VI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 4
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1966

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ГЕОМЕТРИИ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА ГИПЕРПЛОСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

И. Х. МЕДВЕДЕВАЙТЕ

Пространство опорных элементов называется пространством гиперплоских элементов, если опорным объектом является ковектор. Рассматривается метрическая связность пространства гиперплоских элементов с метрикой, а так же один вариант теории кривых метрического пространства гиперплоских элементов. Аналогичные вопросы для метрического пространства линейных элементов рассмотрены в работах В. И. Близникаса [1], [2].

§ 1. Метрическое пространство гиперплоских элементов

Пусть дважды продолженную группу аналитических преобразований определяют формы ω^i, ω^i_j, ω^i_{jk}, структурные уравнения которых имеют вид:

$$D\omega^i=[\omega^k,\ \omega^i_k], \tag{1_1}$$

$$D\omega^i_j=[\omega^k_j,\ \omega^i_k]+[\omega^k,\ \omega^i_{jk}], \tag{1_2}$$

$$D\omega^i_{jk}=[\omega^l_{jk},\ \omega^i_l]+[\omega^l_{lk},\ \omega^l_j]+[\omega^i_{jl},\ \omega^l_k]+[\omega^l,\ \omega^i_{jkl}] \tag{1_3}$$

$$(i,\ j,\ k,\ \ldots=1,\ \ldots,\ n),$$

где формы ω^i_{jk}, ω^i_{jkl} – симметричны по всем нижним индексам. Система уравнений $\omega^i=0$ вполне интегрируема, и ее первые интегралы можно считать локальными координатами n-мерного дифференцируемого многообразия V_n. Система уравнений

$$\omega^i=0,\quad du_k-u_p\,\omega^p_k=0$$

тоже вполне интегрируема, ее первые интегралы $(x^i,\ u_i)$ определяют локальные координаты нового пространства, которое называется пространством гиперплоских элементов. Оказывается, что формы $\Theta_i=du_i-u_k\,\omega^k_i$ имеют следующую структуру:

$$D\Theta_i=[\omega^k_i,\ \Theta_k]+]\omega^k_{ip},\ \omega^p]\,u_k.$$

Будем считать, что в пространстве гиперплоских элементов определено тензорное поле $g_{ij}=g_{ij}(x,\ u)$. Пространство гиперплоских элементов, в котором определено симметрическое невырожденное тензорное поле g_{ij}, называется метрическим пространством гиперплоских элементов $\mathfrak{M}_n$. Система дифференциальных уравнений этого тензорного поля имеет следующий вид:

$$\nabla g_{ij}\equiv dg_{ij}-g_{kj}\,\omega^k_i-g_{ik}\,\omega^k_j=g_{ij,\,k}\,\omega^k+g'^k_{ij}\,\Theta_k. \tag{2}$$

Так как тензор g^{ik} определяется следующими соотношениями:

$$g_{ij}\,g^{ik}=\delta^k_j,$$

где δ_j^k — тензор Кронекера, то, дифференцируя эти равенства, мы получим

$$\nabla g^{ij} \equiv dg^{ij} + g^{kj}\,\omega_k^i + g^{ik}\,\omega_k^j = g_k^{ij}\,\omega^k + g'^{ij,\,k}\,\Theta_k, \tag{3}$$

где

$$g_p^{kq} = -g_{ij,\,p}\,g^{ik}\,g^{jq}, \tag{4}$$

$$g'^{pk,\,q} = -g_{ij}'^{p}\,g^{ik}\,g^{jq}. \tag{5}$$

Дифференцируя внешним образом систему (3) и применяя лемму Картана, получаем:

$$\nabla q_p^{ij} - 2g^{k(j}\,\omega_{kp}^{i)} - g'^{ij,\,k}\,u_s\,\omega_{kp}^s = g_{ps}^{ij}\,\omega^s + g_p'^{ij,\,s}\,\Theta_s, \tag{6}$$

$$\nabla g'^{ij,\,p} = g_{s.}^{ij,\,p}\,\omega^s + g''^{ij,\,ps}\,\Theta_s, \tag{7}$$

где

$$g_{ps}^{ij} = g_{sp}^{ij}, \qquad g''^{ij,\,ps} = g''^{ij,\,sp}.$$

Если

$$\bar{u}_k = \rho u_k, \ (\rho > 0) \quad \text{и} \quad \bar{\Theta}_i = d\bar{u}_i - \bar{u}_k\,\omega_i^k,$$

то

$$\bar{\Theta}_i = \rho\,(\Theta_i + u_i\,d\,ln\rho). \tag{8}$$

Будем считать, что $g_{ij}(x,\ \bar{u}) = g_{ij}(x,\ u)$. Отсюда следует, что

$$g_{kh}^{ij}(x,\ \bar{u}) = g_{kh}^{ij}(x,\ u), \tag{9}$$

$$g_k'^{ij,\,h}(x,\ \bar{u}) = \rho^{-1}\,g_k'^{ij,\,h}(x,\ u), \tag{10}$$

$$g_k'^{ij,\,s}(x,\ \bar{u})\ u_s = 0. \tag{11}$$

§ 2. Аффинная связность

Аффинная связность в метрическом пространстве гиперплоских элементов может быть определена при помощи следующих форм [2]:

$$\tilde{\omega}^i = \omega^i, \quad \tilde{\omega}_j^i = \omega_j^i + \Gamma_{jk}^i\,\omega^k + C_j^{ik}\,\Theta_k. \tag{12}$$

Евклидовой связностью картановского типа, присоединенной к метрическому тензору g^{ij} пространства гиперплоских элементов $\mathfrak{M}_n$, назовем аффинную связность, определенную пфаффовыми формами (12) и подчиненную следующим требованиям (они аналогичны требованиям, приведенным в [2]):

$$\begin{aligned}
&1.\ \Gamma_{jk}^i(x,\ \bar{u}) = \Gamma_{jk}^i(x,\ u),\\
& C_j^{ik}(x,\ \bar{u}) = \rho^{-1}\,C_j^{ik}(x,\ u),\\
&2.\ C_j^{ik}\,u_k = 0,\\
&3.\ \tilde{\nabla} g^{ij} \equiv dg^{ij} + g^{kj}\,\tilde{\omega}_k^i + g^{ik}\,\tilde{\omega}_k^j = 0,\\
&4.\ C_j^{ik} = C_j^{ki},\\
&5.\ \Gamma_{jk}^{*i} = \Gamma_{kj}^{*i},
\end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\Gamma_{jk}^{*i} = \Gamma_{jk}^i + C_j^{ip}\,\Gamma_{pk}^s\,u_s. \tag{14}$$

Докажем, что евклидова связность картановского типа пространства гиперплоских элементов $\mathfrak{M}_n$ однозначно определяется компонентами фундаментального объекта первого порядка пространства $\mathfrak{M}_n$. Так как

$$\tilde{\Theta}_i = du_i - \omega_i^k\,u_k,$$

то

$$\tilde{\Theta}_i = \Theta_i - \Gamma^0_{ip}\,\omega^p, \tag{15}$$

где

$$\Gamma^0_{ip} = \Gamma^k_{ip}\,u_k.$$

Из (14) следует, что

$$\Gamma^{*0}_{jk} = \Gamma^0_{jk}.$$

Выполнив вычисления, получаем:

$$\tilde{\omega}^i_j = \omega^i_j + \Gamma^{*i}_{jk}\,\omega^k + C^{ik}_j\,\tilde{\Theta}_k. \tag{16}$$

Из (3), в силу (16), следует, что

$$\tilde{\nabla} g^{ij} \equiv dg^{ij} + g^{kj}\,\tilde{\omega}^i_k + g^{ik}\,\tilde{\omega}^j_k = \tilde{g}^{ij}_k\,\omega^k + \tilde{g}'^{ij,\,k}\,\tilde{\Theta}_k, \tag{17}$$

где

$$\tilde{g}^{ij}_k = g^{ij}_k + g^{pj}\,\Gamma^{*i}_{pk} + g^{ip}\,\Gamma^{*j}_{pk} + g'^{ij,\,p}\,\Gamma^0_{pk},$$

$$\tilde{g}'^{ij,\,k} = g'^{ij,\,k} + g^{pj}\,C^{ik}_p + g^{ip}\,C^{jk}_p.$$

В силу линейной независимости форм ω^i и $\tilde{\Theta}_k$ соотношения (13) эквивалентны следующим уравнениям:

$$g^{ij}_k + g^{pj}\,\Gamma^{*i}_{pk} + g^{ip}\,\Gamma^{*j}_{pk} + g'^{ij,\,p}\,\Gamma^0_{pk} = 0, \tag{18}$$

$$g'^{ij,\,k} + g^{pj}\,C^{ik}_p + g^{ip}\,C^{jk}_p = 0. \tag{19}$$

Очевидно, что $\tilde{\nabla} g_{ij} = 0$,

$$\tilde{\nabla} g_{ij} \equiv dg_{ij} - g_{kj}\,\tilde{\omega}^k_i - g_{ik}\,\tilde{\omega}^k_j = \tilde{g}_{ij,\,k}\,\omega^k + \tilde{g}'^k_{ij}\,\tilde{\Theta}_k, \tag{20}$$

где

$$\tilde{g}_{ij,\,k} = g_{ij,\,k} - g_{pj}\,\Gamma^{*p}_{ik} - g_{ip}\,\Gamma^{*p}_{jk} + g'^p_{ij}\,\Gamma^0_{pk},$$

$$\tilde{g}^k_{ij} = g'^k_{ij} - g_{pj}\,C^{pk}_i - g_{ip}\,C^{pk}_j.$$

Так как формы ω^i и $\tilde{\Theta}_k$ линейно независимы, то из (20) получаем следующие уравнения:

$$g_{ij,\,k} - g_{pj}\,\Gamma^{*p}_{ik} - g_{ip}\,\Gamma^{*p}_{jk} + g'^p_{ij}\,\Gamma^0_{pk} = 0, \tag{21}$$

$$g'^k_{ij} - g_{pj}\,C^{pk}_i - g_{ip}\,C^{pk}_j = 0. \tag{22}$$

Общее решение системы (19) можно представить в следующем виде:

$$C^{ij}_k = \frac{1}{2}\,g_{pk}\,(g'^{ij,\,p} - g'^{jp,\,i} - g'^{pi,\,j}).$$

Если ввести обозначения:

$$X^k_{ij} = \frac{1}{2}\,g^{pk}\,(g_{ij,\,p} + g_{jp,\,i} - g_{pi,\,j})$$

и провести циклирование индексов i, j, k в уравнениях (21), то получим:

$$\Gamma^{*s}_{ip} = X^s_{ip} + \frac{1}{2}\,g^{js}\,(g'^k_{ij}\,\Gamma^0_{kp} + g'^k_{pj}\,\Gamma^0_{ki} - g'^k_{pi}\,\Gamma^0_{kj}). \tag{23}$$

Если тензор H^{st}_{ip}:

$$H^{st}_{pi} = \delta^s_i\,\delta^t_p - \frac{1}{2}\,g^{js}\,(g'^k_{ij}\,\delta^s_k\,\delta^t_p + g'^k_{pj}\,\delta^t_i\,\delta^s_k - g'^k_{pi}\,\delta^s_k\,\delta^t_j),$$

невырожденный, т. е.

$$\det \| H^{st}_{ip} \| \neq 0$$

и $\tilde{H}^{pj}_{sk}$ — обратный тензор, определенный равенствами:

$$H^{st}_{ip}\,\tilde{H}^{pj}_{sk}=\delta^j_i\,\delta^t_k,$$

то, свертывая равенства (23) с u_s, получаем:

$$\Gamma^0_{ik}=X^0_{jp}\,\tilde{H}^{pj}_{ik}. \tag{24}$$

Из (23) и (24) следует, что величины Γ^{*i}_{jk} определяются через g_{ij}, $g_{ij,\,k}$ и g'^k_{ij} однозначно. Таким образом, метрическая связность картановского типа определяется однозначным образом.

§ 3. Структурные уравнения

Оказывается, что величины Γ^0_{ij}, Γ^{*i}_{jk} и C^{ij}_k являются решениями следую щих систем дифференциальных уравнений:

$$d\Gamma^0_{ij}-\Gamma^0_{kj}\,\omega^k_i-\Gamma^0_{ik}\,\omega^k_j-\omega^k_{ij}\,u_k=\Gamma^0_{ip,\,s}\,\omega^s+\Gamma^{0,\,q}_{ip}\,\Theta_q, \tag{25}$$

$$d\Gamma^{*i}_{jk}-\Gamma^{*i}_{jp}\,\omega^p_k-\Gamma^{*i}_{pk}\,\omega^p_j+\Gamma^{*p}_{jk}\,\omega^i_p-\omega^i_{jk}=\Gamma^{*i}_{jk,\,p}\,\omega^p+\Gamma^{*i,\,p}_{jk}\,\tilde{\Theta}_p, \tag{26}$$

$$dC^{ik}_j+C^{ip}_j\,\omega^k_p+C^{pk}_j\,\omega^i_p-C^{ik}_p\,\omega^p_j=C^{ik}_{j,\,p}\,\omega^p+C^{ik,\,p}_j\,\tilde{\Theta}_p, \tag{27}$$

где

$$\Gamma^0_{ip,\,s},\quad \Gamma^{0,\,q}_{ip},\quad \Gamma^{*i}_{jk,\,p},\quad \Gamma^{*i,\,p}_{jk},\quad C^{ik}_{j,\,p},\quad C^{ik,\,p}_j$$

однозначно выражаются через компоненты фундаментального объекта второ го порядка пространства $\mathfrak{M}_n$. Уравнения (1_1) можно переписать в виде:

$$D\omega^i=[\omega^k,\ \tilde{\omega}^i_k]+R^i_{kp}\,[\omega^p,\ \omega^k]+C^{ip}_k\,[\tilde{\Theta}_p,\ \omega^k], \tag{28}$$

где

$$R^i_{kp}=\Gamma^{*i}_{[kp]}. \tag{29}$$

Дифференцируя внешним образом (15) и (16), в силу (2), (7) и (26), получим:

$$D\tilde{\Theta}_i=[\tilde{\omega}^p_i,\ \tilde{\Theta}_p]+R_{ip,\,k}\,[\omega^p,\ \omega^k]+K^p_{is}\,[\tilde{\Theta}_p,\ \omega^s]+M^{pk}_i\,[\tilde{\Theta}_p,\ \tilde{\Theta}_k], \tag{30}$$

$$D\tilde{\omega}^i_j=[\tilde{\omega}^k_j,\ \tilde{\omega}^i_k]+R^{*i}_{jk,\,p}\,[\omega^p,\ \omega^k]+K^{*i,\,p}_{js}\,[\tilde{\Theta}_p,\ \omega^s]+M^{ik,\,p}_j\,[\tilde{\Theta}_p,\ \tilde{\Theta}_k], \tag{31}$$

где

$$R_{ip,k}=\tilde{\Gamma}^0_{i[kp]}, \tag{30_1}$$

$$\tilde{\Gamma}^0_{ip,\,k}=\Gamma^0_{ip,\,k}+\Gamma^{0,\,q}_{ip}\,\Gamma^0_{qk}, \tag{30_2}$$

$$K^p_{is}=\Gamma^{0,\,p}_{is}-\Gamma^{*p}_{is}, \tag{30_3}$$

$$M^{pk}_i=C^{[pk]}_i, \tag{30_4}$$

$$R^{*i}_{jk,\,p}=\Gamma^{*i}_{j\,[kp]}-\Gamma^{*q}_{j\,[p}\,\Gamma^{*i}_{k]\,q}-C^{iq}_j\,\Gamma^0_{q\,[kp]}, \tag{31_1}$$

$$K^{*i,\,p}_{js}=\Gamma^{*i,\,p}_{js}-C^{ip}_{j,\,s}-\Gamma^{*i}_{qs}\,C^{qp}_j-\Gamma^{0,\,p}_{qs}\,C^{iq}_j+\Gamma^{*q}_{js}\,C^{ip}_q, \tag{31_2}$$

$$M^{ik,\,p}_j=C^{i\,[kp]}_j-C^{q\,[p}_j\,C^{k]\,i}_q. \tag{31_3}$$

Уравнения (28), (30) и (31) называются структурными уравнениями метрического пространства гиперплоских элементов с метрической связностью картановского типа. Каждая из систем величин, определенных равенствами (29), (30_1), (30_2), (30_3), (30_4), (31_1), (31_2), (31_3), образует тензор. Тензоры C^{ik}_j и R^i_{jk} будем называть тензорами кручения, а все остальные — тензорами кривизны.

§ 4. Кривые в метрическом пространстве гиперплоских элементов

Под кривой в метрическом пространстве гиперплоских элементов $\mathfrak{M}_n$ будем понимать однопараметрическое семейство гиперплоских элементов, центры которых образуют точечную кривую (центроиду рассматриваемой кривой). Дифференциальные уравнения такой кривой можно записать следующим образом:

$$\omega^i = l^i_{(1)}\, ds, \quad \tilde{\Theta}_i = l^{(1)}_i\, ds, \tag{32}$$

где s — дуга центроиды.

Дифференцируя внешним образом уравнение (32_1) и применяя лемму Картана, получим:

$$dl^i_{(1)} + l^k_{(1)}\, \tilde{\omega}^i_k = l^i_{(2)}\, ds.$$

Последовательно продолжая полученную систему, будем иметь:

$$dl^i_{(p)} + l^k_{(p)}\, \tilde{\omega}^i_k = l^i_{(p+1)}\, ds, \tag{33}$$

$$p = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Последовательное продолжение (32_2) дает:

$$dl^{(p)}_i - l^{(p)}_k\, \tilde{\omega}^k_i = l^{(p+1)}_i\, ds. \tag{34}$$

Построим систему векторов

$$\Lambda_p = l^i_{(p)}\, \mathbf{e}_i \tag{35}$$

и систему ковекторов

$$\Lambda^p = l^{(p)}_i\, \mathbf{e}_i. \tag{36}$$

Рассмотрим те случаи, когда

$$det\, \| l^i_{(p)} \| \neq 0, \quad det\, \| l^{(p)}_i \| \neq 0.$$

Очевидно, что

$$\Lambda_1 = \frac{dA}{ds}, \quad d\Lambda_i = \Lambda_{i+1}\, ds, \quad d\Lambda^i = \Lambda^{i+1}\, ds,$$

где A — вершина локального репера $\{A,\ \mathbf{e}_i\}$ пространства $\mathfrak{M}_n$. Ковекторы

$$\tau^i = \begin{vmatrix} l^{11} & l^{12} & \ldots & l^{1,i-1} & \Lambda^1 \\ l^{21} & l^{22} & \ldots & l^{2,i-1} & \Lambda^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l^{i1} & l^{i2} & \ldots & l^{i,i-1} & \Lambda^i \end{vmatrix}, \tag{37}$$

где

$$l^{pk} = (\Lambda^p\, \Lambda^k) = l^{(p)}_i\, l^{(k)}_j\, g^{ij}$$

образуют ортогональную систему ковекторов. Таким образом, ковекторы

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{A}^i\, \mathfrak{A}^{i-1}}}\, \tau^i, \tag{38}$$

где

$$\mathfrak{A}^0 = 1, \quad \mathfrak{A}^i = \begin{vmatrix} l^{11} & l^{12} & \ldots & l^{1i} \\ l^{21} & l^{22} & \ldots & l^{2i} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l^{i1} & l^{i2} & \ldots & l^{ii} \end{vmatrix}$$

образуют ортонормированную систему ковекторов. Дифференцируя равенства (38), получаем:

$$\frac{d\mathbf{t}^i}{ds} = -k^{i-1}\, \mathbf{t}^{i-1} + k^i\, \mathbf{t}^{i+1}, \tag{39}$$

где

$$k^i = \frac{\sqrt{\mathfrak{A}^{i-1}\mathfrak{A}^{i+1}}}{\mathfrak{A}^i}.$$

Система векторов

$$\mathbf{t}_i = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{A}_i \mathfrak{A}_{i-1}}} \begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1,i-1} & \Lambda_1 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & l_{2,i-1} & \Lambda_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{i1} & l_{i2} & \cdots & l_{i,i-1} & \Lambda_i \end{vmatrix}, \tag{40}$$

где

$$\mathfrak{A}_0 = 1, \quad \mathfrak{A}_i = \begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1i} \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & l_{2i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{i1} & l_{i2} & \cdots & l_{ii} \end{vmatrix},$$

$$l_{pk} = (\Lambda_p \Lambda_k) = l^i_{(p)} l^j_{(k)} g_{ij}$$

образует ортонормированную систему (см. [1]). Дифференцируя (40), получим:

$$\frac{d\mathbf{t}_i}{ds} = -k_{i-1}\mathbf{t}_{i-1} + k_i \mathbf{t}_{i+1}, \tag{41}$$

где

$$k_i = \frac{\mathfrak{A}_{i-1}\mathfrak{A}_{i+1}}{\mathfrak{A}_i}.$$

Уравнения (39) и (41) будем называть уравнениями Френе рассматриваемой кривой, величины k^i — ковекторными кривизнами, а k_i — векторными кривизнами рассматриваемой кривой.

Выражаю глубокую благодарность своему научному руководителю В. Близникасу за помощь при выполнении этой работы.

Вильнюсский Государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
17.I.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Близникас, Теория кривых метрического пространства линейных элементов, Учен. записки Вильнюсского гос. пед. ин-та, т. 10, 1960, 22—26.
2. В. И. Близникас, Евклидова связность картановского типа в метрическом пространстве линейных элементов, Лит. мат. сб., II, № 2, 1962, 33—37.

METRINĖS HIPERPLOKŠTUMINIŲ ELEMENTŲ ERDVĖS GEOMETRIJOS KLAUSIMU

I. MEDVIEDEVAITĖ

(Reziumė)

Šiame straipsnyje nagrinėjamas Kartano tipo euklidinis sąryšis, įrodoma, kad šio sąryšio objektas (Γ^i_{jk}, C^{ik}_j) vienareikšmiškai nustatomas erdvės $\mathfrak{M}_n$ pirmos eilės fundamentalinio objekto komponentėmis. Surandamos kreivės Frene lygtys, vektoriniai ir kovektoriniai kreivumai.

EINIGE FRAGEN DER GEOMETRIE DES METRISCHEN RAUMES VON HYPEREBENENELEMENTEN

I. MEDVIEDEVAITĖ

(Zusammenfassung)

In diesem Artikel wird der euklidische Zusammenhang des Cartanschen Types erklärt. Es wird bewiesen, dass das Objekt $(\Gamma^i_{jk}, C^{ik}_j)$ dieses Zusammenhanges einstellig durch die Komponente der ersten Ordnung des Fundamentalobjekts des Raumes $\mathfrak{M}_n$ ausgedrückt wird. Da werden die Frenetsche Gleichungen der Kurven, die vektorischen und kovektorischen Krümmungen gefunden.