VI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 4
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1966

РЯДЫ ДИРИХЛЕ С НЕРЕГУЛЯРНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ АРГУМЕНТОВ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

Г. Л. ЛУНЦ

Автором был доказан ряд теорем об особенностях функций, представимых рядами Дирихле с комплексными показателями

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z} \tag{1}$$

в случае, когда последовательность показателей $\{\lambda_n\}$ имеет угловую плотность в смысле Б. Я. Левина, и о связи между областями голоморфности и сходимости таких рядов (см. [1]). Сопоставление этих результатов с одной теоремой А. Ф. Леонтьева [2] позволяет получить некоторые утверждения и для более общего случая [3], когда предполагается лишь существование конечной верхней плотности последовательности модулей показателей. Однако, эти утверждения являются значительно более слабыми, чем в случае существования угловой плотности, причем в них не учитывается степень нерегулярности распределения аргументов показателей.

В настоящей статье рассматриваются функции, представимые рядами Дирихле с комплексными показателями, в предположении, что последовательность модулей показателей измерима, то есть имеет конечную плотность

$$\tau=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{|\lambda_n|}.$$

На аргументы показателей никаких ограничений не накладывается, однако степень нерегулярности их распределения учитывается. В случае, когда нерегулярность „мала", утверждения соответствующих теорем оказываются близкими к имеющим место в условиях существования угловой плотности последовательности показателей.

Мы ограничиваемся рассмотрением случая, когда последовательность $\{\lambda_n\}$ заключена в угле раствора, меньшего π, так как, пользуясь методом статьи [1], от этого случая нетрудно перейти к общему.

§ 1. Пример нерегулярной последовательности

Говорят, что последовательность $\{\lambda_n\}$ имеет угловую плотность [4], если существует такая неубывающая функция $\sigma(\varphi)$, что, каковы бы ни были φ_1 и φ_2, не принадлежащие некоторой исключительной счетной последовательности,

$$\sigma(\varphi_2)-\sigma(\varphi_1)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{|\mu_n|}, \tag{1.1}$$

где $\{\mu_n\}$ — последовательность, состоящая из тех членов последовательности $\{\lambda_n\}$, для которых $\arg\lambda_n \in [\varphi_1, \varphi_2]$. Функция $\sigma(\varphi)$ непрерывна всюду, кроме точек исключительной последовательности.

Построим такую последовательность $\{\lambda_n\}$, что соответствующая последовательность $\{|\lambda_n|\}$ имеет плотность

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n|} < \infty,$$

тогда как сама последовательность $\{\lambda_n\}$ не имеет угловой плотности ни в каком угле. Для этого разобьем последовательность натуральных чисел на группы, включив в k-ую группу числа $2^{k-1}, 2^{k-1}+1, \ldots, 2^k-1$ $(k=1, 2, \ldots)$. Пусть, далее, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ — последовательность всех рациональных чисел на интервале $[0, 2\pi)$. Положим $\lambda_n = ne^{i\varphi_k}$ для всех n, принадлежащих k-ой группе. Легко видеть, что построенная последовательность не имеет даже конечной максимальной угловой плотности, то есть что ее нельзя включить в последовательность, имеющую угловую плотность. Это следует из того, что если $\{\lambda_{n_k}\}$-та часть последовательности $\{\lambda_n\}$, которая принадлежит некоторому углу, то, как бы мал ни был этот угол, максимальная плотность последовательности $\{|\lambda_{n_k}|\}$ (то есть наименьшая плотность измеримой последовательности, включающей последовательность $\{|\lambda_{n_k}|\}$) равна 1.

§ 2. Оценка канонического произведения

Пусть последовательность $\{\lambda_n\}$ заключена в угле $|\arg z| \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$ и существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n|} = \tau.$$

Предположим, далее, что угол $|\arg z| \leqslant \alpha$ можно разбить на такие углы $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_k$, определяемые неравенствами

$$-\alpha = \Theta_0 \leqslant \arg z < \Theta_1, \quad \Theta_1 \leqslant \arg z < \Theta_2, \quad \ldots, \quad \Theta_{k-1} \leqslant \arg z \leqslant \Theta_k = \alpha,$$

что существуют плотности подпоследовательностей последовательности $\{|\lambda_n|\}$, состоящих из всех тех ее членов, для которых $\lambda_n \in \vartheta_p$ $(p=1, 2, \ldots, k)$. Обозначим эти плотности через $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$. Очевидно, что $\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_k=\tau$. В дальнейшем через $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_k$ мы будем обозначать не только указанные углы, но и растворы этих углов.

Оценим модуль канонического произведения

$$L(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right).$$

Если $x>0$, $a>0$, то величина $|x^2 - a^2 e^{2i\varphi}|$ увеличивается с увеличением $|\varphi|$ при $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ и уменьшается с увеличением $|\varphi|$ при $\frac{\pi}{2} \leqslant |\varphi| < \pi$. При этом значения $|x^2 - a^2 e^{2i\varphi}|$ при $\varphi = \frac{\pi}{2} - \beta$ и $\varphi = \frac{\pi}{2} + \beta$ одинаковы. Отсюда следует, что если

$$z=re^{i\varphi}, \quad \alpha<\varphi\leqslant\frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \Theta_{m-1}\leqslant\varphi-\frac{\pi}{2}\leqslant\Theta_m,$$

то

$$|L(z)|\leqslant\left|\prod_{p=1}^{m-1}\left\{\prod_{\lambda_n\in\vartheta_p}\left(1-\frac{z^2}{|\lambda_n|^2 e^{i\Theta_p}}\right)\right\}\prod_{\lambda_n\in\vartheta_m}\left(1-\frac{z^2}{|\lambda_n|^2 e^{i\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)}}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{p=m}^{k-1}\left\{\prod_{\lambda_n\in\vartheta_{p+1}}\left(1-\frac{z^2}{|\lambda_n|^2 e^{i\Theta_p}}\right)\right\}\right|, \qquad (2.1)$$

$$|L(z)|\geqslant\left|\prod_{a=0}^{m-2}\left\{\prod_{\lambda_n\in\vartheta_{p+1}}\left(1-\frac{z^2}{|\lambda_n|^2 e^{i\Theta_p}}\right)\right\}\prod_{\lambda_n\in\vartheta_m}\left(1-\frac{z^2}{|\lambda_n|^2 e^{i\Theta'_m}}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{p=m+1}\left\{\prod_{\lambda_n\in\vartheta_p}\left(1-\frac{z^2}{|\lambda_n|^2 e^{i\vartheta_p}}\right)\right\}\right|, \qquad (2.2)$$

где Θ'_m — то из чисел Θ_{m-1}, Θ_m, которое дальше от $\varphi-\frac{\pi}{2}$. Известно (см., например, [4]), что если последовательность положительных чисел $\{\mu_n\}$ имеет плотность D и

$$l(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\mu_n^2}\right),$$

то при $\varphi\neq 0$, $\varphi\neq\pi$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln|l(re^{i\varphi})|}{r}=\pi D|\sin\varphi|.$$

Отсюда, с помощью неравенств (2.1), (2.2) после несложных выкладок можно получить следующие оценки, справедливые при любом $\varepsilon>0$, если r достаточно велико, $\alpha<\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$, $\varphi-\frac{\pi}{2}\in\vartheta_m$:

$$\frac{\ln|L(re^{i\varphi})|}{r}<\pi[\tau_1\sin(\varphi+\alpha-\vartheta_1)+\ldots+\tau_{m-1}\sin(\varphi+\alpha-\vartheta_1-\ldots-\vartheta_{m-1})+\tau_m+$$

$$+\tau_{m+1}\sin(\varphi+\alpha-\vartheta_1-\ldots-\vartheta_m)+\ldots+\tau_k\sin(\varphi+\alpha-\vartheta_1-\ldots-\vartheta_{k-1})]+$$

$$+\varepsilon=\bar{h}(\varphi)+\varepsilon, \qquad (2.3)$$

$$\frac{\ln|L(re^{i\varphi})|}{r}>\pi[\tau_1\sin(\varphi+\alpha)+\ldots+\tau_{m-1}\sin(\varphi+\alpha-\vartheta_1-\ldots-\vartheta_{m-2})+$$

$$+\tau_m\sin(\varphi+\alpha-\vartheta_1-\ldots-\vartheta_{m-1}-\vartheta'_m)+\tau_{m+1}\sin(\varphi+\alpha-\vartheta_1-\ldots-\vartheta_{m+1})+\ldots+$$

$$+\tau_k\sin(\varphi+\alpha-\vartheta_1-\ldots-\vartheta_k)]-\varepsilon=\underline{h}(\varphi)-\varepsilon, \qquad (2.4)$$

где $\vartheta'_m=0$, если $\Theta'_m=\Theta_{m-1}$ и $\vartheta'_m=\vartheta_m$, если $\Theta'_m=\Theta_m$.

Положим теперь

$$h(\varphi)=\pi\left[\tau_1\frac{\sin(\varphi+\alpha)+\sin(\varphi+\alpha-\vartheta_1)}{2}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\tau_k\frac{\sin(\varphi+\alpha-\vartheta_1-\ldots-\vartheta_{k-1})+\sin(\varphi+\alpha-\vartheta_1-\ldots-\vartheta_k)}{2}\right]=\pi(C\sin\varphi-S\cos\varphi). \quad (2.5)$$

Очевидно, что $h(\varphi)\geqslant 0$ $\left(\alpha\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ и, в частности, $h(\alpha)=C\sin\alpha-S\cos\alpha\geqslant 0$, причем знак равенства имеет место только при $\tau=0$. Очевидно также, что всегда $C\geqslant 0$. Заметим еще, что если $\tau=0$, то последовательность $\{\lambda_n\}$ имеет угловую плотность.

Так как

$$|\sin(\varphi+\alpha-\vartheta_1-\ldots-\vartheta_p)-\sin(\varphi+\alpha-\vartheta_1-\ldots-\vartheta_{p-1})|<2\sin\frac{\vartheta_p}{2} \quad (2.6)$$

и

$$1-\frac{1}{2}[\sin(\varphi+\alpha-\vartheta_1-\ldots-\vartheta_{m-1})+\sin(\varphi+\alpha-\vartheta_1-\ldots-\vartheta_m)]=$$

$$=1-\sin\left(\varphi+\alpha-\vartheta_1-\ldots-\vartheta_{m-1}-\frac{1}{2}\vartheta_m\right)\cos\frac{\vartheta_m}{2}=$$

$$=1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\delta\frac{\vartheta_m}{2}\right)<1-\cos^2\frac{\vartheta_m}{2}=\sin^2\frac{\vartheta_m}{2} \qquad (0<\delta<1)$$

ввиду того, что

$$\left|\varphi+\alpha-\vartheta_1-\ldots-\vartheta_{m-1}-\frac{1}{2}\vartheta_m\right|\leqslant\frac{\vartheta_m}{2}$$

в соответствии с определением числа m, то из (2.3) и (2.5) получим

$$0<\bar{h}(\varphi)-h(\varphi)<\pi\tau\sin\frac{\vartheta}{2}, \quad (2.7)$$

где $\vartheta=\max\vartheta_p$. Аналогично, из (2.4) и (2.5) будем иметь

$$0<h(\varphi)-\underline{h}(\varphi)<\pi\tau\sin\frac{\vartheta}{2}. \quad (2.8)$$

Здесь следует воспользоваться тем, что если

$$k(\varphi)=\frac{1}{2}[\sin(\varphi+\alpha-\vartheta_1-\ldots-\vartheta_m)+\sin(\varphi+\alpha-\vartheta_1-\ldots-\vartheta_{m-1})]-$$

$$-\sin(\varphi+\alpha-\vartheta_1-\ldots-\vartheta_{m-1}-\vartheta'_m)=\sin\left(\varphi+\alpha-\vartheta_1-\ldots-\vartheta_{m-1}-\frac{\vartheta_m}{2}\right)\cos\frac{\vartheta_m}{2}-$$

$$-\sin(\varphi+\alpha-\vartheta_1-\ldots-\vartheta_{m-1}-\vartheta'_m),$$

то, в случае когда $\vartheta'_m=0$, имеем

$$0<k(\varphi)=\sin(\varphi+\alpha-\vartheta_1-\ldots-\vartheta_{m-1})\cos^2\frac{\vartheta_m}{2}-$$

$$-\cos(\varphi+\alpha-\vartheta_1-\ldots-\vartheta_{m-1})\sin\frac{\vartheta_m}{2}\cos\frac{\vartheta_m}{2}-\sin(\varphi+\alpha-\vartheta_1-\ldots-\vartheta_{m-1})=$$

$$=-\sin\frac{\vartheta_m}{2}\cos\left(\varphi+\alpha-\vartheta_1-\ldots-\vartheta_{m-1}-\frac{\vartheta_m}{2}\right)<\sin\frac{\vartheta_m}{2},$$

а если $\vartheta'_m=\vartheta_m$, то аналогично

$$0<k(\varphi)=\sin\frac{\vartheta_m}{2}\cos\left(\varphi+\alpha-\vartheta_1-\ldots-\vartheta_{m-1}-\frac{\vartheta_m}{2}\right)<\sin\frac{\vartheta_m}{2}.$$

Справедливость оценок вида (2.7) и (2.8) в случае, когда $\varphi-\frac{\pi}{2}<-\alpha$, устанавливается еще проще, так как в этом случае достаточно воспользоваться неравенством (2.6).

Итак, если $\alpha<\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$, то при любом $\varepsilon>0$ и достаточно большом r, справедливы неравенства

$$\pi(C\sin\varphi-S\cos\varphi)-\pi\tau\sin\frac{\vartheta}{2}-\varepsilon<\frac{\ln|L(re^{i\varphi})|}{r}<$$

$$<\pi(C\sin\varphi-S\cos\varphi)+\pi\tau\sin\frac{\vartheta}{2}+\varepsilon, \quad (2.9)$$

где C и S определены равенством (2.5).

Совершенно аналогично при $-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi<-\alpha$, положив $h(\varphi)=C|\sin\varphi|+S\cos\varphi$, можно доказать неравенства

$$\pi(C|\sin\varphi|+S\cos\varphi)-\pi\tau\sin\frac{\vartheta}{2}-\varepsilon<\frac{\ln|L(re^{i\varphi})|}{r}<$$

$$<\pi(C|\sin\varphi|+S\cos\varphi)+\pi\tau\sin\frac{\vartheta}{2}+\varepsilon, \quad (2.10)$$

имеющие место при любом $\varepsilon>0$, если r достаточно велико. В силу четности функции $L(z)$ соотношения (2.9) справедливы при $\alpha<\varphi<\pi-\alpha$, а соотношения (2.10) при $-(\pi-\alpha)<\varphi<-\alpha$. В том частном случае, когда $\vartheta_1=2\alpha$, $\vartheta_2=\ldots=\vartheta_k=0$, имеем

$$h(\varphi)=\frac{1}{2}\pi\tau[\sin(\varphi-\alpha)+\sin(\varphi+\alpha)]=\pi\tau\sin\varphi\cos\alpha$$

при $\alpha<\varphi<\pi-\alpha$ и

$$h(\varphi)=\pi\tau|\sin\varphi|\cos\alpha$$

при $-(\pi-\alpha)<\varphi<-\alpha$, то есть в неравенствах (2.9), (2.10) следует считать, что $C=\tau\cos\alpha$, $S=0$, $\vartheta=2\alpha$ и, следовательно, при $\alpha<|\varphi|<\pi-\alpha$, любом $\varepsilon>0$ и достаточно большом r

$$\pi\tau\cos\alpha|\sin\varphi|-\pi\tau\sin\alpha-\varepsilon<\frac{\ln|L(re^{i\varphi})|}{r}<\pi\tau\cos\alpha|\sin\varphi|+\pi\tau\sin\alpha+\varepsilon.$$

Заметим, в заключение, что условие $|\arg\lambda_n|\leqslant\alpha$ $(n=1, 2, \ldots)$ можно ослабить, потребовав лишь, чтобы множество предельных точек последовательности $\{\arg\lambda_n\}$ принадлежало интервалу $[-\alpha, \alpha]$. Все сказанное выше останется при этом справедливым, если под ϑ_1 понимать угол $-\alpha-\eta\leqslant\leqslant\arg z<\Theta_1$, а под ϑ_k – угол $\Theta_{k-1}\leqslant\arg z\leqslant\alpha+\eta$, где $\eta>0$ и сколь угодно мало.

§ 3. Особенности одного ряда Дирихле

Пусть последовательность $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет всем тем условиям, о которых шла речь в предыдущем параграфе, и пусть ее индекс конденсации δ конечен:

$$\delta=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{|\lambda_n|}\ln\left|\frac{1}{L'(\lambda_n)}\right|>\infty.$$

Для этого достаточно, чтобы был конечен индекс конденсации $\bar{\delta}$ последовательности $\{|\lambda_n|\}$, так как $\delta\leqslant\bar{\delta}$ (см. [1]).

Рассмотрим функции

$$I_\gamma(s)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_\gamma}\frac{e^{-zs}\,dz}{L(z)},\qquad I_{-\gamma}(s)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_{-\gamma}}\frac{e^{-zs}\,dz}{L(z)},$$

где l_γ – луч $\arg z=\gamma$, $l_{-\gamma}$ – луч $\arg z=-\gamma$ и $\alpha<\gamma<\pi-\alpha$. Как бы ни было мало $\varepsilon>0$, при достаточно большом r имеем по доказанному

$$\ln|L(re^{i\gamma})|>\pi(C\sin\gamma-S\cos\gamma-\rho-\varepsilon)r,$$

где $\rho=\tau\sin\frac{\vartheta}{2}$. Отсюда на l_γ $(z=re^{i\varphi})$

$$\left|\frac{e^{-zs}}{L(z)}\right|<\exp\{[-\pi(C\sin\gamma-S\cos\gamma-\rho)-\sigma\cos\gamma+t\sin\gamma+\varepsilon]r\}$$

$s=\sigma+it)$ и, следовательно, интеграл $I_\gamma(s)$ сходится в полуплоскости

$$(\sigma-\pi S)\cos\gamma-(t-\pi C)\sin\gamma>\pi\rho.$$

Объединение всех таких полуплоскостей при $\alpha<\gamma<\pi-\alpha$ образует область, которая содержит область, дополнительную к области D_1, изображенной на рис. 1.

Рассуждения, дословно повторяющие соответствующие рассуждения в [1], приводят к выводу, что функция $I_\gamma(s)$ голоморфна во внешности области D_1. Аналогично доказывается, что функция $I_{-\gamma}(s)$ голоморфна во внешности области D_2, симметричной с D_1 относительно нулевой точки. Применяя, далее, теорему о вычетах к интегралу

$$\int\limits_{\gamma(R_k)} \frac{e^{-zs}\,dz}{L(z)},$$

где контур $\gamma(R_k)$ — граница сектора, образованного лучами l_γ, $l_{-\gamma}$ и другой окружности $|z|=R_k$, а R_k подобрано так, чтобы на этой дуге имела место

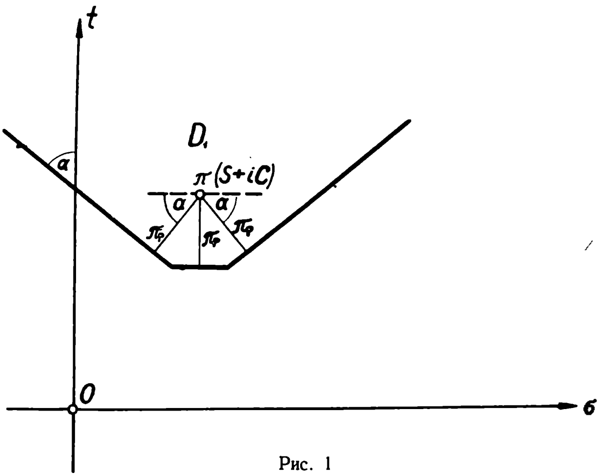

Рис. 1

для $|L(z)|$ соответствующая оценка снизу (см. [1]), и, переходя к пределу при $R_k \to \infty$, получим

$$I_{-\gamma}(s) - I_\gamma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n s}}{L'(\lambda_n)}, \tag{3.1}$$

причем сумма ряда (3.1) голоморфна во внешности областей D_1 и D_2. Всегда можно считать, что область D_1 расположена выше действительной оси, а область D_2 — ниже этой оси, то есть, что $C>\rho$. В самом деле, можно, например, так дополнить последовательность $\{\lambda_n\}$, не изменяя ряда (1) (положив соответствующие коэффициенты ряда равными нулю), чтобы после такого дополнения имели место равенства $\vartheta_1=\vartheta_2=\vartheta_3=\vartheta=\frac{2\alpha}{3}$, $\tau_1=\tau_2=\tau_3=\tau_0$ (в качестве τ_0 можно во всяком случае взять „первоначальную" плотность последовательности $\{|\lambda_n|\}$). Тогда $\tau=3\tau_0$, $\rho=3\tau_0\sin\frac{\alpha}{3}$ и, как нетрудно подсчитать, $C=\tau_0\left(\cos\alpha+2\cos\frac{\alpha}{3}\right)$. Но очевидно, что $3\sin\frac{\alpha}{3}<\cos\alpha+2\cos\frac{\alpha}{3}$ при $\alpha=\frac{\pi}{2}$ и, тем более, при $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Что касается числа S, то будем в дальнейшем, для определенности, считать, что $S\geqslant 0$.

§ 4. Интерполяционные теоремы

Предположим, что существует функция $\varphi(z)$, экспоненциального типа в угле $|\arg z| < \beta$, где $\alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, удовлетворяющая условиям

$$\varphi(\lambda_n) = a_n L'(\lambda_n) \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

и такая, что для ее индикатрисы $H(\psi)$ справедливы неравенства

$$H(\psi) < k\pi (C \sin\psi - S\cos\psi)$$

при $\alpha < \psi < \beta$ и

$$H(\psi) < k\pi (C|\sin\psi| + S\cos\psi)$$

при $-\beta < \psi < -\alpha$.

Пусть сначала $k < 0$. Сопряженная диаграмма функции $\varphi(z)$ находится, как нетрудно подсчитать, в угле

$$\frac{\pi}{2} + \beta < \arg(z - z') < \frac{3\pi}{2} - \beta,$$

где $z' = k\pi(C\operatorname{tg}\beta + iS\operatorname{ctg}\beta)$. Сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n s}}{L'(\lambda_n)},$$

как было доказано, голоморфна во внешности областей D_1 и D_2, определенных в § 3. Отсюда, пользуясь теоремой Крамера—Полиа (см. [1]), приходим к выводу, что функция

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$$

голоморфна в области, заштрихованной на рис. 2, причем, как показывают несложные подсчеты, координаты точек D и A равны соответственно

$$x_D = \pi\left[S + \rho\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) + kC\operatorname{tg}\beta\right],$$

$$y_D = \pi(C - \rho + kS\operatorname{ctg}\beta);$$

$$x_A = \pi\left[-S + \rho\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) + kC\operatorname{tg}\beta\right],$$

$$y_A = \pi(-C + \rho + kS\operatorname{ctg}\beta).$$

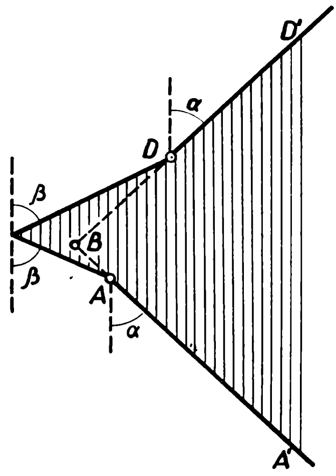

Рис. 2

Составив уравнения прямых DD' и AA', найдем координаты точки пересечения B этих прямых:

$$x_B = \pi(Ck\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha) + \pi\rho\left[\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right], \quad y_B = \pi S(k\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha).$$

Выберем точку E с координатами

$$x_E = \pi\left\{C(k-1)\operatorname{tg}\alpha + \rho\left[\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right]\right\}, \quad y_E = \pi S(k-1)\operatorname{ctg}\alpha.$$

Точка E находится строго внутри угла раствора $\pi - 2\alpha$ с вершиной в точке B и биссектрисой, параллельной действительной положительной полуоси.

Действительно, $\operatorname{tg}\beta > \operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\beta < \operatorname{ctg}\alpha$ и поэтому $x_E > x_B$, $y_E < y_B$. В то же время $\frac{y_B - y_E}{x_E - x_B} = \frac{S}{C}\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta < \operatorname{ctg}\beta < \operatorname{ctg}\alpha$, так как $\frac{S}{C} < \operatorname{tg}\alpha$.

Итак, функция $f(z)$ голоморфна в угле $|\arg(z - z_0)| < \frac{\pi}{2} - \alpha$, где

$$z_0 = \pi\left\{C(k\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha) + \rho\left[\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right] + iS(k\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha)\right\},$$

причем точка

$$\pi\left\{C(k-1)\operatorname{tg}\alpha + \rho\left[\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right] + iS(k-1)\operatorname{ctg}\alpha\right\}$$

лежит строго внутри этого угла.

Пусть теперь $0 \leqslant k < 1 - \frac{\rho}{C}$. В этом случае сопряженная диаграмма функции $\varphi(z)$ лежит в области I (см. рис. 3), ограниченной ломаной, вершины A, B, C которой имеют координаты:

$$x_A = k\pi S,\ y_A = k\pi C;\ x_B = k\pi C\operatorname{tg}\alpha,\ y_B = k\pi S\operatorname{ctg}\alpha;\ x_C = -k\pi S,\ y_C = -k\pi C.$$

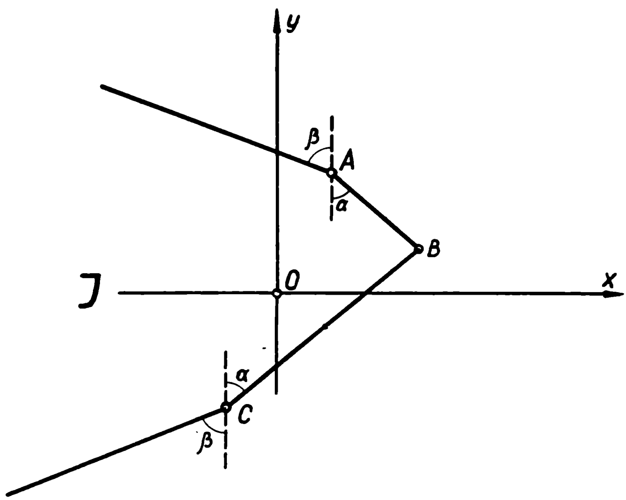

Рис. 3

Применив снова теорему Крамера—Полиа, мы придем к выводу, что функция $f(z)$ голоморфна в области, заштрихованной на рис. 4. При этом, как показывают подсчеты, точки D, E, K имеют, соответственно, координаты:

$$x_D = \pi\left[(1-k)S - \rho\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right],\quad y_D = \pi[(1-k)C - \rho];$$

$$x_E = -\pi\left[(1-k)S - \rho\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right],\quad y_E = -\pi[(1-k)C - \rho];$$

$$x_K = \pi\left\{-(1-k)C\operatorname{tg}\alpha + \rho\left[\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right]\right\},\quad y_K = -\pi S(1-k)\operatorname{ctg}\alpha.$$

При этом
$$KD=\pi\left[(1-k)\left(\frac{C}{\cos\alpha}+\frac{S}{\sin\alpha}\right)-\frac{\rho}{\cos\alpha}\right]>0,$$
а если $x_K<x_E$ (то есть, если точка K не лежит на EE'), то
$$EK=\pi\left[(1-k)\left(\frac{C}{\cos\alpha}-\frac{S}{\sin\alpha}\right)-\frac{\rho}{\cos\alpha}\right].$$

Итак, нами доказана

Теорема 1. *Если существует функция $\varphi(z)$ экспоненциального типа в угле $|\arg z|<\beta$, где $\beta>\alpha$, причем*
$$\varphi(\lambda_n)=a_nL'(\lambda_n)\qquad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$
а индикатриса $H(\psi)$ функции $\varphi(z)$ удовлетворяет условиям
$$H(\psi)<k\pi(C\sin\psi-S\cos\psi)$$
при $\alpha<\psi<\beta$ и
$$H(\psi)<k\pi(C|\sin\psi|+S\cos\psi)$$
при $\beta<\psi<-\alpha$, то

1) *в случае, когда $k<0$, функция*
$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-\lambda_nz}$$
голоморфна в угле $|\arg(z-z_0)|<\frac{\pi}{2}-\alpha$, где
$$z_0=\pi\left\{C(k\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha)+\rho\left[\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+iS(k\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha)\right\},$$
причем строго внутри этого угла находится угол $|\arg(z-z^*)|<\frac{\pi}{2}-\alpha$, где
$$z^*=\pi\left\{C(k-1)\operatorname{tg}\alpha+\rho\left[\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+iS(k-1)\operatorname{ctg}\alpha\right\};\qquad(4.1)$$

2) *в случае, когда $0\leqslant k<1-\frac{\rho}{C}$, функция $f(z)$ голоморфна в угле $|\arg(z-z^*)|<\frac{\pi}{2}-\alpha$ и на примыкающих к вершине отрезках сторон этого угла, длины которых l_1 $\left(\text{на луче } \arg(z-z^*)=\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ и l_2 $\left(\text{на луче } \arg(z-z^*)=\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$, определяются равенствами*

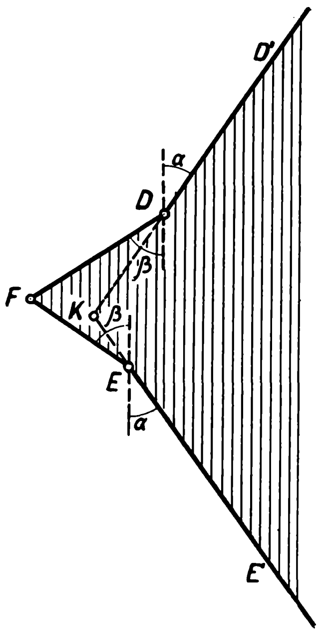

Рис. 4

$$l_1=\pi\left[(1-k)\left(\frac{C}{\cos\alpha}+\frac{S}{\sin\alpha}\right)-\frac{\rho}{\cos\alpha}\right],\qquad(4.2)$$
$$l_2=\max\left\{\pi\left[(1-k)\left(\frac{C}{\cos\alpha}-\frac{S}{\sin\alpha}\right)-\frac{\rho}{\cos\alpha}\right],\ 0\right\}.\qquad(4.3)$$

Заметим, что всегда
$$l_1+l_2\leqslant\frac{2(1-k)C-\rho}{\cos\alpha}\pi.$$

Пусть $k < 1 - \frac{\rho}{C}$, функция $f(z)$ голоморфна в угле $|\arg(z - z^*)| < \frac{\pi}{2} - \alpha$, где z^* определяется равенством (4.1), на примыкающих к вершине отрезках сторон этого угла, длины l_1 и l_2 которых определены с помощью (4.2) и (4.3), и в области G, ограниченной этими отрезками, проведенными через концы этих отрезков прямыми, наклоненными к действительной оси под углами $\frac{\pi}{2} - \beta$ и $\beta - \frac{\pi}{2}$ соответственно (см. рис. 5) и прямой $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z^*$.

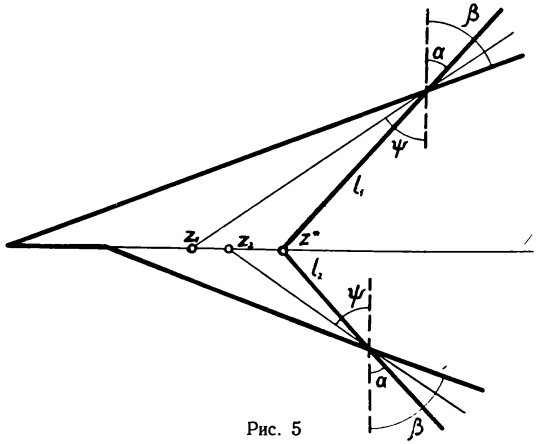

Рис. 5

Повторение рассуждений, которыми автор пользовался в статье [I] (в этих рассуждениях существование угловой плотности последовательности $\{\lambda_n\}$ не предполагалось) приводит к заключению, что существует функция $\varphi(z)$, для которой $\varphi(\lambda_n) = a_n L'(\lambda_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и которая имеет вид $\varphi(z) = -\Phi(z) L(z)$, причем функция $\Phi(z)$ — экспоненциального типа в угле $|\arg z| < \beta$ и

$$\ln|\Phi(re^{i\psi})| < [\operatorname{Re}(z_1 e^{i\psi}) + \varepsilon] r,$$

при $\alpha < \psi < \beta$,

$$\ln|\Phi(re^{i\psi})| < [\operatorname{Re}(z_2 e^{i\psi}) + \varepsilon] r,$$

при $-\beta < \psi < -\alpha$ ($\varepsilon > 0$ сколь угодно мало, r достаточно велико). Здесь z_1 и z_2 — точки пересечения с прямой $\operatorname{Im} z = \pi S(k-1)\operatorname{ctg}\alpha$ прямых, наклоненных к действительной оси соответственно под углами $\pm\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)$ и проходящих через концы соответствующих отрезков сторон угла $|\arg(z - z^*)| < \frac{\pi}{2} - \alpha$, входящих в границу области G.

Пользуясь значениями l_1 и l_2 из (4.2) и (4.3) и зная z^* из (4.1), найдем

$$\operatorname{Re} z_1 = (1-k)S + \rho \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) - [(1-k)(S\operatorname{ctg}\alpha + C) - \rho] \operatorname{tg}\psi,$$

$$\operatorname{Im} z_1 = \pi S(k-1)\operatorname{ctg}\alpha.$$

Отсюда

$$\mathrm{Re}\,(z_1 e^{i\psi}) = \pi \left\{ \left[(1-k)\, S + \rho\, \mathrm{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \right] \cos\psi - [(1-k)\, C - \rho] \sin\psi \right\},$$

а так как при $\varepsilon > 0$ и достаточно большом r $(\alpha < \psi < \beta)$

$$| L(re^{i\psi}) | < \exp \{ \pi r (C \sin\psi - S\cos\psi + \rho + \varepsilon) \},$$

то при тех же условиях

$$| \varphi(re^{i\psi}) | < \exp \left\{ \pi r \left[kC \sin\psi - kS \cos\psi + \rho + \rho \sin\psi + \rho\, \mathrm{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \cos\psi + \varepsilon \right] \right\}.$$

Нетрудно установить, что $\sin\psi + \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \cos\psi < \sqrt{2}$ и поэтому

$$| \varphi(re^{i\psi}) | < \exp \{ \pi r [k (C \sin\psi - S\cos\psi) + \rho (1 + \sqrt{2}) + \varepsilon] \}.$$

Если

$$(1-k) \left(\frac{C}{\cos\alpha} - \frac{S}{\sin\alpha} \right) - \frac{\rho}{\cos\alpha} \leqslant 0, \tag{4.4}$$

то $z_2 = z^*$, откуда

$$\mathrm{Re}\,(z_2 e^{i\psi}) =$$

$$= \pi \left\{ \left(C(k-1)\, \mathrm{tg}\,\alpha + \rho \left[\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \right] \right) \cos\psi + S(k-1)\, \mathrm{ctg}\,\alpha\, | \sin\psi | \right\},$$

а так как при $\varepsilon > 0$, достаточно большом r и $-\beta < \psi < -\alpha$

$$| L(re^{i\psi}) | > \exp \{ \pi r (C | \sin\psi | + S\cos\psi + \rho + \varepsilon) \},$$

то при $-\beta < \psi < -\alpha$

$$| \varphi(re^{i\psi}) | < \exp \left\{ \pi r \left[\left(C(k-1)\, \mathrm{tg}\,\alpha + \rho \left[\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \right] + S \right) \cos\psi + \right.\right.$$

$$\left.\left. + [S(k-1)\, \mathrm{ctg}\,\alpha + C] \, | \sin\psi | + \rho + \varepsilon \right] \right\}.$$

Но из (4.4) следует $(k-1)\, S\, \mathrm{ctg}\,\alpha + C < \rho + kC$, кроме того $C \sin\alpha > S \cos\alpha$, поэтому

$$| \varphi(re^{i\psi}) | < \exp \left\{ \pi r \left[\left(kS + \rho \left[\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \right] \right) \cos\psi + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (kC + \rho) \, | \sin\psi | + \rho + \varepsilon \right] \right\}.$$

Так как

$$\left[\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \right] \cos\psi < \sin\alpha + \mathrm{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right),$$

то

$$\left[\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \right] \cos\psi + | \sin\psi | + 1 < 1 + 2 \sin\alpha + \mathrm{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \cos\alpha =$$

$$= 2 + \sin\alpha < 3.$$

Итак, если выполнено условие (4.4), то

$$| \varphi(re^{i\psi}) | < \exp \{ \pi r [k (C | \sin\psi | + S\cos\psi) + 3\rho + \varepsilon] \}$$

$(-\beta < \psi < -\alpha,\ \varepsilon > 0,\ r$ достаточно велико).

Пусть теперь $(1-k) \left(\frac{C}{\cos\alpha} - \frac{S}{\sin\alpha} \right) - \frac{\rho}{\cos\alpha} > 0$. Имеем

$$\mathrm{Re}\, z_2 = -(1-k)\, S + \rho\, \mathrm{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) - [(1-k)(-S\, \mathrm{ctg}\,\alpha + C) - \rho] \, | \mathrm{tg}\,\psi |,$$

откуда, после несложных выкладок, получим $(-\beta<\psi<-\alpha)$

$$\mathrm{Re}(z_2 e^{i\psi})=\pi\left\{\left[-(1-k)S+\rho\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]\cos\psi+[-(1-k)C+\rho]\,|\sin\psi|\right\}$$

и

$$|\varphi(re^{i\psi})|<\exp\left\{\pi r\left(\left[kS+\rho\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]\cos\psi+(kC+\rho)\,|\sin\psi|+\rho+\varepsilon\right)\right\}<$$
$$<\exp\{\pi r[k(C\,|\sin\psi|+S\cos\psi)+3\rho+\varepsilon]\}$$

($\varepsilon>0$, r достаточно велико).

Таким образом, нами доказана

Теорема 2. *Если $k<1-\frac{\rho}{C}$, функция $f(z)$ голоморфна в угле*

$$|\arg(z-z^*)|<\frac{\pi}{2}-\alpha,$$

где

$$z^*=\pi\left\{C(k-1)+\rho\left[\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]+iS(k-1)\,\mathrm{ctg}\,\alpha\right\},$$

на примыкающих к вершине отрезках сторон этого угла длины

$$\pi\left[(1-k)\left(\frac{C}{\cos\alpha}-\frac{S}{\sin\alpha}\right)-\frac{\rho}{\cos\alpha}\right]$$

и

$$\max\left\{\pi\left[(1-k)\left(\frac{C}{\cos\alpha}-\frac{S}{\sin\alpha}\right)-\frac{\rho}{\cos\alpha},\ 0\right\}$$

соответственно и в определенной выше области G, то существует функция $\varphi(z)$, экспоненциального типа в угле $|\arg z|<\beta$, для которой $\varphi(\lambda_n)=a_n L'(\lambda_n)$, $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ и индикатриса $h(\psi)$ которой удовлетворяет в угле $\alpha<\psi<\beta$ неравенству $h(\psi)\leqslant\pi[k(C\sin\psi-S\cos\psi)+\rho(1+\sqrt{2})]$, а в угле $-\beta<\psi<-\alpha$ — неравенству $h(\psi)\leqslant\pi[k(C\,|\sin\psi|+S\cos\psi)+3\rho]$.

§ 5. Основные теоремы

Пусть $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ и множество предельных точек последовательности $\{\arg\lambda_n\}$ принадлежит отрезку $[-\alpha,\ \alpha]$. Всякий угол $|\arg(z-z_0)|<\frac{\pi}{2}-\alpha$, в котором функция

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\lambda_n z} \tag{5.1}$$

голоморфна и который не находится строго внутри другого угла $|\arg(z-\tilde{z}_0)|<$ $<\frac{\pi}{2}-\alpha$, в котором функция $f(z)$ также голоморфна, будем называть у г л о м г о л о м о р ф н о с т и ряда (5.1).

Пусть z^* — вершина угла голоморфности ряда (5.1) и пусть функция $f(z)$ голоморфна на примыкающих к вершине отрезках сторон этого угла длины

$$q_1=\pi\left[(1-k_1)\left(\frac{C}{\cos\alpha}-\frac{S}{\sin\alpha}\right)-\frac{\rho}{\cos\alpha}\right]$$

и

$$q_2=\max\left\{\pi\left[(1-k_1)\left(\frac{C}{\cos\alpha}-\frac{S}{\sin\alpha}\right)-\frac{\rho}{\cos\alpha}\right],\ 0\right\},$$

соответственно, а также в области G, ограниченной этими отрезками и прямыми, проходящими через концы этих отрезков и наклоненными к действительной оси под углами, равными соответственно $\frac{\pi}{2}-\beta$ и $\beta-\frac{\pi}{2}$ $\left(\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$. Пусть, наконец,

$$k_1 < -\frac{3\rho}{C\sin\alpha - S\cos\alpha}. \tag{5.2}$$

Сделав замену

$$\zeta = z - z^* + (k_1-1)\pi C\operatorname{tg}\alpha + \pi\rho\left[\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right] + i\pi S(k_1-1)\operatorname{ctg}\alpha,$$

получим

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n\zeta} = F(\zeta),$$

причем угол $|\arg(\zeta-\zeta^*)|<\frac{\pi}{2}-\alpha$, где

$$\zeta^* = \pi\left\{(k_1-1)C\operatorname{tg}\alpha + \rho\left[\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right] + iS(k_1-1)\operatorname{ctg}\alpha\right\}$$

является углом голоморфности функции $F(\zeta)$ и функция $F(\zeta)$ голоморфна на примыкающих к вершине отрезках сторон угла голоморфности длины q_1 и q_2 соответственно, а также в области G', полученной с помощью соответствующего сдвига области G. На основании теоремы 2 мы можем утверждать, что существует функция $\varphi(\zeta)$ экспоненциального типа в угле $|\arg\zeta|<\beta$, удовлетворяющая условиям $\varphi(\lambda_n)=A_nL'(\lambda_n)$ $(n=1, 2, \ldots)$ и для индикатрисы которой в углах $\alpha<|\psi|<\beta$ имеют место неравенства:

$$h(\psi)\leqslant\pi[k_1(C\sin\psi - S\cos\psi)+3\rho] < k\pi(C\sin\psi - S\cos\psi)$$

при $\alpha<\psi<\beta$ и

$$h(\psi)\leqslant\pi[k_1(C|\sin\psi| + S\cos\psi)+3\rho] < k\pi(C|\sin\psi| + S\cos\psi)$$

при $-\beta<\psi<-\alpha$, где $k=k_1+\frac{3\rho}{C\sin\alpha-S\cos\alpha}<0$. Основываясь на теореме 1, мы можем теперь утверждать, что функция $F(\zeta)$ голоморфна в угле $\arg(\zeta-\zeta_0)\,|<\frac{\pi}{2}-\alpha$ с вершиной в точке

$$\zeta_0 = \pi\left\{C(k\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha)+\rho\left[\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]+iS(k\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha)\right\}.$$

Выясним, при каком β точка ζ^* окажется внутренней для этого угла. Имеем

$$\operatorname{Im}\zeta^*-\operatorname{Im}\zeta_0=\pi S(k_1\operatorname{ctg}\alpha-k\operatorname{ctg}\beta),\quad \operatorname{Re}\zeta^*-\operatorname{Re}\zeta_0=\pi C(k_1\operatorname{tg}\alpha-k\operatorname{tg}\beta).$$

Но $|k_1\operatorname{ctg}\alpha|>|k\operatorname{ctg}\beta|$, поэтому $k_1\operatorname{ctg}\alpha-k\operatorname{ctg}\beta<0$, то есть $\operatorname{Im}\zeta^*<\operatorname{Im}\zeta_0$. Пусть $|k_1|\operatorname{tg}\alpha<|k|\operatorname{tg}\beta$, тогда $\operatorname{Re}\zeta^*>\operatorname{Re}\zeta_0$. Положим $k_1=(1+\varepsilon)k$, тогда наложенное нами условие примет вид

$$\operatorname{tg}\beta>(1+\varepsilon)\operatorname{tg}\alpha. \tag{5.3}$$

Для того, чтобы точка ζ^* была внутренней точкой угла $|\arg(\zeta-\zeta_0)|<\frac{\pi}{2}-\alpha$, нужно, чтобы

$$\left|\frac{\operatorname{Im}\zeta_0-\operatorname{Im}\zeta^*}{\operatorname{Re}\zeta_0-\operatorname{Re}\zeta^*}\right| = \frac{S}{C}\;\frac{(1+\varepsilon)\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}\beta-(1+\varepsilon)\operatorname{tg}\alpha}<\operatorname{ctg}\alpha,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\beta>\frac{1}{2}\left[(1+\varepsilon)\left(\frac{S}{C}+\operatorname{tg}\alpha\right)+\sqrt{(1+\varepsilon)^2\left(\frac{S}{C}+\operatorname{tg}\alpha\right)^2-4\,\frac{S}{C}\,\operatorname{tg}\alpha}\right]. \tag{5.4}$$

Легко при этом видеть, что неравенство (5.3) содержится в неравенстве (5.4). Итак, если выполнены условия (5.2) и (5.4), то точка ζ^* находится внутри угла, в котором функция $F(\zeta)$ голоморфна, а это противоречит тому, что ζ^* — вершина угла голоморфности. Из равенств

$$k=k_1+\frac{3\rho}{C\sin\alpha-S\cos\alpha}, \qquad k_1=(1+\varepsilon)k$$

следует $1-k_1=1+\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{3\rho}{C\sin\alpha-S\cos\alpha}$. Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Функция $f(z)$ имеет по крайней мере одну особую точку в замкнутой области $\Omega_{\varepsilon,\beta}$, ограниченной прилегающими к вершине угла голоморфности отрезками его сторон длины*

$$\pi\left\{\left[1+\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{3\rho}{C\sin\alpha-S\cos\alpha}\right]\left(\frac{C}{\cos\alpha}+\frac{S}{\sin\alpha}\right)-\frac{\rho}{\cos\alpha}\right\}$$

и

$$\pi\left\{\left[1+\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{3\rho}{C\sin\alpha-S\cos\alpha}\right]\left(\frac{C}{\cos\alpha}-\frac{S}{\sin\alpha}\right)-\frac{\rho}{\cos\alpha}\right\}$$

соответственно и проведенными через концы этих отрезков прямыми наклоненными к действительной оси под углами, равными соответстеено $\frac{\pi}{2}-\beta$ и $\beta-\frac{\pi}{2}$, где β и ε связаны условием (5.4) ($\beta>\alpha$, $\varepsilon>0$).

Теорему 3 можно несколько уточнить, если заменить (5.2) неравенством

$$k_1<-\max\left\{\frac{3\rho}{C\sin\alpha+S\cos\alpha}, \quad \frac{\rho(1+\sqrt{2})}{C\sin\alpha-S\cos\alpha}\right\}.$$

Пусть

$$\delta=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{|\lambda_n|}\ln\left|\frac{1}{L'(\lambda_n)}\right|<\infty$$

— индекс конденсации последовательности $\{\lambda_n\}$, H — угол голоморфности функции

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\lambda_n z}.$$

Теорема 4. *Всякий луч, лежащий в H, наклоненный под углом $\frac{\pi}{2}-\alpha$ к действительной оси и отстоящий от соответствующей стороны угла H на расстоянии, большем чем $\delta+\pi[C\sin\alpha-S\cos\alpha+(1+\sqrt{2})\rho]$, лежит весь, за исключением, быть может, конечного своего отрезка, в области сходимости ряда* (5.1). *Такое же утверждение справедливо и для луча, параллельного другой стороне угла H и отстоящего от нее на расстоянии, большем чем $\delta+\pi(C\sin\alpha+S\cos\alpha+3\rho)$.*

Доказательство. Сдвиг влияет только на коэффициенты ряда, поэтому можно считать, что вершина некоторого угла H', в котором функция $f(z)$ голоморфна, находится в точке

$$z^*=\pi\left\{C(k-1)\operatorname{tg}\alpha+\rho\left[\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]+iS(k-1)\operatorname{ctg}\alpha\right\},$$

где $k<1-\frac{\rho}{C}$. Положим $C(k-1)\operatorname{tg}\alpha=-\varepsilon$, откуда $k=1-\frac{\varepsilon}{C}\operatorname{ctg}\alpha$, где $\varepsilon>\rho\operatorname{tg}\alpha$ (при этом можно ε взять сколь угодно близким к $\rho\operatorname{tg}\alpha$). Тогда

$$z^*=\pi\left\{-\varepsilon+\rho\left[\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]-i\varepsilon\frac{S}{C}\operatorname{ctg}^2\alpha\right\},$$

причем z^* может быть сколь угодно близким к

$$\pi\rho\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)-i\,\frac{S}{C}\,\rho\operatorname{ctg}\alpha\right].$$

Предположим, что функция $f(z)$ голоморфна также и на сторонах угла H' (угол H' можно образовать с помощью сколь угодно малого сдвига угла голоморфности). Тогда из теоремы 2 следует, что существует такое $\beta>\alpha$ и такая функция $\varphi(z)$, экспоненциального типа в угле $|\arg z|<\beta$, для которой $\varphi(\lambda_n)=a_nL'(\lambda_n)$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$, а при $\alpha<\psi<\beta$

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\ \frac{\ln|\varphi(re^{i\psi})|}{r}\leqslant k\pi(C\sin\psi-S\cos\psi)+\pi\rho(1+\sqrt{2})=$$
$$=\pi(C\sin\psi-S\cos\psi)-\pi\,\frac{\varepsilon}{C}\,\operatorname{ctg}\alpha\,(C\sin\psi-S\cos\psi)+\pi\rho(1+\sqrt{2})<$$
$$<\pi(C\sin\psi-S\cos\psi)-\pi\,\frac{\rho}{C}\,(C\sin\psi-S\cos\psi)+\pi\rho(1+\sqrt{2}).$$

В силу непрерывности индикатрисы можно утверждать, что существует такое $\eta>0$, что, как бы ни было мало $\omega>0$, при $\alpha-\eta<\psi<\alpha+\eta$

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\ \frac{\ln|\varphi(re^{i\psi})|}{r}\leqslant\pi[C\sin\alpha-S\cos\alpha+\rho(1+\sqrt{2})]+\omega,$$

так как $C\sin\alpha-S\cos\alpha>0$.

Пусть $\{\lambda_{n_k}\}$-та подпоследовательность последовательности $\{\lambda_n\}$, для членов которой $\arg\lambda_{n_k}\in(\alpha-\eta,\ \alpha+\eta)$. Так как $a_{n_k}=\dfrac{\varphi(\lambda_{n_k})}{L'(\lambda_{n_k})}$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$, то

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\ \frac{\ln|\alpha_{n_k}|}{|\lambda_{n_k}|}\leqslant\pi[C\sin\alpha-S\cos\alpha+\rho(1+\sqrt{2})]+\omega+$$
$$+\overline{\lim_{k\to\infty}}\ \frac{1}{|\lambda_{n_k}|}\ln\left|\frac{1}{L'(\lambda_{n_k})}\right|\leqslant\pi[C\sin\alpha-S\cos\alpha+\rho(1+\sqrt{2})]+\delta+\omega.$$

Из правила для определения области сходимости ряда теперь (см. [5]) следует, что бесконечный отрезок прямой

$$x\cos\alpha-y\sin\alpha-\pi[C\sin\alpha-S\cos\alpha+\rho(1+\sqrt{2})]-\delta-\nu=0 \tag{5.5}$$

$(z=x+iy)$, где $\nu>0$ сколь угодно мало, лежит в области сходимости ряда (5.1). В то же время расстояние вершины угла голоморфности ряда от прямой (5.5) сколь угодно близко к числу

$$\pi(C\sin\alpha-S\cos\alpha)+\pi\rho\left\{1+\sqrt{2}-\cos\alpha\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)+\frac{S}{C}\right]\right\}+\delta<$$
$$<\pi(C\sin\alpha-S\cos\alpha)+\pi\rho(1+\sqrt{2})+\delta.$$

Именно это и требовалось доказать. Совершенно аналогично проводится доказательство и второй части теоремы.

Объединение E всех углов голоморфности ряда

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-\lambda_nz}$$

назовем **звездой голоморфности** этого ряда. Очевидно, что функция $f(z)$ голоморфна в E. Очевидно также, что всякая прямая, наклоненная к действительной оси под углом Θ, где $|\Theta|<\frac{\pi}{2}-\alpha$, встречается с границей звезды голоморфности только в одной точке. Граница звезды голоморфности — кривая с уравнением $x=x(y)$, причем функция $x(y)$ непрерывна. Действительно, всякому заданному y соответствует такое единственное конечное x, что $x+iy$ — вершина угла голоморфности (если $x=-\infty$, то $f(z)$ — целая функция). Если бы функция $x(y)$ не была непрерывна на $(-\infty, \infty)$, то для некоторых y_0 и $\delta>0$ при любом $\varepsilon>0$ нашлось бы такое y_1, удовлетворяющее условию $|y_1-y_0|<\varepsilon$, что $|x_1-x_0|>\delta$ $\left(x_1=x(y_1),\ x_0=x(y_0)\right)$. Но тогда, если ε достаточно мало, один из углов $|\arg(z-z_0)|<\frac{\pi}{2}-\alpha$, $|\arg(z-z_1)|<<\frac{\pi}{2}-\alpha$ $(z_0=x_0+iy_0,\ z_1=x_1+iy_1)$ находился бы строго внутри другого и, следовательно, один из них не был бы углом голоморфности, что противоречит определению звезды голоморфности.

Пусть, сначала, последовательность $\{\lambda_n\}$ имеет угловую плотность. Тогда (см. [1]) на ломаной, состоящей из примыкающих к вершине отрезков сторон угла голоморфности длины $\pi\left(\frac{C}{\cos\alpha}+\frac{S}{\sin\alpha}\right)$ и $\pi\left(\frac{C}{\cos\alpha}-\frac{S}{\sin\alpha}\right)$ соответственно, имеется по крайней мере одна особая точка функции $f(z)$. Здесь

$$C=\int_{-\alpha-0}^{\alpha+0}\cos\varphi\, d\sigma(\varphi),\qquad S=\int_{-\alpha-0}^{\alpha+0}\sin\varphi\, d\sigma(\varphi),$$

а функция $\sigma(\varphi)$ определена с помощью (1.1).

Теорема 5. *Если последовательность $\{\lambda_n\}$ имеет угловую плотность, то*

1) *все точки границы звезды голоморфности ряда* (5.1), *не лежащие на наклоненных под углами $\pm\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ к действительной оси прямолинейных отрезках, входящих в эту границу, — особые для $f(z)$;*

2) *точка z_0 на границе звезды голоморфности, являющаяся вершиной, входящей в эту границу ломаной, состоящей из отрезков лучей $\arg(z-z_0)=$ $=\pm\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$, — особая для $f(z)$;*

3) *на всяком прямолинейном отрезке границы звезды голоморфности длины $\pi\left(\frac{C}{\cos\alpha}+\frac{S}{\sin\alpha}\right)$ наклоненном к действительной оси под углом $\frac{\pi}{2}-\alpha$, и на всяком прямолинейном отрезке этой границы длины $\pi\left(\frac{C}{\cos\alpha}-\frac{S}{\sin\alpha}\right)$, наклоненном к действительной оси под углом $-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, имеется по крайней мере одна особая точка функции $f(z)$.*

Доказательство. Если точка z_0 границы звезды E не является особой для $f(z)$, то существует такая ее окрестность $|z-z_0|<\varepsilon$, в которой $f(z)$ голоморфна. Точка пересечения окружности $|z-z_0|=\varepsilon$ с границей звезды E не может находиться внутри угла $|\arg(z-z_0)|<\frac{\pi}{2}-\alpha$, и если z_0 не лежит на прямолинейном отрезке границы звезды E, наклоненном под углом $\pm\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ к действительной оси, то в точках пересечения окружности $|z-z_0|=\varepsilon$ с границей звезды $|\arg(z-z_0)|>\frac{\pi}{2}-\alpha$, и поэтому существует угол голоморфности, внутри которого находится точка z_0. Но тогда точка z_0 находится внутри E и первая часть теоремы доказана.

Пусть теперь z_0 — точка на границе звезды E, о которой идет речь во второй части теоремы. Если точка z_0 — правильная для $f(z)$, то функция

$f(z)$ голоморфна в области, которую мы получим, присоединив к E некоторую окрестность точки z_0. Но такая область содержит некоторый угол вида $|\arg(z-z')|<\frac{\pi}{2}-\alpha$, внутри которого находится точка z_0 и, следовательно, z_0 лежит внутри некоторого угла голоморфности функции $f(z)$ и, тем более, внутри E, что приводит к противоречию. Этим доказана вторая часть теоремы.

Пусть, наконец, в границу звезды E входит прямолинейный отрезок длины, большей чем $\pi\left(\frac{C}{\cos\alpha}+\frac{S}{\sin\alpha}\right)$, наклоненный к действительной оси под углом $\frac{\pi}{2}-\alpha$, и предположим, что все точки этого отрезка – правильные для $f(z)$. Возьмем на этом отрезке такую точку z_0, что прилегающий к точке z_0 отрезок луча $\arg(z-z_0)=\frac{\pi}{2}-\alpha$, лежащий на границе звезды E, имеет длину, большую чем $\pi\left(\frac{C}{\cos\alpha}+\frac{S}{\sin\alpha}\right)$. Угол $|\arg(z-z_0)<\frac{\pi}{2}-\alpha$ является углом голоморфности нашего ряда (в противном случае этот угол лежал бы строго внутри некоторого угла голоморфности и точка z_0 была бы внутренней точкой звезды E), и так как сторона $\arg(z-z_0)=-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ этого угла лежит внутри E, то на примыкающем к z_0 отрезке стороны $\arg(z-z_0)=$ $=\frac{\pi}{2}-\alpha$ длины $\pi\left(\frac{C}{\cos\alpha}+\frac{S}{\sin\alpha}\right)$ должна иметься особая точка функции $f(z)$ (см. [1]), что приводит нас к противоречию. Совершенно аналогичны рассуждения для прямолинейных отрезков на границе звезды E, образующих с действительной осью угол $-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$. Теорема доказана.

Заметим, что утверждения 1) и 2) теоремы 5 следуют из самого определения звезды голоморфности и поэтому остаются справедливыми и в случае, когда последовательность $\{\lambda_n\}$ не имеет угловой плотности (и даже тогда, когда последовательность $\{|\lambda_n|\}$ не имеет плотности).

Пусть теперь последовательность $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет лишь условиям, сформулированным в § 2. Возьмем любую точку z' границы звезды E, лежащую на прямолинейном отрезке этой границы, наклоненном к действительной оси под углом $\frac{\pi}{2}-\alpha$ или $-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$. Угол $|\arg(z-z')|<\frac{\pi}{2}-\alpha$ является углом голоморфности нашего ряда и поэтому, если обозначить через $\Omega_{\varepsilon,\beta}(z')$, построенную для этого угла область $\Omega_{\varepsilon,\beta}$, о которой идет речь в теореме 3, то можно утверждать, что область $\Omega_{\varepsilon,\beta}(z')$ содержит по крайней мере одну особую точку функции $f(z)$. Итак, для рассматриваемого в этой статье общего случая имеет место

Теорема 6. *Справедливы утверждения* 1) *и* 2) *теоремы* 5. *Если точка* z *принадлежит прямолинейному отрезку, входящему в границу звезды голоморфности рассматриваемого ряда и наклоненному под углом* $\pm\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ *к действительной оси, то всякая соответствующая этой точке область* $\Omega_{\varepsilon,\beta}(z)$ *содержит по крайней мере одну особую точку функции* $f(z)$.

Москва

Поступило в редакцию
10.IV.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Л. Лунц, О рядах Дирихле с комплексными показателями, Мат. сб., 67 (109), № 1 (1965), 89—134.
2. А. Ф. Леонтьев, Ряды полиномов Дирихле и их обобщения, Труды Математ. ин-та им. В. А. Стеклова, 29 (1951), 1—215.
3. Г. Л. Лунц, Ряды Дирихле с неизмеримой последовательностью комплексных показателей, Мат. сб. 68 (110), 1 (1965), 58—62.
4. Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, М., 1956.
5. Г. Л. Лунц, О некоторых обобщениях рядов Дирихле, Мат. сб., 10 (52), № 1—2 (1942), 33—50.

DIRICHLE EILUTĖS, KURIŲ RODIKLIŲ ARGUMENTŲ SEKOS NĖRA REGULIARIAI PASISKIRSČIUSIOS

G. LUNCAS

(Reziumė)

Darbe nagrinėjama Dirichle eilutė

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}, \tag{1}$$

kai rodiklių seka $\{\lambda_n\}$ patenkina šias sąlygas:

$$|\arg\lambda_n|\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2} \quad \text{ir} \quad \tau=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{|\lambda_n|}<\infty,$$

ir įrodoma kelios teoremos, kuriose nušviečiama funkcijos $f(z)$ pavienumų pasiskirstymo klausimai ir nustatomi sąryšiai tarp (1) eilutės konvergencijos srities ir šios eilutės holomorfiškumo srities.

Tarkime, kad kampas $|\text{ar } z|\leqslant\alpha$ susideda iš kampų $\vartheta_j (j=1, 2, \ldots, m)$ ir seka $\{\lambda_n\}$ susideda atitinkamai iš sekų $\{\lambda_n^{(j)}\}$, kur $\lambda_n^{(j)}\in\vartheta_j$. Jei visi kampai ϑ_j yra maži ir egzistuoja ribos $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n^{(j)}} (j=1, 2, \ldots, m)$, tai rezultatai gauti aukščiau minėtose teoremose yra artimi atitinkamiems rezultatams, kai seka $\{\lambda_n\}$ yra reguliariai pasiskirsčiusi, t. y., kai seka $\{\lambda_n\}$ turi kampinį tankį.

LES SÉRIES DE DIRICHLET AVEC UNE DISTRIBUTION IRRÉGULIÈRE DES ARGUMENTS DES EXPOSANTS

G. LUNTS

(Résumé)

On considère la série

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}. \tag{1}$$

La suite λ_n est telle que $|\arg\lambda_n|\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$ et $\tau=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{|\lambda_n|}<\infty$. On démontre quelques théorèmes sur la distribution des points singuliers de $f(z)$ et sur la relation entre les domaines de convergence et d'holomorphie de la série (1). Supposons que l'angle $|\arg z|\leqslant\alpha$ se compose des angles $\vartheta_j (j=1, \ldots, m)$ et les suites $\{\lambda_n^{(j)}\}$, composées des exposants λ_n appartenants à ϑ_j, sont telles que les limites $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{|\lambda_n^{(j)}|}$ $(j=1, \ldots, m)$ existent. Si le plus grand parmi les angles ϑ_j est petit, les théorèmes dont il s'agit sont proches à ceux qui ont lieu au cas où la suite $\{\lambda_n\}$ possède une densité angulaire.