ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАЗЛОЖИМОСТИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В РЯД КВАЗИПОЛИНОМОВ

И. Г. МЕХТИЕВ

§ 1. В дальнейшем нам придется пользоваться некоторым определителем, построением которого мы сейчас займемся.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – любые различные между собой числа и каждому $\lambda_\nu (\nu=1, 2, \ldots, n)$ соответствует некоторое натуральное число m_ν, которое будем называть кратностью числа λ_ν. Каждому λ_ν сопоставим некоторую таблицу

$$T(\lambda_\nu)=\{a_{ij}^{(\nu)}\}, \quad \text{где} \quad a_{ij}^{(\nu)}=\binom{i-1}{j-1}\lambda_\nu^{i-j}, \tag{1}$$

$$i=1, 2, \ldots, \alpha_n; \quad j=1, 2, \ldots, m_\nu; \quad \alpha_n=\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu$$

($a_{ij}^{(\nu)}$ – элемент таблицы $T(\lambda_\nu)$, стоящий в i-ой строке и j-м столбце), причем будем здесь и дальше считать, что

$$\binom{p}{q}=\begin{cases} 1 & \text{при} \quad p=q \quad \text{и при} \quad q=0, \quad p>q, \\ 0 & \text{при} \quad p<q \quad \text{и при} \quad q<0, \quad p>q. \end{cases}$$

Составим из всех таблиц $T(\lambda_\nu)$ $(\nu=1, 2, \ldots, n)$ определитель Δ_{α_n} порядка α_n и покажем, что

$$\Delta_{\alpha_n}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(\lambda_i-\lambda_j)^{m_i m_j}. \tag{2}$$

Отметим сначала некоторые свойства таблицы $T(\lambda_\nu)$.

Преобразуем таблицу $T(\lambda_\nu)$ следующим образом: из α_n-ой строки вычитаем (α_n-1)-ю, умноженную на λ_ν, затем из (α_n-1)-й строки вычитаем (α_n-2)-ю, также умноженную на λ_ν, и т. д., наконец из второй строки вычитаем первую умноженную на λ_ν. Тогда элемент, принадлежащий i-й строке и j-му столбцу полученной новой таблицы будет иметь следующий вид:

$$\binom{i-1}{j-1}\lambda_\nu^{i-j}-\binom{i-2}{j-1}\lambda_\nu^{i-j-1}\cdot\lambda_\nu=\binom{i-2}{j-2}\lambda_\nu^{i-j}$$

$$(i=1, 2, \ldots, \alpha_n; \quad j=1, 2, \ldots, m_\nu).$$

Очевидно, что элемент, принадлежащий первой строке и первому столбцу новой таблицы, равен 1, а все остальные элементы первой строки и первого столбца равны нулю. Если отбросить в полученной таблице первую строку и первый столбец, получим новую таблицу

$$T_1(\lambda_\nu)=\{a_{ij}^{(\nu)}\}, \quad i=1, 2, \ldots, \alpha_n-1; \quad j=1, 2, \ldots, m_\nu-1, \tag{3}$$

где $a_{ij}^{(\nu)}$ – определены с помощью (1).

Теперь преобразуем таблицу $T(\lambda_\nu)$ по другому: из α_n-ой строки вычитаем (α_n-1)-ю, умноженную на λ_ω, $1\leqslant\omega\leqslant n$, $\omega\neq\nu$, затем из (α_n-1)-й строки вычитаем (α_n-2)-ю, также умноженную на λ_ω, и т. д., наконец из второй строки вычитаем первую, умноженную на λ_ω. Вычеркнув после этого первую строку, получим следующую таблицу:

$$T_\omega(\lambda_\nu)=\{b_{ij}^{(\nu)}\},$$

где

$$b_{ij}^{(\nu)}=\binom{i}{j-1}\lambda_\nu^{i-j+1}-\binom{i-1}{j-1}\lambda_\nu^{i-j}\cdot\lambda_\omega$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ \alpha_n-1;\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ m_\nu).$$

В частности

$$b_{i1}^{(\nu)}=\lambda_\nu^i-\lambda_\nu^{i-1}\cdot\lambda_\omega=\lambda_\nu^{i-1}(\lambda_\nu-\lambda_\omega),$$

т. е., все элементы первого столбца таблицы $T_\omega(\lambda_\nu)$ содержат общий множитель $(\lambda_\nu-\lambda_\omega)$. Выносия формально этот общий множитель за знак таблицы, получим

$$T_\omega(\lambda_\nu)=(\lambda_\nu-\lambda_\omega)\,T_\omega^{(1)}(\lambda_\nu),$$

где

$$T_\omega^{(1)}(\lambda_\nu)=\{c_{ij}^{(\nu)}\},\qquad c_{ij}^{(\nu)}=\begin{cases}\lambda_\nu^{i-1} & \text{при } j=1;\ \ i=1,\ 2,\ \ldots,\ \alpha_n-1,\\ b_{ij}^{(\nu)} & \text{при } j=2,\ 3,\ \ldots,\ m_\nu;\ \ i=1,\ 2,\ \ldots,\ \alpha_n-1.\end{cases}$$

Из определения $a_{ij}^{(\nu)}$ видно, что $c_{ij}^{(\nu)}$ можно записать также следующим образом:

$$c_{ij}^{(\nu)}=\begin{cases}a_{ij}^{(\nu)} & \text{при } j=1;\ \ i=1,\ 2,\ \ldots,\ \alpha_n-1,\\ b_{ij}^{(\nu)} & \text{при } j=2,\ 3,\ \ldots,\ m_\nu;\ \ i=1,\ 2,\ \ldots,\ \alpha_n-1.\end{cases}$$

Элементы второго столбца таблицы $T_\omega^{(1)}(\lambda_\nu)$:

$$c_{i2}^{(\nu)}=b_{i2}^{(\nu)}=\binom{i}{1}\lambda_\nu^{i-1}-\binom{i-1}{1}\lambda_\nu^{i-2}\cdot\lambda_\omega.$$

Из второго столбца таблицы $T_\omega^{(1)}(\lambda_\nu)$ вычтем первый, тогда элементы второго столбца таблицы будут иметь следующий вид:

$$c_{i2}^{(\nu)}-c_{i1}^{(\nu)}=b_{i2}^{(\nu)}-a_{i1}^{(\nu)}=\binom{i}{1}\lambda_\nu^{i-1}-\binom{i-1}{1}\lambda_\nu^{i-2}\cdot\lambda_\omega-\lambda_\nu^{i-1}=\binom{i-1}{1}\lambda_\nu^{i-2}(\lambda_\nu-\lambda_\omega).$$

Вынося также формально из второго столбца преобразованной таким образом таблицы $T_\omega^{(1)}(\lambda_\nu)$ общий множитель $\lambda_\nu-\lambda_\omega$, получим

$$T_\omega(\lambda_\nu)=(\lambda_\nu-\lambda_\omega)^2\,T_\omega^{(2)}(\lambda_\nu),$$

где

$$T_\omega^{(2)}(\lambda_\nu)=\{d_{ij}^{(\nu)}\},\qquad d_{ij}^{(\nu)}=\begin{cases}\binom{i-1}{j-1}\lambda_\nu^{i-j} & \text{при } j=1,\ 2;\ \ i=1,\ 2,\ \ldots,\ \alpha_n-1,\\ b_{ij}^{(\nu)} & \text{при } j=3,\ 4,\ \ldots,\ m_\nu;\ \ i=1,\ 2,\ \ldots,\ \alpha_n-1.\end{cases}$$

Легко видеть, что $d_{ij}^{(\nu)}$ можно также записать в следующем виде:

$$d_{ij}^{(\nu)}=\begin{cases}a_{ij}^{(\nu)} & \text{при } j=1,\ 2;\ \ i=1,\ 2,\ \ldots,\ \alpha_n-1,\\ b_{ij}^{(\nu)} & \text{при } j=3,\ 4,\ \ldots,\ m_\nu;\ \ i=1,\ 2,\ \ldots,\ \alpha_n-1.\end{cases}$$

Покажем, что

$$T_\omega(\lambda_\nu)=(\lambda_\nu-\lambda_\omega)^{m_\nu}\,\tilde{T}(\lambda_\nu),\tag{4}$$

где $\tilde{T}(\lambda_\nu)$ – таблица, которая получается из $T(\lambda_\nu)$ вычеркиванием последней строки.

Действительно, предположим, что

$$T_\omega(\lambda_\nu)=(\lambda_\nu-\lambda_\omega)^k T_\omega^{(k)}(\lambda_\nu),$$

где

$$T_\omega^{(k)}(\lambda_\nu)=\{e_{ij}^{(\nu)}\},\quad e_{ij}^{(\nu)}=\begin{cases} a_{ij}^{(\nu)} & \text{при } j=1,\ 2,\ \ldots,\ k;\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ \alpha_n-1,\\ b_{ij}^{(\nu)} & \text{при } j=k+1,\ \ldots,\ m_\nu;\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ \alpha_n-1,\end{cases}$$

и покажем, что

$$T_\omega(\lambda_\nu)=(\lambda_\nu-\lambda_\omega)^{k+1} T_\omega^{(k+1)}(\lambda_\nu),$$

где

$$T_\omega^{(k+1)}(\lambda_\nu)=\{M_{ij}^{(\nu)}\},\quad M_{ij}^{(\nu)}=\begin{cases} a_{ij}^{(\nu)} & \text{при } j=1,2,\ldots,k+1;\ i=1,2,\ldots,\alpha_n-1,\\ b_{ij}^{(\nu)} & \text{при } j=k+2,\ldots,m_\nu;\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ \alpha_n-1.\end{cases}$$

Из $(k+1)$-го столбца таблицы $T_\omega^{(k+1)}(\lambda_\nu)$ вычитаем k-ый, тогда элементы $(k+1)$-го столбца преобразованной таблицы $T_\omega^{(k)}(\lambda_\nu)$ будут иметь следующий вид:

$$M_{ik+1}^{(\nu)}-M_{ik}^{(\nu)}=b_{ik+1}^{(\nu)}-a_{ik}^{(\nu)}=\binom{i}{k}\lambda_\nu^{i-k}-\binom{i-1}{k}\lambda_\nu^{i-k-1}\cdot\lambda_\omega-\binom{i-1}{k-1}\lambda_\nu^{i-k}.$$

Следовательно,

$$M_{ik+1}^{(\nu)}-M_{ik}^{(\nu)}=\binom{i-1}{k}\lambda_\nu^{i-k-1}(\lambda_\nu-\lambda_\omega).$$

Вынося общий множитель $(\lambda_\nu-\lambda_\omega)$ из $(k+1)$-го столбца, получим

$$T_\omega(\lambda_\nu)=(\lambda_\nu-\lambda_\omega)^{k+1} T_\omega^{(k+1)}(\lambda_\nu),$$

что и требовалось доказать.

Таким образом мы показали, что

$$T_\omega(\lambda_\nu)=(\lambda_\nu-\lambda_\omega)^{m_\nu}\tilde{T}(\lambda_\nu).\tag{4}$$

А теперь покажем справедливость формулы (2). Действительно, если все λ_ν $(\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ – простые, т. е. все $m_\nu=1$ $(\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, то получим определитель Вандермонда

$$D_n=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(\lambda_i-\lambda_j)$$

и, следовательно, в этом случае формула (2) верна.

Предположим, что $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ имеют кратности соответственно $m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_n$ и справедливо равенство

$$\Delta_{\alpha_n}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(\lambda_i-\lambda_j)^{m_i m_j}.$$

Пусть теперь некоторое λ_ω, $1\leqslant\omega\leqslant n$ имеет кратность $m_\omega+1$. Тогда каждая таблица $T(\lambda_\nu)$ заменится некоторой таблицей $T^*(\lambda_\nu)$, а определитель Δ_{α_n} заменится определителем Δ_{α_n+1}. Докажем, что

$$\Delta_{\alpha_n+1}=\Delta_{\alpha_n}\cdot\prod_{\nu=1}^{\omega-1}(\lambda_\omega-\lambda_\nu)^{m_\nu}\cdot\prod_{\nu=\omega+1}^{n}(\lambda_\nu-\lambda_\omega)^{m_\nu}.\tag{5}$$

Преобразуем определитель Δ_{α_n+1} следующим образом: из (α_n+1)-й строки вычитаем α_n-ю, умноженную на λ_ω, затем из α_n-й строки вычитаем (α_n-1)-ю, также умноженную на λ_ω, и т. д., наконец из второй строки вычитаем первую умноженную на λ_ω.

Разложим теперь определитель Δ_{α_n+1} по первому столбцу таблицы $T^*(\lambda_\nu)$, т. е. по $j=\left(1+\sum\limits_{\nu=1}^{\omega-1} m_\nu\right)$-му столбцу определителя Δ_{α_n+1}. Тогда из (3) и (4) следует, что

$$\Delta_{\alpha_n+1}=(-1)^{\sum\limits_{\nu=1}^{\omega-1} m_\nu}\prod_{\nu=1}^{\omega-1}(\lambda_\nu-\lambda_\omega)^{m_\nu}\cdot\prod_{\nu=\omega+1}^{n}(\lambda_\nu-\lambda_\omega)^{m_\nu}\cdot\Delta_{\alpha_n}$$

или

$$\Delta_{\alpha_n+1}=\Delta_{\alpha_n}\cdot\prod_{\nu=1}^{\omega-1}(\lambda_\omega-\lambda_\nu)^{m_\nu}\cdot\prod_{\nu=\omega+1}^{n}(\lambda_\nu-\lambda_\omega)^{m_\nu},$$

но это и есть равенство (5). Тем самым, в силу принципа индукции, доказано равенство (2).

§ 2. Сформулируем некоторые результаты, полученные А. Ф. Леонтьевым в статьях [1, 2].

Предположим, что $L(\lambda)$ – целая функция экспоненциального типа с индикатрисой $h(\Theta)$, причем функция $L(\lambda)$ удовлетворяет условию (A): имеется система окружностей $|\lambda|=\rho_k$, $\rho_k\uparrow\infty$ такая, что

$$\ln|L(re^{i\Theta})|>[h|\Theta|-\varepsilon]r,\quad r=\rho_k,\quad k>k(\varepsilon),\qquad \varepsilon>0 \text{ – любое.}$$

Пусть $\bar D$ – сопряженная диаграмма функции $L(\lambda)$, причем множество внутренних точек D множества $\bar D$ непустое и начало координат принадлежит D.

Далее пусть $f(z)$ – произвольная функция, голоморфная на C и внутри C, где C – выпуклый замкнутый контур, внутри которого лежит $\bar D$. Положим

$$\omega_f(\mu)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\left[\int\limits_0^\xi f(\xi-\eta)\,e^{\mu\eta}\,d\eta\right]\gamma(\xi)\,d\xi,$$

где $\gamma(\xi)$ – функция, ассоциированная по Борелю с функцией $L(\lambda)$, а $\eta\in[0,\xi]$, и поэтому точка $\xi-\eta$ не выходит за пределы C.

Пусть $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n,\ldots$ – различные нули функции $L(\lambda)$, ($|\lambda_{k-1}|\leqslant\leqslant|\lambda_k|$, $k\geqslant 2$) и $m_1, m_2,\ldots,m_n,\ldots$ соответственно их кратности. Функции $f(z)$ ставится в соответствие ряд квазиполиномов

$$f(z)\sim\sum P_\nu(z)\,e^{\lambda_\nu z},$$

где

$$P_\nu(z)\,e^{\lambda_\nu z}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\nu}\frac{\omega_f(\mu)\,e^{\mu z}}{L(\mu)}\,d\mu. \tag{6}$$

C_ν – замкнутый контур, внутри которого содержится единственный нуль λ_ν функции $L(\lambda)$. Очевидно, что $P_\nu(z)$ – полином степени меньшей чем m_ν.

Доказываются следующие две теоремы:

Теорема 1. *В области D имеет место представление*

$$f(z)=\sum_{k=1}^\infty f_k(z),\quad f_1(z)=\sum_{|\lambda_\nu|<\rho_1}P_\nu(z)\,e^{\lambda_\nu z},\quad f_k(z)=\sum_{\rho_{k-1}<|\lambda_\nu|<\rho_k}P_\nu(z)\,e^{\lambda_\nu z}\quad(k\geqslant 2),$$

причем ряд сходится абсолютно и внутри D равномерно.

Теорема 2. *Пусть функция $L(\lambda)$ кроме условий (A) дополнительно удовлетворяет следующим условиям:*

1) *все нули функции $L(\lambda)$ простые, число нулей $L(\lambda)$ в кольце $\rho_{k-1} < |\lambda| < \rho_k$ не превосходит некоторого фиксированного числа p, одного и того же для всех $k \geqslant 2$;*

2) *существует постоянная $q > 1$ такая, что $\frac{\rho_k}{\rho_{k-1}} < q$ $(k \geqslant 2)$;*

3) *для любых различных λ_m и λ_n из кольца $\rho_{k-1} < |\lambda| < \rho_k$*

$$|\lambda_m - \lambda_n| > e^{-\varepsilon\rho_k}, \quad \varepsilon > 0, \quad k > k(\varepsilon).$$

Тогда в области D имеет место представление

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}, \quad a_k = \frac{\omega_f(\lambda_k)}{L'(\lambda_k)},$$

причем ряд сходится абсолютно и внутри D равномерно.

При доказательстве первой теоремы А. Ф. Леонтьев использовал следующее неравенство:

$$|f_k(z)| < Ae^{-\delta\rho_{k-1}} \cdot \max_{t \in C} |f(t)|, \quad \delta(F, f) > 0, \quad z \in F \subset D$$

(F — замкнутое множество), A — некоторая постоянная, зависящая от длины контура C. Далее из доказательства первой теоремы также следует, что при тех же обозначениях и в той же области

$$|f_k^{(n)}(z)| < A\rho_k^n e^{-\delta\rho_{k-1}} \cdot \max_{t \in C} |f(t)|. \tag{7}$$

Используя метод доказательства А. Ф. Леонтьева и результаты § 1 этой статьи, докажем следующую более общую теорему, которая содержит достаточные условия, при которых функция $f(z)$ в области D будет представляться рядом квазиполиномов.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и пусть $\psi(k) \geqslant 1$ — число различных нулей функции $L(\lambda)$ в кольце*

$$\rho_{k-1} = \varphi(k-1) < |\lambda| < \varphi(k) = \rho_k \qquad (k \geqslant 2).$$

Пусть кроме того:

1) *либо величина $\psi(k)$ равномерно ограничена, либо ряд*

$$\sum_{k=2}^{\infty} \psi(k) e^{-\gamma\varphi(k-1)}$$

сходится при любом $\gamma > 0$;

2) $\sigma_k \frac{\ln \varphi(k)}{\varphi(k-1)} < \varepsilon$, $k > k(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$; *здесь $\sigma_k = \Sigma m_i \cdot m_j$, где суммирование производится по всем i и j, для которых*

$$r \leqslant j < i \leqslant s; \quad r = \sum_{m=1}^{k-1} \psi(m) + 1; \quad s = \sum_{m=1}^{k} \psi(m)$$

(если $\psi(k) = 1$, то полагаем $\sigma_k = m_k$);

3) *для любых λ_n и λ_p $(n \neq p)$ из кольца $\varphi(k-1) < |\lambda| < \varphi(k)$*

$$|\lambda_n - \lambda_p|^{m_n \cdot m_p} > \exp\left\{-\frac{\varepsilon\varphi(k-1)}{[\psi(k)]^2}\right\}, \quad \varepsilon > 0 \quad k > k(\varepsilon).$$

Тогда в области D имеет место представление

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} P_k(z)\,e^{\lambda_k z}, \tag{8}$$

где полиномы $P_k(z)$ определены с помощью (6), *причем ряд сходится абсолютно и внутри D равномерно.*

Доказательство. Пусть в кольце $\varphi(k-1)<|\lambda|<\varphi(k)$ расположены нули $\lambda_r, \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_s$ функции $L(\lambda)$ с кратностями соответственно равными $m_r, m_{r+1}, \ldots, m_s$ и пусть

$$f_k(z)=\sum_{\nu=r}^{s} P_\nu(z)\,e^{\lambda_\nu z}.$$

Составим следующую систему

$$\left\{\begin{array}{l} \sum\limits_{\nu=r}^{s} P_\nu(z)\,e^{\lambda_\nu z}=f_k(z), \\ \sum\limits_{\nu=r}^{s} [\lambda_\nu P_\nu(z)+P'_\nu(z)]\,e^{\lambda_\nu z}=f'_k(z), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum\limits_{\nu=r}^{s} \left[\lambda_\nu^{\alpha_k-1}P_\nu(z)+\binom{\alpha_k-1}{1}\lambda_\nu^{\alpha_k-2}P'_\nu(z)+\ldots+\right. \\ \left.+\binom{\alpha_k-1}{m_\nu-1}\lambda_\nu^{\alpha_k-m_\nu}P_\nu^{(m_\nu-1)}(z)\right]e^{\lambda_\nu z}=f_k^{(\alpha_k-1)}(z). \end{array}\right. \tag{9}$$

Здесь $\alpha_k=\sum\limits_{\nu=r}^{s} m_\nu$. Из этой системы получим

$$P_\nu(z)\,e^{\lambda_\nu z}=\frac{\Delta_\nu}{\Delta_{\alpha_k}},$$

где Δ_{α_k} — определитель порядка α_k, составленный из таблиц вида $T(\lambda_\nu)$ ($\nu=r, r+1, \ldots, s$), о которых шла речь в предыдущем параграфе, а Δ_ν — определитель, который получается из Δ_{α_k} заменой в таблице $T(\lambda_\nu)$ элементов первого столбца правыми частями системы (9). Из формулы (2) и из условия 3) следует, что

$$|\Delta_{\alpha_k}|>e^{-\varepsilon_1\varphi(k-1)}, \quad \varepsilon_1>0, \quad k>k(\varepsilon_1),$$

так как число множителей в правой части (2) равно $\frac{\psi(k)\,[\psi(k)-1]}{2}$. С другой стороны, из (7) и формулы (2) § 1 следует, что при $z\in F\subset D$

$$|\Delta_\nu|<A\,[\varphi(k)]^{\alpha_k-1}\,[\varphi(k)]^{\sigma_k}\cdot e^{-\delta\varphi(k-1)}\cdot 2^{\sigma_k}\cdot\max_{t\in C}|f(t)|.$$

Следовательно, учитывая, что в соответствии с условием 2)

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sigma_k}{\varphi(k-1)}=0,$$

получим

$$|P_\nu(z)e^{\lambda_\nu z}| < A\,[\varphi(k)]^{\alpha_k - 1 + \sigma_k}\cdot e^{-\delta\varphi(k-1)}\cdot e^{\varepsilon_1\varphi(k-1)}\cdot z^{\sigma_k}\cdot \max_{t\in C}|f(t)| <$$

$$< \exp\left\{-\varphi(k-1)\left[\delta-(\alpha_k-1+\sigma_k)\frac{\ln\varphi(k)}{\varphi(k-1)}-\varepsilon_1\right\}\right.,$$

где $\delta_1>0$ и k достаточно велико. Из определения α_k и σ_k видно, что $\alpha_k\leqslant\sigma_k$, поэтому из условия 2) следует, что при достаточно большом k

$$|P_\nu(z)e^{\lambda_\nu z}| < e^{-\delta^*\varphi(k-1)}, \qquad (\delta^*>0). \tag{10}$$

Отсюда следует, что если величина $\psi(k)$ ограничена, то ряд (8) сходится (абсолютно в D и равномерно внутри D) в силу теоремы 1 так как в этом случае $f_k(z)$ – сумма равномерно ограниченного числа слагаемых, стремящихся к нулю при $k\to\infty$ в силу (10).

В случае же неограниченности $\psi(k)$ из условия 1) следует, что величина

$$\sum_{\nu=r}^{s}|P_\nu(z)e^{\lambda_\nu z}|$$

мажорируется общим членом сходящегося числового ряда. Теорема доказана.

Заметим, что в случае неограниченности $\psi(k)$ условие 1) наверняка выполнено, если

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\varphi(k)}{\ln k}=\infty \quad \text{и} \quad \ln\psi(k)=0\,[\varphi(k)].$$

Нетрудно видеть, что теорема 2 является частным случаем теоремы 3 (в этом случае величины $\psi(k)$ и σ_k ограничены).

А. Ф. Леонтьевым [3] доказана недавно теорема о представимости целой функции в виде предела последовательности квазиполиномов.

Используя определитель Δ_{α_n} можно, основываясь на результатах А. Ф. Леонтьева, и для этого случая получить условия представимости функции сходящимся рядом квазиполиномов.

Поступило в редакцию
27.IV.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ф. Леонтьев, Мат. сб., т. 70 (112), № 1, 1966.
2. А. Ф. Леонтьев, ДАН СССР, т. 164, № 1, 1965.
3. А. Ф. Леонтьев, ДАН СССР, т. 165, № 4, 1965.

ANALIZINĖS FUNKCIJOS SKLEIDIMO KVAZIPOLINOMŲ EILUTE PAKANKAMOS SĄLYGOS

J. MECHTIJEVAS

(Reziumė)

Darbe įrodoma teorema, kuri nustato pakankamas sąlygas, kad srityje D analizinė funkcija galėtų būti išskleista eilute

$$\sum_{n=1}^{\infty}P_n(z)\,e^{\lambda_n z}.$$

Šioje eilutėje $\{\lambda_n\}$ yra sveikos eksponencialinio tipo funkcijos nulių seka ir $P_n(z)$ yra polinomas, kurio laipsnis ne didesnis už m_n-1, o m_n yra nulio λ_n kartotinumas.

CONDITIONS SUFFISANTES POUR LA REPRESENTATION D'UNE FONCTION ANALYTIQUE PAR UNE SERIE DES QUASI-POLYNOMES

I. MECHTIJEV

(Résumé)

On démontre un théorème qui indique des conditions suffisantes pour la répresentation d'une fonction analytique dans un domaine D par une série

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n(z)\, e^{\lambda_n z}$$

où $\{\lambda_n\}$ est la suite des zéros d'une fonction entière $L(z)$ du type exponentiel et $P_n(z)$ est un polynôme dont le degré ne dépasse pas m_n-1, où m_n est l'ordre de λ_n.