VI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 4
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1966

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. А. МИРОЛЮБОВ

В работе [1] изучались аналитические решения дифференциально-разностного уравнения

$$\sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{m} (a_{pq}\, x + b_{pq})\, f^{(p)}(x + h_q) = F(x), \tag{1}$$

где a_{pq} и b_{pq} – постоянные коэффициенты, причем $a_{nm}\, a_{n0} \neq 0$, $0 = h_0 < h_1 < \cdots < h_m$, а $F(x)$ – функция, регулярная в некоторой односвязной области. Было показано, что каждое решение уравнения (1) можно представить в виде суммы определенного частного решения данного уравнения и решения $f(x)$ соответствующего однородного уравнения, аналитического в некоторой вертикальной полосе $q_2 < \operatorname{Im} x < q_1$. Установлено, что $f(x)$ есть сумма двух решений $f_1(x)$ и $f_2(x)$ однородного уравнения, регулярных соответственно в полуплоскостях $\operatorname{Im} x < q_1$ и $\operatorname{Im} x > q_2$, исключая два горизонтальных луча. Найдено, что функции $f_j(x)$ $(j = 1,\ 2)$ вдоль всякого направления, непараллельного действительной оси, растут не быстрее функции экспоненциального типа. Последнее обстоятельство позволило представить решения $f_j(x)$ $(j = 1,\ 2)$ в виде предела последовательности линейных агрегатов, составленных из элементарных решений однородного уравнения.

Метод статьи [1], базирующийся на систематическом использовании интегрального преобразования Лапласа, был затем применен (см. [2]) для исследования аналитических решений дифференциального уравнения бесконечного порядка

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x + b_n)\, f^{(n)}(x) = F(x). \tag{1*}$$

При этом предполагалось выполнение следующих условий.

1) Функции

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \quad \text{и} \quad B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$$

допускают представление

$$A(t) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^2}{\lambda_n^2}\right), \qquad B(t) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^2}{\mu_n^2}\right).$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\lambda_n} = \tau_1 < \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\mu_n} = \tau_2$, причем $\tau_1 > \tau_2$.

3) Существует последовательность дуг $\{C_n\}$ окружностей $|t|=R_n$, $R_n \uparrow \infty$, $|\arg t|<\eta$, на которых отношение $\left|\frac{B(t)}{A(t)}\right|$ ограничено сверху некоторой постоянной.

Необходимо отметить, что в статье [2] рассматривались лишь те решения соответствующего однородного уравнения, которые регулярны в некотором круге $|x-x_0|<R$, $R>\pi\tau_1$. Полученные при этом результаты по своему характеру сходны с приведенными выше результатами для уравнения (1).

Применяемый метод затем был отчасти упрощен М. А. Солдатовым в статьях [3] и [4]. Это обстоятельство позволило ему при исследовании уравнения (1) снять ограничение $a_{nm}\neq 0$, $a_{n0}\neq 0$.

В данной работе метод, изложенный в статье [1], получает дальнейшее развитие и применяется для построения и изучения основных свойств аналитических решений интегрального уравнения

$$N[f]\equiv M_1(f)+xM_2(f)=F(x), \tag{2}$$

где

$$M_k(f)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_k} f(x+t)\,\gamma_k(t)\,dt, \qquad k=1,\ 2, \tag{3}$$

а замкнутый контур C_k содержит внутри себя все особенности функции $\gamma_k(t)$.

В дальнейшем потребуем выполнения следующих условий.

А) Все нули функций

$$L_k(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_k} e^{tz}\,\gamma_k(z)\,dz, \qquad k=1,\ 2 \tag{4}$$

расположены в некоторой горизонтальной полосе, содержащей действительную ось.

Б) Для $\Theta\neq 0,\ \pi$ существует предел

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{\rho}\ln|L_k(\rho e^{i\Theta})|=a_k|\sin\Theta|, \qquad k=1,\ 2.$$

В) $a_1=p<a_2=q$.

Очевидно, при сделанных ограничениях уравнение (2) является более общим, чем уравнения (1) и (1*). Заметим также, что здесь изучаются решения из более широкого класса аналитических функций, чем, например, в статье [2].

Вопросы, рассматриваемые в настоящей работе, непосредственно связаны с известными исследованиями А. Ф. Леонтьева (см. главу III из монографии [5]) и опираются на них. Так мы используем некоторые основные свойства и формулу обращения оператора

$$M(\varphi)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\gamma(t-z)\,\varphi(t)\,dt, \tag{I}$$

где $\gamma(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с целой функцией $L(z)$, индикатрисса которой равна $h(\Theta)=\sigma|\sin\Theta|$, а C — замкнутый контур, содержащий внутри себя вертикальный отрезок длины 2σ с центром в точке z. В работе [5] указаны также методы нахождения аналитических решений уравнений $M(\varphi)=0$ и $M(\varphi)=f(z)$. Позднее, в статье [6] А. Ф. Леонтьевым был дан способ построения решения неоднородного уравнения

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\gamma_1(z+t)\,F(t)\,dt=f(z),$$

где $\gamma_1(u)$ — функция, регулярная вне некоторого выпуклого замкнутого множества G, а контур Γ охватывает G.

§ 1. Операторы

Установим сначала два важных свойства операторов $M_k(f)$, $k=1$, 2, опираясь при этом на соответствующие результаты из [5].

Пусть x_0 — точка, в которой функция $\varphi(x)$ регулярна. Будем считать, что точка x принадлежит области $G(x_0)$ тогда и только тогда, когда ее можно соединить с x_0 ломаной линией l со свойствами: функция $\varphi(x)$ аналитически продолжается вдоль l из точки x_0 до точки x. Если функцию $\varphi(x)$, аналитически продолженную из x_0 вдоль l до произвольной ее точки ζ, затем продолжить из ζ вверх и вниз по вертикали, то при этом на замкнутом отрезке вертикали с центром в точке ζ и длины 2σ у $\varphi(x)$ не должно быть особых точек.

Свойство 1 оператора (I) гласит (см. [5]): если целая функция $L(z)$ первого порядка конечного типа имеет индикатриссу роста $h(\Theta)=\sigma|\sin\Theta|$, то тогда оператор $M(\varphi)$, порожденный функцией $L(z)$, представляет собой функцию, регулярную в области $G(x_0)$.

Обозначим через $M_k^-(f)$ оператор вида (3), порожденный функцией $L_k(-t)$.

Поскольку, в силу условия Б), функции $L_k(t)$ и $L_k(-t)$ удовлетворяют требованиям, приведенным в формулировке свойства 1, то операторы $M_k(f)$ и $M_k^-(f)$, $k=1$, 2 обладают указанным свойством.

Свойство 5 оператора $M(\varphi)$, установленное в [5], состоит в следующем. Пусть целая функция $L(z)$ первого порядка, конечного типа является четной, в любом угле с вершиной в начале, не содержащем ни положительной, ни отрицательной частей действительной оси, имеет самое большее конечное число нулей и вдоль любого луча, выходящего из начала и образующего с действительной осью угол $\Theta\neq 0,\pi$, удовлетворяет требованию: существует предел

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{\rho}\ln|L(\rho e^{i\Theta})|=\sigma|\sin\Theta|.$$

Пусть, далее, (a, b) — вертикальный отрезок, длины большей 2σ, с центром в точке x_0. Если функция $\varphi(x)$ регулярна на интервале (a, b), а точка a для нее является особой, то точка α этого интервала, отстоящая от точки a на расстоянии σ, будет особой для $M(\varphi)$, определенной в области $G(x_0)$.

Отметим, что все требования свойства 5 (кроме четности) обеспечиваются условиями А) и Б). Поскольку, однако, в общем случае функция $L_k(t)$ не будет четной, то мы перейдем от оператора $M_k(f)$ к другому, порождающая функция которого обладала бы уже всеми необходимыми свойствами. Этот оператор имеет вид

$$\tilde{M}_k(f) = M_k^- [M_k(f)].$$

Действительно, функция $\tilde{L}_k(t) = L_k(-t)\, L_k(t)$, отвечающая оператору $\tilde{M}_k(f)$, будет четной, все ее нули расположены в горизонтальной полосе, содержащей действительную ось. Кроме того, существует предел

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{\rho} \ln |\tilde{L}_k(\rho e^{i\Theta})| = 2a_k |\sin\Theta|, \qquad \Theta \neq 0,\ \pi; \quad k = 1,\ 2.$$

Следовательно, оператор $\tilde{M}_k(f)$ обладает свойством 5 (нужно только считать $\sigma = 2a_k$).

Пусть функция $f_1(x)$ регулярна на некотором вертикальном луче $(a,\ \mathrm{Re}\, a - i\infty)$, а точка $x = a$ — особая для $f_1(x)$. Покажем, что точка $x = a - ia_k$ непременно особая для $M_k(f_1)$. По свойству 5 точка $x = a - i2a_k$ будет особой для оператора $\tilde{M}_k(f_1)$. Допустим теперь противное: не точка $x = a - ia_k$, а $x = a - ia_k^*$, $a_k^* < a_k$ является особой для $M_k(f_1)$. Тогда, в силу свойства 1, оператор $M_k^-\left(M_k(f_1)\right)$ будет регулярен на луче $\left(a - i(a_k^* + a_k),\ \mathrm{Re}\, a - i\infty\right)$. Однако, на последнем луче у $\tilde{M}_k(f_1)$ имеется особая точка $x = a - i2a_k$. Полученное противоречие и говорит о том, что точка $x = a - ia_k$, действительно, особая для оператора $M_k(f_1)$.

Если функция $f_2(x)$ регулярна на вертикальном отрезке $(c,\ \mathrm{Re}\, c + i\infty)$ и точка $x = c$ — особая для $f_2(x)$, то указанным путем можно установить, что точка $x = c + ia_k$ является особой для $M_k(f_2)$.

Пусть теперь функция $f(x)$ регулярна на вертикальном отрезке $(c,\ a)$, $\mathrm{Im}(a - c) > 2a_k$. Тогда с помощью интегральной формулы Коши вопрос об особых точках оператора $M_k(f)$ можно свести к выяснению расположения особенностей у $M_k(f_1)$ и $M_k(f_2)$. А последнее уже сделано.

Таким образом, установлена справедливость следующего утверждения.

Пусть функция $f(x)$ регулярна на отрезке $(c,\ a)$, причем $\mathrm{Im}(a - c) > 2a_k$. Если точка $x = c$ (или $x = a$) будет особой для $f(x)$, то точка $x = c + ia_k$ (или $x = a - ia_k$) является особой для оператора $M_k(f)$, $k = 1,\ 2$. В дальнейшем последнее предложение будем называть свойством 5*.

Рассмотрим затем вопрос об аналитическом продолжении решения неоднородного уравнения (2). С этой целью докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть функция $\Phi(x)$ имеет единственную особую точку на конечном расстоянии $x = \alpha$, а функция $f(x)$ регулярна в полуплоскости $\mathrm{Im}\, x > d \geqslant -q$ и для $\mathrm{Im}\, x > d_1$, $d_1 > d$ удовлетворяет уравнению $N[f] = \Phi(x)$. Тогда $f(x)$ можно аналитически продолжить на свою плоскость с двумя вертикальными разрезами $[\alpha - iq,\ \mathrm{Re}\, \alpha - i\infty)$ и $[-iq,\ -i\infty)$.*

Доказательство. Возьмем прямую $\mathrm{Re}\, x = k$, $k \neq \mathrm{Re}\, \alpha$ и допустим, что на ней у $f(x)$ есть особая точка $x = \delta$, $\mathrm{Im}\, \delta \leqslant d$. Тогда, на основании свойства 5*, точки $x = \delta + ip$ и $x = \delta + iq$ будут особыми для $M_1(f)$ и $M_2(f)$ соответственно. Однако, $M_1(f)$ и $\Phi(x)$ регулярны при $x = \delta + iq$. В таком случае из соотношения $xM_2(f) = \Phi(x) - M_1(f)$ вытекает регулярность произведения $xM_2(f)$, а если $\delta \neq -iq$, то и оператора $M_2(f)$, в названной точке.

Опираясь на свойство 5*, отсюда заключаем, что $x=\delta\neq -iq$ не может быть особой точкой для $f(x)$. Следовательно, на прямых $\operatorname{Re} x=k$, $k\neq\operatorname{Re}\alpha$ и $k\neq 0$ функция $f(x)$ регулярна. Если же $\delta=-iq$, то $x=0$ может служить полюсом первого порядка для $M_2(f)$ и точка $x=-iq$ в таком случае будет особой для $f(x)$.

Возьмем теперь прямую $\operatorname{Re} x=\operatorname{Re}\alpha$. Легко видеть, что указанным способом функцию $f(x)$ можно аналитически продолжить (сверху вниз) по этой прямой лишь до точки $x=\alpha-iq$. Тем самым лемма установлена.

Замечание. Если $d<-q$, то тогда при выполнении остальных условий леммы, функция $f(x)$ аналитически продолжается на всю плоскость с одним разрезом вдоль луча $[\alpha-iq,\ \operatorname{Re}\alpha-i\infty)$.

Аналогично убеждаемся в справедливости следующей леммы.

Лемма 2. *Пусть $f(x)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Im} x<d\leqslant q$ и для $\operatorname{Im} x<d_1$, $d_1<d$ удовлетворяет уравнению $N[f]=\Phi(x)$. Тогда, при сохранении остальных условий леммы 1, функция $f(x)$ аналитически продолжается на всю плоскость за исключением вертикальных лучей $[iq,\ i\infty)$ и $[\alpha+iq,$ $\operatorname{Re}\alpha+i\infty)$. Если же $d>q$, то у $f(x)$ все особенности могут быть лишь на отрезке $[\alpha+iq,\ \operatorname{Re}\alpha+i\infty)$.*

§ 2. Неоднородное уравнение

Первоначально необходимо построить два решения вспомогательного уравнения

$$N[f]=\frac{1}{z-x}, \tag{5}$$

где z — параметр. Одно из решений будем искать в виде интеграла

$$y_1(x,\ z)=\int\limits_0^{i\infty}\gamma(t,\ z)\,e^{xt}\,dt, \tag{6}$$

взятого по положительной части мнимой оси. После несложных преобразований результат подстановки (6) в уравнение (5) для $\operatorname{Im}(x-z)>0$ можно представить следующим образом

$$\int\limits_0^{i\infty}\left\{\frac{d\gamma(t,\ z)}{dt}\,L_2(t)+\gamma(t,\ z)\,[L_2'(t)-L_1(t)]-e^{-zt}\right\}e^{xt}\,dt=\gamma(t,z)\,L_2(t)\,e^{xt}\Big|_0^{i\infty}, \tag{7}$$

где функции $L_1(t)$ и $L_2(t)$ имеют вид (4). Если положить

$$\gamma(t,\ z)=-\frac{1}{L_2(t)}\exp\int\limits_0^t\frac{L_1(s)}{L_2(s)}\,ds\int\limits_0^t\exp\left[-zu-\int\limits_0^u\frac{L_1(s)}{L_2(s)}\,ds\right]du, \tag{8}$$

то левая часть в (7) будет равна нулю. Чтобы при таком выборе функции $\gamma(t,\ z)$ и правая часть в соотношении (7) равнялась нулю, достаточно показать, что

$$\gamma(t,\ z)\,L_2(t)\,e^{xt}\to 0,\quad |t|\to\infty,\quad \arg t=\frac{\pi}{2}. \tag{9}$$

С этой целью установим лемму.

Лемма 3. *Пусть функция $\gamma(t,\ z)$ определена равенством (8), в котором интегрирование ведется по отрезку $[0,\ t]$ положительной части мнимой* *оси. Если* $0<\arg t=\vartheta<\pi$, $|z|>\delta>0$, *то для* $|t|>r(\varepsilon)$, $\varepsilon>0$ *справедлива оценка*

$$|\gamma(t,\ z)|<C_1(\delta)\ \exp\ [|t|\ (\varepsilon-q+|z|\sin\vartheta)].$$

Здесь $C_1(\delta)$ — *величина, зависящая только от* δ.

Доказательство. Поскольку $p<q$, то в силу условия Б) можно указать число m такое, что для всех $t=i|t|$ имеет место неравенство

$$\left|\exp\left[\pm\int_0^t \frac{L_1(s)}{L_2(s)}\,ds\right]\right|<m.$$

Следовательно,

$$\left|\int_0^t \exp\left[-zu-\int_0^u \frac{L_1(s)}{L_2(s)}\,ds\right]du\right|<m_1\int_0^t\left|e^{-zu}\,du\right|=m_1\frac{-1+\exp(|t|\,|z|\sin\vartheta)}{|z|\sin\vartheta}. \quad (10)$$

Однако для $|t|>r(\varepsilon)$, $\varepsilon>0$ имеем

$$\left|L_2(i|t|)\right|>\exp\ [|t|\,(q-\varepsilon)]. \quad (11)$$

Из полученных выше оценок и следует справедливость леммы.

Замечание. Если $\operatorname{Im} z=h<0$ и $|t|>r(\varepsilon)$, то из (10) и (11) получаем

$$|\gamma(t,\ z)|<-\frac{m_2}{h}\ \exp\ [|t|\,(\varepsilon-q)],\qquad m_2>0. \quad (12)$$

В силу леммы 3 условие (9) будет иметь место для всех x из полуплоскости $\operatorname{Im}(x-z)>0$, если параметр z подчинить требованиям: $0<\arg z<\pi$, $|z|>\delta>0$. Следовательно, $y_1(x,\ z)$ есть решение уравнения (5). С помощью леммы 3 получаем также регулярность и ограниченность интеграла (6) в полуплоскости $\operatorname{Im}(x-z)\geqslant -q+\varepsilon$, $\varepsilon>0$.

Пусть теперь параметр z принадлежит прямой $\operatorname{Im} z=h<0$. Опираясь на замечание к лемме 3, найдем

$$|y_1(x,\ z)|<-\frac{m(\varepsilon)}{h};\quad \operatorname{Im} x>\varepsilon-q,\quad \varepsilon>0.$$

Таким образом установлена

Теорема 1. *Функция* $y_1(x,\ z)$, *определенная интегралом* (6), *есть решение уравнения* (5), *если* $\gamma(t,\ z)$ *имеет вид* (8). *Это решение регулярно и ограничено в полуплоскости* $\operatorname{Im}(x-z)\geqslant\varepsilon>0$. *Сам же интеграл* (6) *регулярен и ограничен для* $\operatorname{Im}(x-z)\geqslant\varepsilon-q$. *Здесь* $0<\arg z<\pi$, $|z|>\delta>0$.

Если $\operatorname{Im} z=h<0$ *и* $\operatorname{Im} x\geqslant\varepsilon-q$, *то функция* $y_1(x,\ z)$ *ограничена по модулю.*

С помощью рассуждений, приведенных при доказательстве леммы 3, можно установить справедливость следующего предложения.

Лемма 4. *Если* $\operatorname{Im} t<0$ *и* $\pi<\vartheta<2\pi$, *то при сохранении остальных условий леммы* 3

$$|\gamma(t,\ z)|<C_2(\delta)\exp[|t|\,(\varepsilon-q-|z|\sin\vartheta)],\qquad |t|>r(\varepsilon).$$

Если же $0<\vartheta<\pi$, *то*

$$|\gamma(t,\ z)|<\frac{m^*}{|z|\sin\vartheta}\ \exp[|t|\,(\varepsilon-q)],\quad m^*>0.$$

Последняя лемма позволяет убедиться в том, что имеет место

Теорема 2. *Пусть* $\gamma(t, z)$ *определена выражением* (8). *Тогда функция*

$$y_2(x, z) = \int\limits_0^{-i\infty} \gamma(t, z) e^{xt}\, dt$$

будет удовлетворять уравнению (5). *Это решение регулярно и ограничено для* $\operatorname{Im}(x-z) \leqslant -\varepsilon < 0$. *Сам же интеграл регулярен и ограничен в полуплоскости*

$$\operatorname{Im}(x-z) \leqslant q - \varepsilon, \quad \text{где} \quad \pi < \arg z < 2\pi, \quad |z| > \delta > 0.$$

Если $\operatorname{Im} z = \nu > 0$ *и* $\operatorname{Im} x \leqslant q - \varepsilon$, *то* $y_2(x, z)$ *регулярна и ограничена по модулю.*

Обратимся теперь к уравнению

$$N[f] = \Phi_1(x), \tag{13}$$

правая часть которого регулярна для $\operatorname{Im} x > d$ и удовлетворяет условию $\Phi_1(x) = O(x^{-2})$. Пользуясь данными о поведении функций $y_1(x, z)$ и $\Phi_1(x)$, можно утверждать, что интеграл

$$T_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty+ic}^{+\infty+ic} y_1(x, z)\, \Phi_1(\bar{z})\, dz, \quad c > d \tag{14}$$

является функцией регулярной и ограниченной в полуплоскости $\operatorname{Im} x \geqslant d + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. На основании теоремы 1 будем иметь

$$N[T_1] = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty+ic}^{+\infty+ic} N[y_1]\, \Phi_1(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty+ic}^{+\infty+ic} \frac{\Phi_1(z)}{z-x}\, dz.$$

Легко показать, однако, что последний интеграл равен $\Phi_1(x)$.

Таким образом, $T_1(x)$ есть решение уравнения (13). С помощью леммы 1 функция $T_1(x)$ при $d \geqslant -q$ аналитически продолжается на всю плоскость, исключая вертикальные лучи $[\alpha - iq, \operatorname{Re}\alpha - i\infty)$, где α – особая точка $\Phi_1(x)$, и, возможно, луча $[-iq, -i\infty)$.

Пусть функция $\Phi_2(x)$ регулярна и такова, что $\Phi_2(x) = O(x^{-2})$ для $\operatorname{Im} x < d$. Как и выше, опираясь на теорему 2, установим, что

$$T_2(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{+\infty+ib}^{-\infty+ib} y_2(x, z)\, \Phi_2(z)\, dz, \qquad b < d \tag{15}$$

является регулярной и ограниченной функцией в полуплоскости $\operatorname{Im} x \leqslant d - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ и что она удовлетворяет уравнению $N[f] = \Phi_2(x)$. На основании леммы 2 $T_2(x)$ при $d \leqslant q$ аналитически продолжается на всю плоскость, за исключением лучей $[\beta + iq, \operatorname{Re}\beta + i\infty)$ (β – особая точка $\Phi_2(x)$) и, возможно, луча $[iq, i\infty)$.

Предположим, что функция $F(x)$ регулярна в некоторой односвязной области D, и построим частное решение уравнения (2). Пусть Γ – замкнутый контур, принадлежащий D. Применяя интегральную формулу Коши, получим

$$F(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x). \tag{16}$$

Здесь, например,

$$\Phi_1(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\Phi(z)}{(z-x)^2}\,dz,$$

$\Phi'(x)=F(x)$, а Γ_1 – „нижняя" половина контура Γ. С помощью соотношений (14) и (15) составим функции $T_1(x)$ и $T_2(x)$, причем $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ возьмем из представления (16). Тогда функция

$$T(x)=T_1(x)+T_2(x)$$

будет, очевидно, решением уравнения (2) для всех x, лежащих внутри линии Γ. Отметим, что область регулярности $T(x)$ представляет внешность двух вертикальных полуполос π_1 и π_2 и двух лучей $[iq,\ i\infty)$ и $[-iq,\ -i\infty)$. Полуполоса π_1, например, строится следующим образом. Линия Γ_1 сдвигается „вниз" на расстояние q. Получаем линию Γ_1^*. Из концов Γ_1^* проводятся лучи l_1 и l_2 параллельно отрицательной части мнимой оси. Область, ограниченная линиями Γ_1^*, l_1, l_2, и есть полуполоса π_1.

§ 3. Представление решения однородного уравнения в виде суммы двух его решений

При рассмотрении однородного уравнения

$$N[f]=0 \tag{17}$$

будем считать функцию $f(x)$ регулярной на некотором вертикальном отрезке длины, большей чем $2q$.

Имеет место

Теорема 3. *Пусть $f(x)$ регулярна на интервале $(c,\ a)$, $\operatorname{Im}(a-c)>2q$ и для $x\in(c+iq,\ a-iq)$ удовлетворяет уравнению* (17). *Тогда $f(x)$ будет регулярна и в некоторой вертикальной полосе $-\infty\leqslant\alpha<\operatorname{Re}x<\beta\leqslant+\infty$ с возможным разрезом по лучу $[iq,\ i\infty)$ или лучу $[-iq,\ -i\infty)$.*

Доказательство. Обозначим через S_1 вертикальный отрезок $(c+ip,\ a-ip)$, а через S_2 – отрезок $(c+iq,\ a-iq)$. По свойству 1 операторы $M_1(f)$ и $M_2(f)$ регулярны на S_1 и S_2 соответственно. Поскольку для $x\in S_2$ имеет место тождество

$$M_1(f)\equiv -xM_2(f),$$

левая часть которого регулярна на S_1, то на последнем отрезке будет регулярно и произведение $xM_2(f)$. В том случае, когда S_1 не содержит начала, оператор $M_2(f)$ тоже регулярен на S_1. Опираясь на свойство 5*, отсюда заключаем, что $f(x)$ не имеет особых точек на интервале $(c-ih,\ a+ih)$, где $h=q-p>0$. Указанным путем возможно, очевидно, функцию $f(x)$ аналитически продолжить вдоль всей прямой $\operatorname{Re}x=\operatorname{Re}a\neq 0$. Поскольку $f(x)$ регулярна на отрезке длины большей $2q$, то можно указать прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям, и высотой, большей чем $2q$, внутри которого $f(x)$ не имеет особенностей. Рассуждения, приведенные выше для отрезка $(c,\ a)$, имеют силу для любого вертикального отрезка длины, большей $2q$, и принадлежащего указанному прямоугольнику. В итоге получим регулярность $f(z)$ в некоторой полосе $\alpha<\operatorname{Re}x<\beta$, причем на каждой из прямых $\operatorname{Re}x=\alpha$ и $\operatorname{Re}x=\beta$ непременно будет хотя бы одна особая точка $f(x)$. Рассмотрим теперь тот случай, когда отрезку S_1 принадлежит начало координат. Тогда при $x=0$ $M_2(f)$ может иметь полюс первого порядка и, следовательно, точка $x=iq$ (или $x=-iq$) будет особой для функции $f(x)$. В таком случае, $f(x)$ аналитически продолжается в полосу $\alpha < \operatorname{Re} x < \beta$ с одним из разрезов вида $[iq,\ i\infty)$ или $[-iq,\ -i\infty)$. Теорема доказана.

Следствие 1. Если $(c,\ a) \supset [-iq,\ iq]$, то функция $f(x)$ будет регулярна в полосе $\alpha < \operatorname{Re} x < \beta$ без разреза, так как точка $x=0$ не может быть особой для $M_2(f)$. В частности, если $f(x)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Im} x \geqslant -q$ (или полуплоскости $\operatorname{Im} x \leqslant q$), то $f(x)$ — целая функция.

Следствие 2. Если граничная прямая $\operatorname{Re} x = \alpha$ (или $\operatorname{Re} x = \beta$) не совпадает с мнимой осью, то в любом ее замкнутом отрезке длины $2q$ функция $f(x)$ имеет по меньшей мере одну особую точку.

В самом деле — допустим противное. На прямой $\operatorname{Re} x = \alpha$ есть замкнутый отрезок $[c_1,\ a_1]$ длины $2q$, на котором у $f(x)$ нет особых точек. Тогда точка x_1 — середина $[c_1,\ a_1]$ будет, очевидно, принадлежать пересечению областей регулярности операторов $M_1(f)$ и $M_2(f)$. Следовательно, в окрестности x_1 должно быть $N[f]=0$, и мы можем применить теорему 3. Согласно этой теореме, имеется вертикальная полоса, содержащая прямую $\operatorname{Re} x = \alpha$, внутри которой $f(x)$ регулярна. Но это невозможно, поскольку на указанной прямой есть особая точка. Полученное противоречие и говорит о справедливости следствия.

Следствие 3. Если $f(x)$ регулярна на отрезке мнимой оси $[c,\ a]$, причем $\operatorname{Im}(a-c) > 2q$ и $\operatorname{Im} c > -q$ (или $\operatorname{Im} a < q$), то $f(x)$ регулярна и на луче $(-iq,\ i\infty)$ (или луче $(iq,\ -i\infty)$). Правильность последнего следствия устанавливается как и выше.

В дальнейшем будем предполагать для определенности, что функция $f(x)$ регулярна в полосе $\alpha < \operatorname{Re} x < \beta$ с разрезом $[-iq,\ -i\infty)$, так как рассмотрение других случаев проводится совершенно аналогично.

Теорема 4. *Пусть функция $f(x)$ — решение уравнения* (17) — *регулярна в полосе $\alpha < \operatorname{Re} x < \beta$ с разрезом по лучу $[-iq,\ -i\infty)$. Тогда*

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — решения указанного уравнения, регулярные соответственно в полуплоскостях $\operatorname{Re} x > \alpha$ и $\operatorname{Re} x < \beta$, за исключением луча $[-iq,\ -i\infty)$.

Доказательство. Обозначим через P прямоугольник: $K_1 < \operatorname{Re} x < K_2$, $\lambda_1 < \operatorname{Im} x < \lambda_2$, причем $\alpha < K_1 < K_2 < \beta$, $-q < \lambda_1 < \lambda_2$, $|\lambda_1 - \lambda_2| > 4q$. Пусть Γ_1 — часть границы P, соединяющая точки $i\lambda_2$, K_1 и $i\lambda_1$, а Γ_2 — другая половина границы. Применяя интегральную формулу Коши, получим

$$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x). \tag{18}$$

Здесь, например,

$$\varphi_1(x) = \frac{3!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_1} \frac{f_0(t)}{(t-x)^4}\, dt, \quad f_0'''(x) = f(x).$$

Функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ будут регулярны в P, а также в полуплоскостях $\operatorname{Re} x > 0$ и $\operatorname{Re} x < 0$ соответственно, причем

$$\varphi_1(x) = O(x^{-4}), \quad \varphi_2(x) = O(x^{-4}).$$

Положим

$$\psi_1(x) = N[\varphi_1], \quad \psi_2(x) = N[\varphi_2].$$

Имея в виду свойство I, можно утверждать, что функция $\psi_1(x)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} x > 0$ и в прямоугольнике P^*, ограниченном отрезками прямых $\operatorname{Re} x = K_1$, $\operatorname{Re} x = K_2$, $\operatorname{Im} x = \lambda_1 + q$, $\operatorname{Im} x = \lambda_2 - q$, кроме того $\psi_1(x) = O(x^{-3})$, $|x| \to \infty$. Аналогичное утверждение можно высказать относительно функции $\psi_2(x)$ в P^* и полуплоскости $\operatorname{Re} x < 0$. Внутри прямоугольника P^* имеем

$$\psi_1(x) = -\psi_2(x).$$

Сопоставляя последнее соотношение с определением $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$, видим, что эти функции будут регулярны в области Ω, представляющей собой всю плоскость с двумя разрезами вдоль мнимой оси $[(\lambda_2 - q)i, i\infty)$ и $[(\lambda_1 + q)i, -i\infty)$. Для любого направления, не совпадающего с указанными лучами, имеем $\psi_1(x) = O(x^{-3})$, $\psi_2(x) = O(x^{-3})$.

Введем функцию

$$\chi_1(x) = -\int_x^{\infty} \psi_1(t)\, dt,$$

где интеграл взят по линии, принадлежащей Ω и уходящей в бесконечность в полуплоскости $\operatorname{Re} x > 0$. В области Ω функция $\chi_1(x)$ будет, очевидно, регулярна. Принимая во внимание поведение $\psi_1(x)$, получим при $|x| \to \infty$

$$\chi_1(x) = \begin{cases} O(x^{-2}), & \operatorname{Re} x > 0 \\ C_1 + O(x^{-2}), & \operatorname{Re} x < 0; \quad C_1 = \text{const}. \end{cases} \tag{19}$$

Обозначим через Q прямоугольник с вершинами в точках $-\rho + ih_1$, $-\rho + ih_2$, $\rho + ih_2$, $\rho + ih_1$, где $h_1 > \lambda_1 + q$, $h_2 < \lambda_2 - q$, $h_2 - h_1 > 2q$, $\rho > 0$. Пусть C – граница Q. Когда x находится внутри Q, будем иметь

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\chi_1(t)}{(t-x)^2}\, dt. \tag{20}$$

Последний интеграл можно разбить на сумму четырех интегралов, каждый из которых будет взят по соответствующей стороне прямоугольника Q. На основании (19) интегралы, отвечающие отрезкам $[-\rho + ih_2, -\rho + ih_1]$ и $[\rho + ih_1, \rho + ih_2]$, стремятся к нулю при $\rho \to \infty$. С учетом последнего замечания из (20) получим

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty + ih_1}^{+\infty + ih_1} \frac{\chi_1(t)}{(t-x)^2}\, dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{+\infty + ih_2}^{-\infty + ih_2} \frac{\chi_1(t)}{(t-x)^2}\, dt = \nu_1(x) + \nu_2(x). \tag{21}$$

Имея в виду (19), найдем для функции $\nu_1(x)$ следующее выражение

$$\nu_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty + ih_1}^{ih_1} \frac{C_1}{(t-x)^2}\, dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty + ih_1}^{ih_1} \frac{O(t^{-2})}{(t-x)^2}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{ih_1}^{+\infty + ih_1} \frac{\chi_1(t)}{(t-x)^2}\, dt = -\frac{C_1}{2\pi i (ih_1 - x)} + \nu_{11}(x) + \nu_{12}(x). \tag{22}$$

В интеграле, определяющем функцию $\nu_{11}(x)$, промежуток интегрирования $[-\infty+ih_1,\ ih_1]$ можно заменить лучом, выходящим из точки $t=ih_1$ под некоторым углом ψ к действительной оси и принадлежащим полуплоскости $\operatorname{Re} t<0$. Аналогичную замену можно сделать и в интеграле для функции $\nu_{12}(x)$. Только в этом случае луч должен располагаться в полуплоскости $\operatorname{Re} t>0$. Изменяя угол наклона ψ в допустимых границах, заметим, что $\nu_{11}(x)$ аналитически продолжается на всю плоскость с разрезом по лучу $[ih_1,\ -i\infty)$. В указанную область аналитически продолжается и $\nu_{12}(x)$. Отметим, что функции $\nu_{11}(x)$ и $\nu_{12}(x)$ в полуплоскости $\operatorname{Im} x>h_1$ подчиняются условию

$$\nu_{11}(x)=O(x^{-2}),\quad \nu_{12}(x)=O(x^{-2}).$$

Таким же путем найдем для функции $\nu_2(x)$ представление

$$\nu_2(x)=\frac{c_1}{2\pi i(ih_2-x)}+\nu_{21}(x)+\nu_{22}(x), \tag{23}$$

в котором $\nu_{21}(x)$ и $\nu_{22}(x)$ регулярны вне отрезка $[ih_2,\ i\infty)$ мнимой оси и в полуплоскости $\operatorname{Im} x<h_2$ ведут себя как $O(x^{-2})$. Функция $\nu_{21}(x)$, например, определена следующим образом:

$$\nu_{21}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{+\infty+ih_2}^{ih_2}\frac{O(t^{-2})}{(t-x)^2}\,dt.$$

В последнем интеграле линию интегрирования можно заменить ломаной, состоящей из вертикального луча $[\Delta+i\infty,\ \Delta+ih_2]$ и горизонтального отрезка $[\Delta+ih_2,\ ih_2]$, $\Delta>0$. Пусть $|t-x|\geqslant 0$ тогда, очевидно, интеграл, взятый по каждому из участков ломаной, будет ограничен по модулю. Следовательно, вне вертикальной полуполосы $|\operatorname{Re} x|\leqslant 2\Delta$, $\operatorname{Im} x\geqslant h_2-\Delta$ справедлива оценка

$$|\nu_{21}(x)|<C^*,\quad C^*=\mathrm{const}.$$

Сходным путем устанавливается ограниченность и модуля $\nu_{22}(x)$. В таком случае, вне указанной полуполосы, будем иметь

$$|\mu_2(x)|\equiv\left|\frac{C_1}{2\pi i(ih_2-x)}+\nu_{21}(x)+\nu_{22}(x)\right|<C_0,\quad C_0=\mathrm{const}. \tag{24}$$

Соотношения (21), (22) и (23) позволяют записать функцию $\psi_1(x)$ в виде

$$\psi_1(x)=\frac{C_1}{2\pi i}\left[\frac{1}{ih_2-x}-\frac{1}{ih_1-x}\right]+\eta_1(x)+\eta_2(x), \tag{25}$$

где

$$\eta_k(x)=\nu_{k1}(x)+\nu_{k2}(x),\quad k=1,\ 2.$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$N[f]=\psi_1(x).$$

Пусть $y_1(x,\ z)$ и $y_2(x,\ z)$ — функции, фигурирующие в теоремах 1 и 2. Положим

$$T_3(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty+ih}^{+\infty+ih} y_1(x,\ z)\,\eta_1(z)\,dz;\qquad h>h_1,\quad \operatorname{Im} x>h;$$

$$T_4(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{+\infty+i\lambda}^{-\infty+i\lambda} y_2(x,\ z)\,\eta_2(z)\,dz;\qquad \lambda<h_2,\quad \operatorname{Im} x<\lambda. \tag{26}$$

Поскольку $\eta_1(z)=O(z^{-2})$ для $\operatorname{Im} z>h_1$ и функция $y_1(x, z)$ ограничена в полуплоскости $\operatorname{Im}(x-z)\geqslant\varepsilon>0$, то величина интеграла (26) не зависит от выбора значения h, лишь бы имело место условие $h>h_1$. Последнее обстоятельство позволяет установить регулярность и ограниченность $T_3(x)$ в полуплоскости $\operatorname{Im} x\geqslant h_1+\varepsilon$, $\varepsilon>0$. Аналогичным образом получаем регулярность и ограниченность функции $T_4(x)$ в полуплоскости $\operatorname{Im} x\leqslant h_2-\varepsilon$. Принимая во внимание теорему 1 и поведение функции $\eta_1(z)$, найдем

$$N[T_3]=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty+ih}^{+\infty+ih}\eta_1(z)\,N[y_1]\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty+ih}^{+\infty+ih}\frac{\eta_1(z)}{z-x}\,dz=\eta_1(x). \tag{27}$$

Так как $\eta_1(x)$ регулярна вне промежутка $[ih_1, -i\infty)$, то, опираясь на лемму 1, с помощью соотношения $N[T_3]=\eta_1(x)$, функцию $T_3(x)$ можно аналитически продолжить на всю плоскость с разрезом вдоль луча $[i(h_1-q), -i\infty)$. В свою очередь, функция $T_4(x)$, удовлетворяющая уравнению

$$N[T_4]=\eta_2(x), \tag{28}$$

аналитически продолжается согласно леммы 2, на внешность отрезка $[i(h_2+q), i\infty)$. В силу теорем 1 и 2 функции

$$T_5(x)=-\frac{C_1}{2\pi i}\,y_1(x, ih_1) \quad и \quad T_6(x)=\frac{C_1}{2\pi i}\,y_2(x, ih_2)$$

будут регулярны и ограничены в тех же областях, что и функции $T_3(x)$ и $T_4(x)$ соответственно. Введем функцию

$$\zeta(x)=\sum_{n=3}^{6}T_n(x).$$

На основании теорем 1 и 2, а также соотношений (27) и (28), имеем

$$N[\zeta]=\eta_1(x)+\eta_2(x)+\frac{C_1}{2\pi i}\cdot\left[\frac{1}{ih_2-x}-\frac{1}{ih_1-x}\right].$$

Сравнивая полученный результат с (25), заключаем, что функция $\zeta(x)$ есть решение уравнения $N[f]=\psi_1(x)$. В горизонтальной полосе $h_1+\varepsilon\leqslant\operatorname{Im} x\leqslant h_2-\varepsilon$, $\varepsilon>0$ это решение будет, очевидно, регулярно и ограничено по модулю. Поскольку $N[\varphi_1]=\psi_1(x)$, то функция

$$f_1(x)=\varphi_1(x)-\zeta(x), \tag{29}$$

регулярная внутри прямоугольника P и полуплоскости $\operatorname{Re} x>0$, будет удовлетворять уравнению (17) для $x\in Q$ и $\operatorname{Re} x>0$. С помощью теоремы 3 функция $f_1(x)$ аналитически продолжается на полуплоскость $\operatorname{Re} x>\alpha$ с вертикальным разрезом по лучу $[-iq, -i\infty)$.

Повторяя почти дословно предыдущие рассуждения, убедимся в том, что функция

$$f_2(x)=\varphi_2(x)+\zeta(x)$$

регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} x<\beta$, исключая отрезок $[-iq, -i\infty)$ мнимой оси, и является решением уравнения (17). Поскольку

$$f_1(x)+f_2(x)=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)=f(x),$$

то справедливость теоремы установлена.

Доказанная теорема дает возможность свести изучение решений $f(x)$, регулярных в некоторой вертикальной полосе, к изучению решений вида $f_1(x)$ и $f_2(x)$, регулярных в соответствующих областях. В дальнейшем ограничимся рассмотрением решений типа $f_1(x)$. Результаты для $f_2(x)$ будут аналогичны.

§ 4. Оценка $f_1(x)$

Определим рост функции $f_1(x)$, заданной выражением (29), в области вида $\operatorname{Re} x > r > 0$, $\operatorname{Im} x > h_1 + \varepsilon$. Согласно результатам предыдущего параграфа, функция

$$\zeta_2(x) = T_4(x) + T_6(x)$$

регулярна вне луча $[i(h_2+q), i\infty)$ и ограничена в полуплоскости $\operatorname{Im} x \leqslant h_2 - \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 > 0$. Обозначим через l луч, выходящий из точки x_0 полуплоскости $\operatorname{Im} x < h_2$ и образующий угол Θ, $-\pi \leqslant \Theta \leqslant 0$, с действительной осью. Тогда интеграл

$$\sigma(t) = \int_l \zeta_2(x)\, e^{-xt}\, dx \tag{30}$$

определяет функцию, регулярную в полуплоскости $\cos(\Theta + \arg t) > 0$. При изменении значения Θ в заданных пределах указанная полуплоскость опишет внешность отрицательной части мнимой оси. Поскольку интегралы, взятые по различным лучам, дают аналитическое продолжение $\sigma(t)$, то функция $\sigma(t)$ будет регулярна во всей плоскости с разрезом по лучу $[0, -i\infty)$. Отметим, что вне вертикальной полуполосы $|\operatorname{Re} t| \leqslant \frac{\delta}{2}$, $\operatorname{Im} t < \frac{\delta}{2}$, $\delta > 0$ справедлива оценка

$$|\sigma(t)| < \tilde{c}\, e^{|x_0 t|}, \quad \tilde{c} = \text{const}. \tag{31}$$

Обращение интеграла (30) дает

$$\zeta_2(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \sigma(t)\, e^{xt}\, dt, \tag{32}$$

где S — линия, состоящая из полуокружности $|t| = \delta$, $\operatorname{Im} t \geqslant 0$ и двух лучей $\operatorname{Re} t = \pm\delta$, $\operatorname{Im} t \leqslant 0$. Пусть

$$\mu(t) = \int_R \mu_2(x)\, e^{-xt}\, dx, \tag{33}$$

причем функция $\mu_2(x)$ определена соотношением (24), а R — линия, начинающаяся в точке $x = ih_3$, $h_3 < h_2 - \frac{\delta}{2}$ и уходящая в бесконечность вне полуполосы E: $|\operatorname{Re} x| \leqslant \frac{\delta}{2}$, $\operatorname{Im} x > h_2 - \frac{\delta}{2}$.

Так как $|\mu_2(x)|$ вне E ограничен (см. (24)), то при рассмотрении интегралов вида (33), взятых по подходящим путям R из E, обнаружим регулярность функции $\mu(t)$ на полуторалистной поверхности $-\pi < \arg t < 2\pi$, $|t| \geqslant \delta$. На этой поверхности $\mu(t)$ растет не быстрее целой функции первого порядка конечного типа.

Пользуясь формулой обращения, найдем

$$\mu_2(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \mu(t)\, e^{xt}\, dt, \tag{34}$$

где контур S определен выше. Подставляя интегральные выражения (32) и (34) в равенство $N[\zeta_2]=\mu_2(x)$, получим

$$\int\limits_S B(t)\, e^{xt}\, dt = \sigma(t)\, L_2(t)\, e^{xt}\Big|_S . \qquad (35)$$

Здесь $B(t)=\sigma'(t)\,L_2(t)-[L_1(t)-L_2'(t)]\,\sigma(t)+\mu(t)$, причем функции $L_1(t)$ и $L_2(t)$ определяются соотношениями (4). В силу условия Б) и оценки (31) правая часть в (35) равна нулю. Заметим, что функция $B(t)$ на контуре S и вне его регулярна и растет не быстрее целой функции первого порядка конечного типа. В таком случае, согласно лемме 5 из [1], $B(t)$ есть целая функция конечной степени. Следовательно, разность

$$B(t)-\mu(t)=V(t) \qquad (36)$$

будет регулярна в некоторой полуплоскости $\operatorname{Im} t<d<0$.

Для дальнейшего необходима

Лемма 5. *Если $V(t)$ — правая часть дифференциального уравнения*

$$L_2(t)\,U'(t)-[L_1(t)-L_2'(t)]\,U(t)=V(t) \qquad (37)$$

регулярна в полуплоскости $\operatorname{Im} t<d<0$ и удовлетворяет требованию

$$V(t)=O(e^{a|t|}),$$

то решение $U(t)$ будет регулярно в некоторой полуплоскости $\operatorname{Im} t<d_1<0$ и подчинено условию роста

$$U(t)=O(e^{b|t|}).$$

Здесь a и b — некоторые положительные постоянные.

Доказательство. Возьмем решение данного уравнения в виде

$$U(t)=-\frac{1}{L_2(t)}\exp\int\limits_0^t \frac{L_1(s)}{L_2(s)}\,ds\int\limits_0^t V(\zeta)\exp\left[-\int\limits_0^\zeta \frac{L_1(s)}{L_2(s)}\,ds\right]d\zeta .$$

Линия интегрирования здесь составлена из горизонтального отрезка $[-ik, -ik+\delta]$, $k>0$, $\delta>0$ и луча, выходящего из точки $t=-ik+\delta$ и составляющего угол ψ, $-\pi<\psi<0$, с действительной осью. Очевидно, число $k>-d$ можно взять таким, чтобы на линии интегрирования не было нулей $L_2(t)$. В таком случае, функция $U(t)$ будет регулярна в некоторой полуплоскости $\operatorname{Im} t<d_1<0$. В силу условия Б) для $|s|>r(\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, на луче $\arg s=\psi$ имеем

$$\left|\frac{L_1(s)}{L_2(s)}\right|<\exp\left[|s|(p-q)|\sin\psi|+\varepsilon|s|\right].$$

Отсюда, учитывая поведение функции $V(t)$ и условие В), получим требуемую оценку для $U(t)$.

Поскольку функция $\sigma(t)$ удовлетворяет уравнению (37), в котором правая часть равна (36), то $\sigma(t)=O(e^{b|t|})$ для $\operatorname{Im} t\leqslant d_0<0$. Последнее обстоятельство позволяет в формуле (32) у контура s заменить вертикальные отрезки $\operatorname{Re} t=\pm\delta$, $\operatorname{Im} t\leqslant d_0$ лучами, выходящими из точек $t=\delta+id_0$ и $t=-\delta+id_0$ под углом ψ, $\pi\leqslant\psi\leqslant 2\pi$ к действительной оси. Варьируя значение ψ в допустимых границах, найдем, что функция $\zeta_2(x)$ удовлетворяет условию

$$\zeta_2(x)=O(e^{\tau|x|}),\quad \tau>0$$

вне вертикальной полуполосы, заключенной между лучами $\operatorname{Re} x = \pm(b+\delta)$, $\operatorname{Im} x \geqslant 0$ и дугой окружности $|x| = b+\delta$, $\operatorname{Im} x \leqslant 0$, $\delta > 0$.

В предыдущем параграфе была установлена регулярность и ограниченность функции

$$\zeta_1(x) = T_3(x) + T_5(x)$$

в полуплоскости $\operatorname{Im} x \geqslant h_1 + \varepsilon_1$. Поскольку $\varphi_1(x) = O(x^{-4})$ для $\operatorname{Re} x > 0$, то в итоге получаем необходимый результат: функция

$$f_1(x) = \varphi_1(x) - \zeta_1(x) - \zeta_2(x)$$

в угле $H_1 : \operatorname{Re} x > b+\delta$, $\operatorname{Im} x \geqslant h_1 + \varepsilon_1$ подчиняется ограничению роста

$$f_1(x) = O(e^{\tau|x|}), \quad \tau > 0. \tag{38}$$

§ 5. Выражение $f_1(x)$ через элементарные решения

Пусть l_1 — луч, выходящий из некоторой точки x_0 области H_1 и образующий угол Θ, $0 \leqslant \Theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ с действительной осью. Интеграл

$$\omega_1(t) = \int\limits_{l_1} f_1(x)\, e^{-xt}\, dx \tag{39}$$

в силу (38) определяет функцию, регулярную в полуплоскости

$$\tau + \delta - |t| \cos(\Theta + \psi) \leqslant 0, \quad \psi = \arg t.$$

Обозначим через Γ_1 линию, состоящую из луча $\operatorname{Re} t = \tau + \delta$, $\operatorname{Im} t \geqslant 0$, дуги окружности

$$|t| = \tau + \delta, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \arg t \leqslant 0 \quad \text{и луча} \quad \operatorname{Im} t = -\tau - \delta, \quad \operatorname{Re} t \leqslant 0.$$

Изменяя в (39) угол Θ в заданных пределах, можно установить регулярность функции $\omega_1(t)$ в замкнутой области, ограниченной контуром Γ_1 и не содержащей начала. В этой области справедлива оценка

$$|\omega_1(t)| < K\, e^{k|t|}, \tag{40}$$

где K и k — некоторые постоянные. Применяя к интегралу (39) формулу обращения, получим

$$f_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_1} \omega_1(t)\, e^{xt}\, dt. \tag{41}$$

Найденное для $f_1(x)$ интегральное выражение подставим в уравнение (17). Будем иметь

$$\int\limits_{\Gamma_1} \left\{ \omega_1(t) L_1(t) - [\omega_1(t) L_2(t)]' \right\} e^{xt}\, dt = -\omega_1(t) L_2(t) e^{xt} \Big|_{\Gamma_1}.$$

На основании оценки (40) правая часть последнего соотношения равна нулю для всех x из угла H_1^*: $\operatorname{Re} x > k + \varepsilon^*$, $\operatorname{Im} x > k + q + \varepsilon^*$, $\varepsilon^* > 0$. В таком случае, согласно лемме 5 из [1] выражение

$$A(t) = \omega_1(t) L_1(t) - [\omega_1(t) L_2(t)]' \tag{42}$$

будет целой функцией конечной степени. Следовательно, функция $\omega_1(t)$ в качестве особых точек может иметь лишь нули $L_2(t)$. Поскольку эти нули расположены в горизонтальной полосе, содержащей действительную ось, то существует число $a^* > 0$ такое, что в угле $\operatorname{Im} t \geqslant a^*$, $\operatorname{Re} t \leqslant \tau + \delta$ у функции $L_2(t)$ нет нулей. Последнее обстоятельство позволяет заменить в формуле (41) у контура Γ_1 вертикальный отрезок $\operatorname{Re} t=\tau+\delta$, $\operatorname{Im} t \geqslant a^*$ горизонтальным лучем $\operatorname{Im} t=a^*$, $\operatorname{Re} t \leqslant \tau+\delta$. Указанная замена будет справедлива при условии, что переменное x принадлежит углу H_1^* (с надлежащим образом выбранным числом k).

Обозначим через Λ контур Γ_1, в котором вертикальный луч заменен горизонтальным. Тогда для $x \in H_1^*$ получим

$$f_1(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda} \omega_1(t)\, e^{xt}\, dt. \tag{43}$$

Пусть α_1 и α_2 — два нуля функции $L_2(t)$, определенной соотношением (4). Тогда функцию

$$L_3(t)=[(t-\alpha_1)\,(t-\alpha_2)]^{-1} L_2(t) \tag{44}$$

в силу свойства Б) можно представить (см. [7]) в виде интеграла

$$L_3(t)=\int_{-iq}^{iq} e^{tu}\, d\sigma_1(u).$$

Здесь $\sigma_1(u)$ имеет ограниченную вариацию на $[-iq, iq]$ и не существует меньшего отрезка $[a, b] \subset [-iq, iq]$, по обе стороны от которого $\sigma_1(u)$ была бы постоянной. К $L_3(t)$ можно применить лемму 3 из [8], на основании которой имеется последовательность чисел $r_n>0$, $r_n \uparrow \infty$ и число $m>0$ такие, что

$$\ln|L_3(re^{i\psi})|>(q|\sin\psi|-\varepsilon)\,r; \quad r_n-m \leqslant r \leqslant r_n+m, \quad n>n_0(\varepsilon), \tag{45}$$

где $\varepsilon>0$ — любое.

Поскольку функции $L_2(t)$ и $L_3(t)$ связаны соотношением (44), то оценка вида (45) будет иметь место и для $L_2(t)$. В таком случае можно утверждать, что существует последовательность $\{S_k\}$ дуг окружностей $|t|=r_k$, $r_k \uparrow \infty$, заключенных между лучами $\operatorname{Im} t=a^*$, $\operatorname{Im} t=-(\tau+\delta)$, $\operatorname{Re} t<0$, на которой отношение $\left|\frac{L_1(t)}{L_2(t)}\right|$ ограничено сверху некоторой постоянной.

По этой причине функция $\omega_1(t)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению (42), будет вести себя на последовательности $\{S_k\}$ как целая функция конечной степени. Разобьем теперь контур Λ на сумму двух контуров Λ_{1k} и Λ_{2k}, добавляя дугу S_k и луч $\operatorname{Im} t=a^*$, $\operatorname{Re} t \leqslant -\sqrt{r_k^2-(a^*)^2}$, проходимые дважды, но в противоположных направлениях. Так, например, линия Λ_{2k} состоит из луча $\operatorname{Im} t=a^*$, $\operatorname{Re} t \leqslant -\sqrt{r_k^2-(a^*)^2}$, дуги S_k и луча $\operatorname{Im} t=-(\tau+\delta)$, $\operatorname{Re} t \leqslant -\sqrt{r_k^2-(\tau+\delta)^2}$. Поскольку внутри контура Λ_{1k} находится конечное число n_k нулей функции $L_2(t)$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda_{1k}} \omega_1(t)\, e^{xt}\, dt=\sum_{j=1}^{n_k} \frac{1}{2\pi i}\int_{L_j} \omega_1(t)\, e^{xt}\, dt. \tag{46}$$

Здесь L_j — петлеобразный контур, содержащий внутри себя только один нуль α_j и уходящий в бесконечность по лучу $\operatorname{Im} t=a^*$, $\operatorname{Re} t<0$. При этом предполагается, что нули функции $L_2(t)$, лежащие внутри Λ, занумерованы в порядке возрастания модуля их действительной части.

Принимая во внимание поведение функции $\omega_1(t)$ на последовательности дуг $\{S_k\}$, в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} x > b_0$ получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Lambda_{2k}} \omega_1(t)\, e^{xt}\, dt \to 0, \quad k\to\infty.$$

Сопоставляя последний результат с соотношениями (43) и (46), найдем

$$f_1(x) = \lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{n_k}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_j}\omega_1(t)\, e^{xt}\, dt. \tag{47}$$

Переменное x здесь принадлежит углу $\tilde{H}_1$, являющемуся пересечением области H_1^* и полуплоскости $\operatorname{Re} x > b_0$.

Теперь необходимо выразить $\omega_1(t)$ через функцию $\omega_0(t)$ – решение однородного дифференциального уравнения, соответствующего уравнению (42). Для этого воспользуемся леммой 3 из работы [9].

Пусть m_j – кратность нуля α_j функции $L_2(t)$. Тогда, согласно указанной лемме,

$$\omega_1(t) = \sum_{s=1}^{m_j} c_{js}\,\varphi_{js}(t) + \psi_j(t). \tag{48}$$

Здесь $\varphi_{js}(t)$ не зависят от $A(t)$ (см. (42)), причем для $s=2, \ldots, m_j$ функции $\varphi_{js}(t)$ в окрестности особой точки $t=\alpha_j$ однозначны и удовлетворяют соответственно уравнениям

$$y'(t)\,L_2(t) + [L_2'(t) - L_1(t)]\, y(t) = A_{js}(t),$$

с аналитическими в точке $t=\alpha_j$ правыми частями. Далее, если $\omega_0(t)$ неоднозначна в окрестности $t=\alpha_j$ или имеет в этой точке полюс порядка не меньше m_j, то $\varphi_{j1}(t)=\omega_0(t)$; в противном случае $\varphi_{j1}(t)=\omega_0(t)\ln(t-\alpha_j)+\varphi_j^*(t)$, где $\varphi_j^*(t)$ – однозначна в окрестности $t=\alpha_j$. В представлении (48) функция $\psi_j(t)$ регулярна при $t=\alpha_j$.

Положим

$$u_{js}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_j}\varphi_{js}(t)\, e^{xt}\, dt. \tag{49}$$

Тогда выражение (47) с учетом (48) имеет вид

$$f_1(x) = \lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{n_k}\sum_{s=1}^{m_j} c_{js}\, u_{js}(x). \tag{50}$$

Функции $u_{js}(x)$ удовлетворяют уравнению (17), что проверяется непосредственно.

Как и в работе [9], назовем $u_{js}(x)$ элементарными решениями уравнения (17). Для $s=2, \ldots, m_j$ эти решения будут целыми функциями экспоненциального типа. Если точка $t=\alpha_j$ является для $\omega_0(t)$ полюсом порядка не меньшего m_j, то $u_{j1}(x)$ – тоже целая функция экспоненциального типа. В противном случае $u_{j1}(x)$ будет регулярна во всей плоскости с разрезом по лучу $[-iq, -i\infty)$ и имеет рост не выше целой функции экспоненциального типа.

§ 6. Расширение области сходимости

Как уже отмечалось, представление решения $f_1(x)$ в виде (50) имеет место лишь в угле $\tilde{H}_1$: $\operatorname{Re} x > a = \max(b_0,\ k+\varepsilon^*)$, $\operatorname{Im} x > c = k+q+\varepsilon^*$, $\varepsilon^* > 0$. Однако, область сходимости последовательности (50) можно расширить до полуплоскости $\operatorname{Re} x > a$. Убедимся в этом. Положим

$$w_k(x) = \sum_{j=1}^{n_k} \sum_{s=1}^{m_j} c_{js}\, u_{js}(x)$$

и отметим, что последовательности $\{M_1(w_k)\}$ и $\{M_2(w_k)\}$ сходятся в углах $\operatorname{Re} x > a$, $\operatorname{Im} x > c+p$ и $\operatorname{Re} x > a$, $\operatorname{Im} x > c+q$ соответственно. Операторы $M_1(f)$ и $M_2(f)$ определены соотношениями (3).

В полуплоскости $\operatorname{Re} x > 0$ имеем

$$M_1(w_k) = -xM_2(w_k).$$

Отсюда вытекает сходимость последовательности $\{M_2(w_k)\}$ в угле $\operatorname{Re} x > a$, $\operatorname{Im} x > c+p$.

Пусть ρ — достаточно большое положительное чилсло, а l — граница прямоугольника π с вершинами $(a+\delta)+i(c+\delta)$, $\rho+i(c+\delta)$, $\rho+i\rho$, $(a+\delta)+i\rho$, $\delta > 0$. С помощью интегральной формулы Коши функцию $w_k(x)$ представим в виде

$$w_k(x) = w_{k1}(x) + w_{k2}(x), \tag{51}$$

где, например,

$$w_{k1}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_1} \frac{w_k(t)}{t-x}\, dt,$$

а контур l_1 — часть l, распололоженная в полуплоскости $\operatorname{Im} t \leqslant c^*$, $c+\delta < c^* < \rho$. Заметим, что из (51) следует регулярность функции $w_{k1}(x)$ в вертикальной полосе $a+\delta < \operatorname{Re} x < \rho$.

В любой замкнутой области, принадлежащей полуплоскости $\operatorname{Im} x > c^*$ и прямоугольнику π, последовательность $\{w_{k1}(x)\}$ равномерно сходится. В свою очередь, последовательность $\{w_{k2}(x)\}$ сходится равномерно во всякой замкнутой области из полуплоскости $\operatorname{Im} x < c^*$ и прямоугольника π. Поэтому для получения требуемого результата достаточно установить сходимость последовательности $\{w_{k1}(x)\}$ в полуплоскости $\operatorname{Re} x > a$.

Обозначим через $\tilde{M}_2(f)$ оператор, порожденный функцией $\tilde{L}_2(t) = L_2(-t)\, L_2(t)$. Тогда из (51) получим

$$\tilde{M}_2(w_{k1}) = \tilde{M}_2(w_k) - \tilde{M}_2(w_{k2}). \tag{52}$$

Поскольку последовательность $\{M_2(w_k)\}$ сходится в угле $\operatorname{Re} x > a$, $\operatorname{Im} x > c+p$, то последовательность операторов $\{\tilde{M}_2(w_k)\}$ будет сходиться в области $\operatorname{Re} x > a$, $\operatorname{Im} x > c+p+q$. Заметим также, что в любой замкнутой области из полуполосы $\operatorname{Im} x < \rho - 2q$, $a+\delta < \operatorname{Re} x < \rho$ последовательность $\{\tilde{M}_2(w_{k2})\}$ равномерно сходится. В таком случае из (52) получаем равномерную сходимость последовательности $\{\tilde{M}_2(w_{k1})\}$ внутри прямоугольника π_1 с вершинами в точках $(a+\delta)+i(c+p+q)$, $\rho+i(c+p+q)$, $\rho+i(\rho-2q)$, $(a+\delta)+$ $+i(\rho-2q)$.

Положим

$$V_{k1}(x)=\tilde{M}_2(w_{k1}).$$

Функция $V_{k1}(x)$ регулярна для $\operatorname{Im} x>c^*+2q$ и в полуполосе $a+\delta<\operatorname{Re} x<\rho$, $\operatorname{Im} x>c+\delta+2q$. Кроме того, в указанной области $V_{k1}(x)=O\left(\frac{1}{x}\right)$, $x\to\infty$.

Пользуясь результатами А. Ф. Леонтьева (см. [5]) относительно обращения оператора $\tilde{M}_2(w_{k1})=V_{k1}(x)$, будем иметь

$$w_{k1}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_U V_{k1}(x-t)\,\Phi_2^*(t)\,dt. \tag{53}$$

Переменное x здесь принадлежит полуплоскости $\operatorname{Im} x>c^*+\delta$ и прямоугольнику π. Отметим, что контур U строится следующим путем. На лучах $\arg t=-\frac{\pi}{6}$ и $\arg t=-\frac{5}{6}\pi$ на расстоянии R от начала возьмем точки A и B. На горизонтальном отрезке AB отметим на расстоянии ε справа и слева от мнимой оси точки A_1 и B_1. Пусть, далее, точка C находится на отрицательной части мнимой оси на расстоянии $2q-\delta$ от начала. Тогда U — линия, состоящая из луча $(\infty e^{-\frac{\pi}{6}i}, A]$, отрезков $[A, A_1]$, $[A_1, C]$, $[C, B_1]$, $[B_1, B]$ и луча $(B, \infty e^{-\frac{5}{6}\pi})$.

В представлении (53) функция $\Phi_2^*(t)$ обладает следующими свойствами:

1) регулярна во всей плоскости, кроме луча $[-i2q, -i\infty)$;

2) вне любого угла $-\frac{3}{4}\pi-\varepsilon<\arg t<-\frac{\pi}{4}+\varepsilon$, где $\varepsilon>0$, ведет себя как $O\left(\frac{1}{t}\right)$;

3) в плоскости, за исключением отрицательной части мнимой оси, удовлетворяет условию $\tilde{M}_2(\Phi_2^*)=\frac{1}{t}$.

Принимая во внимание поведение функций $\Phi_2(t)$ и $V_{k1}(t)$, а также равномерную сходимость последовательности $\{V_{k1}(t)\}$ внутри прямоугольника π_1, с помощью представления (53) устанавливаем равномерную сходимость последовательности $\{w_{k1}(x)\}$ внутри прямоугольника с вершинами в точках $(a+\delta)+i(c-h)$, $\rho+i(c-h)$, $\rho+i\rho$, $(a+\delta)+i\rho$. Здесь $h=q-p>0$. Так как число ρ можно взять сколь угодно большим, а положительное число δ — сколь угодно малым, то последовательность $\{w_{k1}(x)\}$ будет сходиться в угле E_1: $\operatorname{Re} x>a$, $\operatorname{Im} x>c-h$. В таком случае из (51) вытекает сходимость исходной последовательности $\{w_k(x)\}$ в области E_1.

Указанным путем, очевидно, можно получить представление (50) во всей полуплоскости $\operatorname{Re} x>a$. Тем самым требуемый результат установлен.

В заключение автор выражает благодарность А. Ф. Леонтьеву за постоянный интерес к его работе.

г. Горький

Поступило в редакцию
20.III.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Миролюбов, Решение одного класса линейных дифференциально-разностных уравнений, Мат. сб., 34 (76), 2, 1, 1954, 357—384.
2. А. А. Миролюбов, Об одном классе дифференциальных уравнений бесконечного порядка, Изв. высших учебн. завед. «Математика», 4 (11), 1959, 111—121.
3. М. А. Солдатов, Решение линейных разностных уравнений с линейными коэффициентами, Мат. сб., 47 (89), 2, 1959, 221—236.
4. М. А. Солдатов, Решение дифференциально-разностных уравнений с линейными коэффициентами, Изв. высших учебн. завед. «Математика», 4 (11), 1959, 150—160.
5. А. Ф. Леонтьев, Ряды полиномов Дирихле и их обобщения, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, АН СССР, XXXIX, 1951.
6. А. Ф. Леонтьев, О представлении произвольных функций рядами Дирихле, ДАН СССР, 164, № 1, 1965, 40—42.
7. А. Ф. Леонтьев, О преобразовании одного функционального уравнения к более простому виду, Мат. сб., 67 (109), 1965, 541—560.
8. А. Ф. Леонтьев, О свойствах последовательностей полиномов Дирихле, сходящихся на интервале мнимой оси, Изв. АН СССР, серия матем., 29, вып. 2, 1965, 269—328.
9. А. Ф. Леонтьев, Дифференциально-разностные уравнения с линейными коэффициентами, Труды Горьковск. гос. пед. ин-та им. А. М. Горького, (физ.-мат. фак.), вып. 14, 1951, 3—30.

VIENOS KLASĖS INTEGRALINIŲ LYGČIŲ ANALIZINIAI SPRENDINIAI

A. MIROLIUBOVAS

(Reziumė)

Nagrinėjama (1) lygtis, esant patenkintoms sąlygoms A), Б) ir B). Nehomogeninei lygčiai surastas atskiras sprendinys, reguliarus platesnėje srityje negu funkcija $F(x)$. Nurodoma, kaip analiziškai pratęsti homogeninės lygties $N[f]=0$ sprendinį $f(x)$. Gautas $f(x)$ išdėstymas šios lygties elementariais sprendiniais.

ANALYTICAL SOLUTIONS OF A CERTAIN CLASS OF INTEGRAL EQUATIONS

A. MIROLIUBOV

(Summary)

Let the conditions A), B), and C) be satisfied. A particular analytical solution has been constructed for the equation (1). Moreover, the important properties of the analytical solutions of the equation $N(f)=0$ have been obtained.