ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ПОЛЕЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

В. И. БЛИЗНИКАС

П. К. Рашевский доказал, что всякий линейный дифференциально-геометрический объект относительно унимодулярной дифференциальной группы $D^0_{N_{rn}}\left(N_{rn}=n\left[\binom{n+r}{n}-1\right],\ D^0_{N_{rn}}\right.$ — подгруппа полной дифференциальной группы $\left.D_{N_{rn}}\right)$ порядка r эквивалентен системе некоторого числа контравариантных сверхвекторов [3]. В этой заметке найдена структура определяющих систем дифференциальных уравнений ковариантных и контравариантных сверхтензоров*).

1. *Нормальная расслоенная группа* $G^{(r)}$ *и группа* $D_{N_{rn}}$. Нормальной расслоенной группой $G^{(r)}$ называется r-раз продолженная группа аналитических преобразований некоторого n-мерного дифференцируемого многообразия V_n (класса ω). Группа $G^{(r)}$ определяется пфаффовыми формами ω^i, $\omega^i_j, \ldots, \omega^i_{j_1 \ldots j_r}$, которые имеют следующую структуру [2]:

$$\left.\begin{aligned}
&D\omega^i=[\omega^k,\ \omega^i_k],\\
&D\omega^i_{j_1}=[\omega^k_{j_1},\ \omega^i_k]+[\omega^k,\ \omega^i_{j_1 k}],\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&D\omega^i_{j_1\ldots j_r}=\sum_{s=1}^{r}\frac{r!}{s!\,(r-s)!}\left[\omega^k_{(j_1\ldots j_s},\ \omega^i_{j_{s+1}\ldots j_r)k}\right]+\left[\omega^k,\ \omega^i_{j_1\ldots j_r k}\right]\\
&(i,\ j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\quad a,\ b,\ c=1,\ 2,\ \ldots,\ r).
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Полная дифференциальная группа $D_{N_{rn}}$ порядка r определяется инвариантными формами

$$\vartheta^i_{j_1\ldots j_a}=\omega^i_{j_1\ldots j_a}\Big|_{\omega^i=0},$$

структурные уравнения которых имеют вид

$$D\vartheta^i_{j_1\ldots j_a}=\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\left[\vartheta^k_{(j_1\ldots j_s},\ \vartheta^i_{j_{s+1}\ldots j_a)k}\right]. \tag{2}$$

2. *Ковариантный сверхвектор.* Так как локальные координаты дифференцируемого многообразия V_n можно рассматривать как первые интегралы

---

*) В. В. Вагнер ковариантный сверхвектор называет ковариантным вектором порядка r [1].

вполне интегрируемой системы $\omega^i=0$, то дифференциальное уравнение скалярной функции f, определенной на V_n, можно записать в виде

$$df=f_i\,\omega^i. \tag{3}$$

Продолжая эту систему, мы получим

$$\left.\begin{aligned}
&df_i-f_k\,\omega_i^k=f_{ik}\,\omega^k,\\
&df_{ij}-f_{ik}\,\omega_j^k-f_{kj}\,\omega_i^k-f_k\,\omega_{ij}^k=f_{ijk}\,\omega^k,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&df_{j_1\dots j_r}-\sum_{s=1}^{r}\frac{r!}{s!\,(r-s)!}\,\omega^k_{(j_1\dots j_s}f_{j_{s+1}\dots j_r)k}=f_{j_1\dots j_r k}\,\omega^k,
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где величины $f_{j_1\dots j_a}$ симметричны относительно всех индексов. Система дифференциальных уравнений (неизвестные величины $v_{j_1\dots j_a}$ тоже симметричны относительно всех индексов):

$$\left.\begin{aligned}
&dv_i-v_k\,\vartheta_i^k=0,\\
&dv_{ij}-v_{ik}\,\vartheta_j^k-v_{kj}\,\vartheta_i^k-v_k\,\vartheta_{ij}^k=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&dv_{j_1\dots j_r}-\sum_{s=1}^{r}\frac{r!}{s!\,(r-s)!}\,\vartheta^k_{(j_1\dots j_s}v_{j_{s+1}\dots j_r)k}=0
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

вполне интегрируема и ее первые интегралы образуют пространство представления $Z\binom{0}{1}$ группы $\dot{D}_{N_{rn}}$. Из структуры дифференциальных уравнений следует, что пространство первых интегралов системы (5) является линейным пространством, т. е. если

$$\left(v_i^0,\ v_{ij}^0,\ \dots,\ v^0_{j_1\dots j_r}\right)\quad\text{и}\quad\left(w_i^0,\ w_{ij}^0,\ \dots,\ w^0_{j_1\dots j_r}\right)$$

некоторые решения системы (5), то

$$\left(c_1\,v_i^0+c_2\,w_i^0,\ c_1\,v_{ij}^0+c_2\,w_{ij}^0,\ \dots,\ c_1\,v^0_{j_1\dots j_r}+c_2\,w^0_{j_1\dots j_r}\right)$$

тоже является решением (c_1, c_2 — произвольные константы). Элементы пространства $Z\binom{0}{1}$ называются сверхвекторами (порядка r). Система дифференциальных уравнений ковариантного сверхвекторного поля порядка r, определенного на V_n, имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
&dv_i-v_k\,\omega_i^k=v_{i,\,k}\,\omega^k,\\
&dv_{ij}-v_{kj}\,\omega_i^k-v_{ik}\,\omega_j^k-v_k\,\omega_{ij}^k=v_{ij,\,k}\,\omega^k,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&dv_{j_1\dots j_r}-\sum_{s=1}^{r}\frac{r!}{s!\,(r-s)!}\,\omega^k_{(j_1\dots j_s}v_{j_{s+1}\dots j_r)k}=v_{j_1\dots j_r,\,k}\,\omega^k.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Ковариантное сверхвекторное поле, присоединенное к скалярной функции f, называется потенциальным полем.

3. *Ковариантные сверхтензоры.* Система дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&dT_{i_1, j_1, \ldots, k_1} - T_{s, j_1, \ldots, k_1}\vartheta^s_{i_1} - \cdots - T_{i_1, j_1, \ldots, s}\vartheta^s_{k_1} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&dT_{i_1 \ldots i_a, j_1 \ldots j_b, \ldots, k_1 \ldots k_g} - \sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\vartheta^l_{(i_1 \ldots i_s}T_{i_{s+1} \ldots i_a) l, j_1 \ldots j_b, \ldots, k_1 \ldots k_g} -\\
&-\sum_{s=1}^{b}\frac{b!}{s!\,(b-s)!}\vartheta^l_{(j_1 \ldots j_s}T_{| i_1 \ldots i_a |, j_{s+1} \ldots j_b) l, \ldots, k_1 \ldots k_g} -\\
&-\sum_{s=1}^{g}\frac{g!}{s!\,(g-s)!}\vartheta^l_{(k_1 \ldots k_s}T_{| i_1 \ldots i_a, j_1 \ldots j_b |, k_{s+1} \ldots k_g) l} = 0,
\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

где величины $T_{i_1 \ldots i_a, j_1 \ldots j_b, \ldots, k_1 \ldots k_g}$ симметричны относительно каждой группы индексов, является вполне интегрируемой. Множество решений этой системы образует линейное пространство $Z\binom{0}{p}$ (p-число групп индексов), которое называется пространством p-раз ковариантных сверхтензоров (порядка r).

Система дифференциальных уравнений p-раз ковариантного сверхтензорного поля, определенного на V_n, имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
&dT_{i_1, j_1, \ldots, k_1} - T_{s, j_1, \ldots, k_1}\omega^s_{i_1} - \cdots - T_{i_1, j_1, \ldots, s}\omega^s_{k_1} = T_{i_1, j_1, \ldots, k_1; s}\,\omega^s,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&dT_{i_1 \ldots i_a, j_1 \ldots j_b, \ldots, k_1 \ldots k_g} - \sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\omega^l_{(i_1 \ldots i_s}T_{i_{s+1} \ldots i_a) l, \ldots, k_1 \ldots k_g} -\\
&-\sum_{s=1}^{b}\frac{b!}{s!\,(b-s)!}\omega^l_{(j_1 \ldots j_s}T_{| i_1 \ldots i_a |, j_{s+1} \ldots j_b) l, \ldots, k_1 \ldots k_g} - \cdots -\\
&-\sum_{s=1}^{g}\frac{g!}{s!\,(g-s)!}\omega^l_{(k_1 \ldots k_s}T_{| i_1 \ldots i_a, j_1 \ldots j_b |, k_{s+1} \ldots k_g) l} =\\
&= T_{i_1 \ldots i_a, j_1 \ldots j_b, \ldots, k_1 \ldots k_g; s}\,\omega^s.
\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

4. *Контравариантные сверхвекторы.* Локальные компоненты ковариантного сверхвектора можно кратко обозначить как v_I, где

$$I = (i_1),\ (i_1 i_2),\ \ldots,\ (i_1 i_2 \ldots i_r)$$

(порядок индексов в скобках — не существен). Рассмотрим систему величин v^I, обладающих тем свойством, что $v_I v^I$ всегда является инвариантом.

Так как $d(dv_I v^I) \equiv 0 \pmod{\omega^i}$, то, в силу произвольности сверхвектора v_I и соотношений (6), мы получим

$$\left.\begin{aligned}
&dv^{i_1} + \sum_{s=1}^{r} v^{k_1 \dots k_s} \vartheta^{i_1}_{k_1 \dots k_s} = 0,\\
&dv^{i_1 i_2} + \sum_{s=1}^{r-1} (2+s-1)!\ v^{k_1 \dots k_s (i_1} \vartheta^{i_2)}_{k_1 \dots k_s} = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&dv^{i_1 \dots i_a} + \sum_{s=1}^{r-(a-1)} (a+s-1)!\ v^{k_1 \dots k_s (i_1 \dots i_{a-1}} \vartheta^{i_a)}_{k_1 \dots k_s} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Таким образом, система дифференциальных уравнений контравариантного сверхвекторного поля v^I имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
&dv^{i_1} + \sum_{s=1}^{r} v^{k_1 \dots k_s} \omega^{i_1}_{k_1 \dots k_s} = v^{i_1}_k \omega^k,\\
&dv^{i_1 i_2} + \sum_{s=1}^{r-1} (2+s-1)!\ v^{k_1 \dots k_s (i_1} \omega^{i_2)}_{k_1 \dots k_s} = v^{i_1 i_2}_k \omega^k,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&dv^{i_1 \dots i_a} + \sum_{s=1}^{r-(a-1)} (a+s-1)!\ v^{k_1 \dots k_s (i_1 \dots i_{a-1}} \omega^{i_a)}_{k_1 \dots k_s} = v^{i_1 \dots i_a}_k \omega^k,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&dv^{i_1 \dots i_r} + r!\ v^{k (i_1 \dots i_{r-1}} \omega^{i_r)}_k = v^{i_1 \dots i_r}_k \omega^k.
\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Отсюда следует, что контравариантный сверхвектор охватывает тензор, валентность которого совпадает с порядком сверхвектора. Пространство $Z\binom{p}{0}$ тоже является линейным пространством. Система дифференциальных уравнений p-раз контравариантного сверхтензорного поля, определенного на V_n, имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}
&dT^{i_1 \dots i_a, j_1 \dots j_b, \dots, k_1 \dots k_g} +\\
&+ \sum_{s=1}^{r-(a-1)} a!\ T^{l_1 \dots l_s (i_1 \dots i_{a-1} | k, j_1 \dots j_b, \dots, k_1 \dots k_g |} \omega^{i_a)}_{l_1 \dots l_s} + \dots +\\
&+ \sum_{s=1}^{r-(g-1)} g!\ T^{i_1 \dots i_a, j_1 \dots j_b, \dots, l_1 \dots l_s (k_1 \dots k_{g-1}} \omega^{k_g)}_{l_1 \dots l_s} =\\
&= T_l^{i_1 \dots i_a, j_1 \dots j_b, \dots, k_1 \dots k_g} \omega^l\\
&(a, b, \dots, g = 1, 2, \dots, r).
\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Вильнюсский Государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
12.I.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Вагнер, Теория составного многообразия, Труды сем. по векторн. и тензорн. анализу, вып. 8, 1950, 11—72.
2. Г. Ф. Лаптев, Многообразия, погруженные в обобщенные пространства, Труды IV всесоюзн. мат. съезда, т. 2, 1964, 226—233.
3. П. К. Рашевский, Линейные дифференциально-геометрические объекты, ДАН СССР, т. 47, № 4, 1954, 609—611.

KAI KURIŲ DIFERENCIALINIŲ GEOMETRINIŲ OBJEKTŲ DIFERENCIALINĖS LYGTYS

V. BLIZNIKAS

(Reziumė)

Darbe surandama kovariantinių bei kontravariantinių supervektorinių laukų diferencialinių lygčių sistemų struktūra, o taip pat ir bet kokio valentingumo supertenzorinių laukų diferencialinės lygtys. Darbas atliktas G. F. Laptevo metodu.

THE DIFFERENTIAL EQUATIONS OF SOME DIFFERENTIAL GEOMETRICAL OBJECTS

V. BLIZNIKAS

(Summary)

In this paper the structure of systems of the differential equations of covariant and contravariant supervector fields and the differential equations of the supertensor fields of arbitrary valence are constituted. In this paper G. F. Laptev's method is used.