарно проекции вектора $d\vec{M}$ на плоскость $T_p(x)$:

$$M^a \omega_a^i \vec{e}_i = \mu d\vec{x}.$$

Это приводит к системе уравнений:

$$\left(\sum_a M^a b_{ij}^a + \mu\gamma_{ij}\right)\omega^j = 0,$$

которую можно записать проще, если воспользоваться обычным обозначением скалярного произведения:

$$(\vec{M}\cdot\vec{b}_{ij} + \mu\gamma_{ij})\,\omega^j = 0. \tag{25}$$

Следовательно, μ должно быть корнем уравнения:

$$\det\|\vec{M}\cdot\vec{b}_{ij} + \mu\gamma_{ij}\| = 0. \tag{26}$$

Как следует из уравнения (20), мы придем к тому же уравнению (26), если будем искать точку y:

$$\vec{xy} = -\frac{1}{\mu}\vec{M} \tag{27}$$

пересечения средней нормали с поверхностью $\tilde{V}_{q-1}$.

Известно ([5]), что всякая прямая $[x, \vec{L}]\subset N_q(x)$ пересекает поверхность $\tilde{V}_{q-1}$ в p действительных точках, различных или совпадающих между собой. Следовательно, корни уравнения (26) действительны. Каждому такому корню соответствует по (25) действительное главное направление, а по формуле (27) – точка

$$y\in[x, \vec{M}]\cap\tilde{V}_{q\cdot 1}. \tag{28}$$

Если точка (28) k-кратная, то соответствующий корень μ уравнения (26) имеет ту же кратность k, а система главных направлений в точке x будет определяться неоднозначно. Мы приходим к следующему выводу:

Теорема 4. *Для того, чтобы главные направления в точке $x\in V_p$ относительно средней нормали определялись однозначно, необходимо и достаточно, чтобы средняя нормаль пересекала присоединенную поверхность $\tilde{V}_{q-1}$ в p различных точках.*

В области $\Omega\subset V_p$, в каждой точке которой справедлива эта теорема, существует единственная действительная ортогональная сеть линий кривизны относительно средней нормали.

13. Пусть поверхность V_p отнесена к реперу, построенному на касательных к линиям кривизны в точке x относительно средней нормали. Так как эти линии попарно ортогональны, то в системе (25): $\gamma_{ij}=\delta_{ij}$. При $\mu=\mu_k$

(корень уравнения (26)) должно быть: $\omega^k \neq 0$, остальные $\omega^j = 0$. Следовательно,

$$\vec{M} \cdot \vec{b}_{kk} + \mu_k = 0, \quad \vec{M} \cdot \vec{b}_{ik} = 0 \ (i \neq k). \tag{29}$$

Обратно, пусть в репере, построенном на касательных к линиям некоторой ортогональной сети $\Sigma_p \subset V_p$ выполняется второе из условий (29). Тогда, учитывая (26), заключаем, что система (25) удовлетворяется направляющими параметрами $\{\omega^j\}$ линий сети Σ_p. Этим доказана

Теорема 5. *Для того, чобы ортогональная сеть Σ_p на поверхности V_p была сетью линий кривизны относительно средней нормали этой поверхности, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке $x \in \Sigma_p$ вектор вынужденной кривизны поля касательного вектора любой линии сети относительно любой другой линии этой сети был ортогонален вектору средней кривизны.*

В случае $p = n - 1$ имеем: $\vec{M} \| \vec{e}_n$, и полученная сеть линий кривизны совпадает с обычной сетью линий кривизны гиперповерхности. Второе из условий (29) примет вид:

$$M \cdot b_{ik} = 0 \ (i \neq k)$$

и так как $M \neq 0$, то $b_{ik} = 0$ $(i \neq k)$, то-есть такая сеть будет сопряженной, что хорошо известно.

Если же $p < n - 1$, то сеть линий кривизны (для средней нормали) в общем случае не будет сопряженной, так как вообще сопряженная сеть (не обязательно ортогональная) существует, как известно, далеко не на всякой p-поверхности при $p < n - 2$. На поверхности $V_p \subset E_{p+2}$ сопряженная сеть существует, но она в общем случае не ортогональна и, значит, не может совпадать с сетью линий кривизны для средней нормали.

14. Пусть поверхность V_p допускает поле k-направлений $E_k(x) \subset T_p(x)$, сопряженное ортогональному ему полю $(p-k)$-направлений $E_{p-k}(x) \subset T_p(x)$. Это значит, что любое 1-направление, принадлежащее $E_k(x)$, сопряжено с любым 1-направлением, принадлежащим $E_{p-k}(x)$.

Выберем ортонормированный репер так, чтобы $\vec{e}_s \in E_k(x)$ $(s, t = 1, 2, \ldots, k)$; $\vec{e}_e \in E_{p-k}(x)$ $(e, h = k+1, \ldots, p)$ в каждой точке $x \in V_p$. Тогда $\vec{b}_{se} = 0$. Уравнение (20) примет вид:

$$\det \| \vec{b}_{st} \cdot \vec{xy} - \delta_{st} \| \cdot \det \| \vec{b}_{eh} \cdot \vec{xy} - \delta_{eh} \| = 0.$$

Следовательно, поверхность $\tilde{V}_{q-1}$ распадается на две компоненты $\tilde{V}'_{q-1}$ порядка k и $\tilde{V}''_{q-1}$ порядка $p-k$, определяемые соответственно уравнениями:

$$\det \| \vec{b}_{st} \cdot \vec{xy} - \delta_{st} \| = 0, \quad \det \| \vec{b}_{eh} \cdot \vec{xy} - \delta_{eh} \| = 0.$$

Уравнение (26) также распадается на два уравнения, определяющие точки пересечения средней нормали с повехрностями $\tilde{V}'_{q-1}$ и $\tilde{V}''_{q-1}$ соответственно. При этом, как показывает система (25), главные направления, соответствующие точкам пересечения средней нормали с поверхностью $\tilde{V}'_{q-1}$ $(\tilde{V}''_{q-1})$, принадлежат плоскости $E_k(x)$ (соответственно, $E_{p-k}(x)$). Итак, справедлива

Теорема 6. *Если поверхность V_p допускает поле k-направлений $E_k(x)$, сопряженное ортогональному ему полю $(p-k)$-направлений $E_{p-k}(x)$, то присоединенная поверхность V_{q-1} распадается на две компоненты порядка k и*

$p-k$, а направления $E_k(x)$ и $E_{p-k}(x)$ натянуты на главные направления, соответствующие точкам пересечения средней нормали с первой и второй из этих компонент.

Следствие 1. *Если поверхность допускает поле одномерных направлений $\vec{e}(x)$, сопряженное ортогональному ему полю $(p-1)$-направлений, то поверхность $\tilde{V}_{q-1}$, присоединенная к данной поверхности в точке x, содержит $(q-1)$-мерную плоскую компоненту, а направление $\vec{e}(x)$ является главным относительно средней нормали.*

Следствие 2. *Если поверхность V_p несет сопряженную ортогональную сеть, то присоединенная поверхность $\tilde{V}_{q-1}$ распадается на p плоскостей E^i_{q-1} размерности $q-1$, а данная сеть является сетью линий кривизны для средней нормали.*

В последнем случае уравнение поверхности $\tilde{V}_{q-1}$ имеет вид (в репере, построенном на касательных к линиям кривизны):

$$\prod_i (\vec{b}_{ii}\cdot\vec{xy}-1)=0,$$

и плоскость E^i_{q-1} определяется в пространстве $N_q(x)$ уравнением:

$$\vec{b}_{ii}\cdot\vec{xy}-1=0. \tag{30}$$

Это уравнение будет удовлетворено, если положить

$$\vec{xy}=\frac{\vec{b}^0_{ii}}{|\vec{b}_{ii}|}, \tag{31}$$

где $\vec{b}^0_{ii}$ — орт вектора $\vec{b}_{ii}$. Точку $y=y_{(i)}$, определяемую равенством (31), можно назвать центром вынужденной кривизны линий ω^i сети. Тогда справедлива

Теорема 7. *Плоскость E^i_{q-1} проходит через центр $y_{(i)}$ вынужденной кривизны i-ой линии сети линий кривизны (для средней нормали) ортогонально вектору вынужденной кривизны этой линии.*

Пусть в данном случае точка x смещается в направлении линии ω^i (i фиксировано). В системе (19) останется одно уравнение, которое в силу $\omega^i\neq 0$ принимает вид (30). Следовательно, плоскость E^i_{q-1} есть место таких точек $y\in N_q(x)$, для которых $d\vec{y}\in N_{n-p}(x)$ при смещении точки x по i-ой линии кривизны.

Заметим, что если $p+q=n$, то $\tilde{V}_{q-1}$ — место фокусов плоскости $N_q(x)$ и справедлива такая теорема:

Теорема 8. *Если $p+q=n$ и сеть линий кривизны поверхности V_p (относительно средней нормали) сопряжена (и, значит, $\tilde{V}_{q-1}$ распадается, как указано выше), то плоскость E^i_{q-1} есть характеристика главной нормали $N_q(x)$ при смещении точки x в i-ом главном направлении.*

Если имеет место случай, указанный в следствии 2 из теоремы 6, то для точки

$$y\in[x,\ \vec{M}]\cap\tilde{V}_{q-1}, \qquad \vec{xy}=t\vec{M}$$

находим:

$$t_i=\frac{1}{\vec{M}\cdot\vec{b}_{ii}}, \qquad \vec{xy}_i=\frac{\vec{m}}{\vec{m}\cdot\vec{b}_{ii}}.$$

Отсюда следует

Теорема 9. *Если сеть линий кривизны относительно средней нормали поверхности V_p сопряжена и точно k из векторов $\vec{b}_{i_t i_t}$ $(t=1, 2, \ldots, k)$ вынужденной кривизны линий такой сети имеют одну и ту же ортогональную проекцию на среднюю нормаль, то k соответствующих точек y_i совпадают, а главные направления в k-направлении $\{\omega^{i_1}, \ldots, \omega^{i_k}\}$ неопределенны.*

15. В общем случае поверхность $V_2 \subset E_4$ несет сопряженную сеть. Мы отнесем такую поверхность к подвижному полуортогональному реперу, построенному на касательных к линиям сопряженной сети.

Уравнение (20) здесь примет вид:

$$\det \| \vec{b}_{ij} \cdot \vec{xy} - \gamma_{ij} \| = 0, \quad \vec{b}_{12} = 0.$$

Оно определяет кривую второго порядка $\tilde{V}_1$ (гиперболу) в нормальной плоскости $N_2(x)$. Дискриминант квадратичной формы, соответствующей левой части этого уравнения, как нетрудно подсчитать, равен

$$\frac{1}{4}(1-\gamma)(\det \| b^a_{11} b^a_{22} \|)^2, \qquad (a=3,\ 4), \tag{32}$$

где γ — дискриминант метрического тензора поверхности. Выражение (32) обращается в нуль в двух случаях:

а) $\gamma = 1$; сопряженная сеть на поверхности V_2 ортогональна, и мы возвращаемся к случаю, указанному в следствии 2 из теоремы 6;

б) $\det \| b^a_{11} b^a_{22} \| = 0$; из двух квадратичных форм $b^a_{ij} \omega^i \omega^j$ поверхности только одна линейно независима. По теореме Сегре ([1]) поверхность V_2 либо лежит в E_3, либо развертывающаяся.

Итак, *если поверхность $V_2 \subset E_4$ с двумерной главной нормалью $(q=2)$ несет сопряженную сеть, то присоединенная кривая $\tilde{V}_1$ распадается тогда и только тогда, когда эта сеть ортогональная.*

Такие поверхности рассматривались К. Ш. Рамазановой ([8]). Еще раньше к ним пришел А. В. Чакмазян ([9]), изучая двойственно нормализуемые поверхности $V_2 \subset E_4$.

Напомним, что поверхности $V_2 \subset E_4$, несущие сопряженную ортогональную сеть, существуют с произволом одной функции двух аргументов ([10]), тогда как произвольная $V_2 \subset E_4$, несущая сопряженную сеть, определяется заданием двух функций двух аргументов.

Замечание. В плоскости $T_p(x)$ возьмем два орта:

$$\vec{f} = f^i \vec{e}_i, \quad \vec{g} = g^i \vec{e}_i$$

и найдем вектор:

$$\vec{R}(f,\ g) = f^i g^j \vec{b}_{ij} = \vec{R}(g,\ f).$$

Если направление g фиксировать, а направление f изменять в плоскости $T_p(x)$, то те направления f, для которых функция $\vec{R}^2(f,\ g)$ принимает стационарное значение, Р. Р. Муллари ([11]) называет главными направлениями относительно направления g.

Направление f называется абсолютно главным, если оно является главным относительно любого направления g в плоскости $T_p(x)$. Изучая поля абсолютно главных направлений на многомерных поверхностях в евклидовом

n-пространстве, он получает целый ряд новых результатов по геометрии этих поверхностей.

В частности, если абсолютно главное направление f не асимптотическое и имеет сопряженное $(p-1)$-направление, то это последнее ортогонально направлению f. Если поверхность V_p является p-сопряженной системой и линии ее сопряженной сети имеют абсолютно главные направления, то в репере, построенном на касательных к линиям этой сети, справедливы равенства:

$$\vec{b}_{ii}\cdot\vec{b}_{jj}=0, \quad \vec{b}_{ij}=0 \qquad (i\neq j). \tag{*}$$

Так как абсолютно главные направления здесь предполагаются неасимптотическими, то $b_{ii}\neq 0$ и из (*) следует, что соприкасающееся пространство поверхности V_p в ее точке x имеет размерность $2p$. Поэтому можно сказать, что p-сопряженная система, рассмотренная Р. Р. Муллари, есть поверхность Картана (многообразие Картана „особого проективного типа"), сопряженная сеть которой ортогональна (p-ортогонально-сопряженная система ([10]) с $2p$-мерной соприкасающейся плоскостью), но с добавочным требованием: векторы нормальной кривизны линий этой сети попарно ортогональны в каждой точке $x\in V_p$. Как показал Р. Р. Муллари, такие поверхности $V_p\subset E_n\,(n\geqslant 2p)$ существуют с произволом $p(n-p)$ функций одного аргумента. Напомним, что произвольная p-ортогонально-сопряженная система определяется с произволом $\frac{p(p-1)}{2}$ функций двух аргументов ([10]).

Отсюда и в силу следствия 2 из теоремы 6 можно заключить, что сопряженная сеть $\Sigma_p\subset V_p$ из абсолютных линий кривизны, изученная Р. Р. Муллари, является одновременно и сетью линий кривизны относительно средней нормали поверхности V_p. Обратное неверно: сопряженная ортогональная сеть на p-поверхности (неминимальной) всегда является сетью линий кривизны относительно средней нормали, но вообще говоря не будет сетью из абсолютных линий кривизны в смысле Р. Р. Муллари (пример: произвольная p-ортогонально-сопряженная система в E_n).

16. Пусть на поверхности $V_2\subset E_3$ задана не получебышевская сеть Σ_2 (значит, $\vec{a}_{ij}\neq 0,\ i\neq j$) и $\varphi(u,\ v)$ — сетевой угол. Отнесем поверхность к ортонормированному подвижному реперу $\{x,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$, где $\vec{e}_1$ — вектор касательной к линии первого семейства сети в точке x. Если обозначить через

$$\vec{F}_1^2=\vec{x}+\rho\vec{e}_1, \quad \vec{F}_2^1=\vec{x}+\lambda(\vec{e}_1\cos\varphi+\vec{e}_2\sin\varphi)$$

радиусы-векторы псевдофокусов касательных к линиям сети в точке x, то, как легко подсчитать:

$$\rho=-\frac{1}{a_{12}^2+a_{11}^2\operatorname{ctg}\varphi}, \quad \lambda=\frac{\sin\varphi}{a_{11}^2+\varphi_1}, \quad (d\varphi=\varphi_k\omega^k). \tag{33}$$

Найдем чебышевские кривизны линий сети ([12]). Пусть $\vec{E}$ — орт, переносимый параллельно вдоль линии второго семейства, и Δ_1 — направленный угол векторов $\vec{E}$ и $\vec{e}_1$.

Тогда:

$$\vec{E}=\vec{e}_1\cos\Delta_1-\vec{e}_2\sin\Delta_1.$$

Из условия $d_2\vec{E}\,||\,\vec{e}_3$ находим:

$$d_2\Delta_1=\omega_1^2=(a_{11}^2+a_{12}^2\operatorname{tg}\varphi)\,\omega^1.$$

Так как при смещении точки x по линии второго семейства имеем:

$$\omega^2=\omega^1 \operatorname{tg}\varphi,$$

то дифференциал длины дуги этой линии

$$ds_2=\frac{\omega^1}{\cos\varphi},$$

а ее чебышевская кривизна определяется формулой:

$$K^{(2)}_{\text{чеб.}}=\frac{\partial\Delta_1}{\partial s_2}=(a^2_{12}+a^2_{11}\operatorname{ctg}\varphi)\sin\varphi.$$

Если обозначить через

$$r^{(i)}=\frac{1}{K^{(i)}_{\text{чеб.}}}$$

„радиус чебышевской кривизны" линии i-го семейства в точке x, то в силу первой из формул (33) имеем:

$$\rho=r^{(2)}\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right). \tag{34}$$

Точно так же, если $\vec{E}_1$ — орт, переносимый параллельно вдоль линии ω^1, и Δ_2 — угол вектора $\vec{E}_1$ с вектором касательной к линии второго семейства в точке x:

$$\vec{E}_1=\vec{e}_1\cos(\varphi-\Delta_2)+\vec{e}_2\sin(\varphi-\Delta_2),$$

то, как нетрудно проверить,

$$d_1\Delta_2=\omega^2_1+d_1\varphi=(a^2_{11}+\varphi_1)\,\omega^1$$

и так как $\omega^1=ds_1$ — дифференциал длины дуги линии первого семейства, то чебышевская кривизна этой линии:

$$K^{(1)}_{\text{чеб.}}=\frac{\partial\Delta_2}{\partial s_1}=a^2_{11}+\varphi_1$$

и по второй из формул (33):

$$\lambda=r^{(1)}\sin\varphi. \tag{35}$$

Рассмотрим точки $C^{(i)}$, определяемые равенствами:

$$\vec{C}^{(i)}=\vec{x}+r^{(i)}\cdot\vec{n}_i \quad \text{(нет суммирования)},$$

где $\vec{n}_i$ — орт, полученный из орта касательной к линии i-го семейства сети поворотом около точки x на угол $+\frac{\pi}{2}$. Из формул (34, 35) следует, что точка F^i_j есть ортогональная проекция точки $C^{(j)}$ на касательную к i-ой линии в точке x.

Называя точку $C^{(i)}$ центром чебышевской кривизны линии i-го семейства сети, мы приходим к такому результату:

Теорема 10. *Псевдофокус касательной в точке x к линии одного семейства сети $\Sigma_2\subset V_2\subset E_3$ есть ортогональная проекция на эту касательную центра чебышевской кривизны линии другого семейства в этой точке.*

Следствие 1. *При изгибании поверхности V_2 положение псевдофокусов F^i_j на касательных к линиям данной сети не меняется.*

Следствие 2. *Если сеть ортогональная* $\left(\varphi=\frac{\pi}{2}\right)$, *то* $C^{(i)}=C^{(i)}_g=F^i_j$, где $C^{(i)}_g$ — центр геодезической кривизны в точке x линии i-го семейства.

Замечание 1. Если сеть геодезическая, то в теореме 10 термин „псевдофокус" можно заменить термином „фокус". В самом деле, в случае геодезической сети соприкасающиеся плоскости её линий в точке x пересекаются по нормали $[x, \vec{e}_3]$ к поверхности и по теореме проективного случая ([2]) псевдофокусы F_i^j — обычные фокусы касательных к линиям сети.

Замечание 2. Формулы (34, 35), а значит и теорема 10 справедлива и тогда, когда данная сеть — сопряженная и точками F_i^j являются обычные фокусы касательных в точке x к линиям сети. В этом случае теорема 10 дает конструктивную связь фокусов касательных к линиям сопряженной сети с чебышевскими кривизнами этих линий.

Москва

Поступило в редакцию
17.III.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. И. А. Схоутен и Д. Дж. Стройк, Введение в новые методы дифференциальной геометрии, II, Издат-во Иностр. литер., М., 1948.
2. В. Т. Базылев, Об одном обобщении лапласовых преобразований поверхности, Доклады 3-ей Сиб. конференции по матем. и мех. Издат-во Томского ун-та, Томск, 1964, 179—180.
3. H. Kühne, Über die Krümmung einer beliebigen Mannigfaltigkeit, Archiv der Mathem. u. Physik, 1904, 6, 251—260.
4. K. Kommerell, Riemannsche Flächen im ebenen Raum von vier Dimensionen, Math. Ann., 1905, 60, 546—596.
5. D. Perepelkine, Sur la courbure et les espaces normaux d'une V_m dans R_n, Матем. сб., 1935, 42, 81—120.
6. А. П. Норден, Пространства аффинной связности, ГИТТЛ, М.—Л., 1950.
7. Л. П. Эйзенхарт, Риманова геометрия, Издат. Иностр. литер., М., 1948.
8. К. Ш. Рамазанова, К теории двумерных поверхностей в E_4, Волжский математический сборник, выпуск 3, Куйбышев, 1965, 296—311.
9. А. В. Чакмазян, Эволютные поверхности двумерной двойственно нормализованной D_2 в E_4, Докл. АН СССР, 1962, 144, 1233—1236.
10. И. Н. Григорьев, Асимптотические преобразования p-ортогонально-сопряженных систем в n-мерном пространстве, Докл. АН СССР, 1954, 97, 765—767.
11. Р. Р. Муллари, О поверхностях с полями абсолютно главных направлений, Tartu Ülikooli toimetised, Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, вып. 102, 275—288.
12. В. И. Шуликовский, Классическая дифференциальная геометрия, Физматгиз, М., 1963.

DAUGIAMAČIŲ TINKLŲ EUKLIDINĖJE ERDVĖJE KLAUSIMU

V. BAZYLEVAS

(Reziumė)

Duota kreivių ant p-paviršiaus V_p euklidinėje n-matėje erdvėje E_n tinklų Σ_p (p-audinių V. Bliaškės prasme) klasifikacija. Pagrindinis darbo tikslas — išnagrinėti tinklo kreivumo linijas paviršiaus vidutinės normalės atžvilgiu. Darbo pabaigoje nurodomas konstruktyvinis sąryšis tarp tinklo $\Sigma_2 \subset V_2 \subset E_3$ kreivių liečiamųjų pseudožidinių ir šių kreivių Čebyševo kreivumų.

SUR LES RESEAUX DE PLUSIEURS DIMENSIONS DANS L'ESPACE EUCLIDIEN

V. BASILEV

(Résumé)

On a abtenu une classification des réseaux de courbes (p-tissu selon W. Blaschke) sur les p-surfaces V_p de l'espace euclidien E_n à n dimensions.

Le problème fondamental de cet ouvrage est l'étude des réseaux de lignes de courbure par rapport à la normale moyenne de la surface.

A la fin de l'exposé on indique la relation constructive entre des pseudofoyers des tangentes aux courbes du réseau $\Sigma_2 \subset V_2 \subset E_3$ et des courbures de Tchébichev de ces lignes.