VI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 4
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1966

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ЛИНЕЙЧАТЫХ КВАДРИК В ТРЕХМЕРНОМ ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е. И. УШПАЛЕНЕ

В эллиптическом пространстве каждой прямой l соответствует прямая l', полярно сопряженная с прямой l относительно абсолюта. Показано, что наличие абсолюта дает возможность к паре прямых l, l' присоединить однопараметрическое семейство линейчатых квадрик. Таким образом, возникает возможность к прямой l (элементу базисного пространства — множества всех прямых рассматриваемого эллиптического пространства) присоединить слой, являющийся однопараметрическим семейством элементов $(l,\ l',\ k)$, где k — поверхность указанного выше семейства. Рассматривается дифференциальная окрестность первого порядка гиперповерхности (четырехмерного подмногообразия) пятимерного расслоенного пространства элементов $(l,\ l',\ k)$. Свойства гиперповерхности характеризуются понятиями трехмерного эллиптического пространства.

1. Будем брать в качестве сопровождающего тетраэдра в эллиптическом пространстве тетраэдр $\{A_i\}$ $(i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$, автополярный относительно абсолюта. Нормируем, кроме того, координаты вершин A_i так, чтобы точками пересечения любого ребра $A_i A_j$ с абсолютом были точки $A_i \pm iA_j\,(i=\sqrt{-1})$. В таком случае уравнение абсолюта относительно любого сопровождающего тетраэдра будет иметь вид

$$\Phi \equiv (x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+(x^4)^2=0. \tag{1}$$

Инфинитезимальное преобразование проективного репера $\{A_i\}$ определяется уравнениями

$$dA_i=\omega_i^j A_j; \tag{2}$$

дифференциальные формы ω_i^j удовлетворяют следующим уравнениям структуры [1]:

$$D\omega_i^j=[\omega_i^k,\ \omega_k^j]. \tag{3}$$

Уравнения (2) можно рассматривать как уравнения инфинитезимального преобразования проективного пространства. В эллиптическом пространстве это преобразование должно переводить абсолют (1) в себя; следовательно, относительно этих преобразований левая часть уравнения (1) должна быть относительным инвариантом, т. е. дифференциал $d\Phi$ должен быть равен самому Φ, умноженному на некоторый множитель.

Учитывая то, что в координатах преобразование (2) имеет вид [2]

$$dx^i=-\omega_j^i\,x^j+\omega x^i, \quad D(\omega)=0, \tag{2'}$$

получаем:

$$d\Phi = \omega\Phi + \omega_1^1 (x^1)^2 + \omega_2^2 (x^2)^2 + \omega_3^3 (x^3)^2 + \omega_4^4 (x^4)^2 +$$
$$+ (\omega_2^1 + \omega_1^2)\, x^1 x^2 + (\omega_3^1 + \omega_1^3)\, x^1 x^3 + (\omega_4^1 + \omega_1^4)\, x^1 x^4 +$$
$$+ (\omega_3^2 + \omega_2^3)\, x^2 x^3 + (\omega_4^2 + \omega_2^4)\, x^2 x^4 + (\omega_4^3 + \omega_3^4)\, x^3 x^4.$$

Отсюда и следуют дополнительные условия, накладываемые на формы ω_i^j группы эллиптических преобразований:

$$\omega_1^1 = \omega_2^2 = \omega_3^3 = \omega_4^4; \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} \omega_2^1 + \omega_1^2 = 0, \\ \omega_3^1 + \omega_1^3 = 0, \\ \omega_4^1 + \omega_1^4 = 0, \\ \omega_3^2 + \omega_2^3 = 0, \\ \omega_4^2 + \omega_2^4 = 0, \\ \omega_4^3 + \omega_3^4 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Так как внешнее дифференцирование уравнений (4) – (5) с использованием этих уравнений к новым условиям не приводит, уравнения (4) – (5) образуют вполне интегрируемую систему дифференциальных уравнений.

Следовательно, уравнения (3), (4), (5) образуют полную систему уравнений, определяющих инфинитезимальное преобразование репера в эллиптическом пространстве (или же инфинитезимальное преобразование эллиптического пространства).

Будем считать, кроме того, что вершины тетраэдра $\{A_i\}$ нормированы так, что определитель, составленный из координат точек A_i, равен единице, т. е.

$$(A_1\ A_2\ A_3\ A_4) = 1.$$

Дифференцирование этого равенства приводит к соотношению

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0,$$

которое вместе с (4) дает:

$$\omega_1^1 = \omega_2^2 = \omega_3^3 = \omega_4^4 = 0. \tag{4'}$$

2. В эллиптическом пространстве каждой прямой l соответствует прямая l', полярно сопряженная с прямой l относительно абсолюта, поэтому в эллиптическом пространстве естественно рассматривать геометрические образы, связанные с парой прямых l, l'.

Ни одна вершина выбранного нами автополярного тетраэдра не принадлежит абсолюту (1). В таком случае за одно ребро автополярного тетраэдра можно выбрать произвольную прямую пространства. Таким образом, мы можем полагать, что ребро A_1A_2 — произвольная прямая эллиптического пространства. Если прямая l совпадает с ребром A_1A_2, прямая l' совпадает с ребром A_4A_3. Рассмотрим одно семейство квадрик, связанных с парой прямых $l \equiv A_1A_2$, $l' \equiv A_4A_3$.

Берем квадрику, проходящую через прямые A_1A_2 и A_4A_3. Уравнение этой квадрики имеет вид

$$a_{13}\, x^1 x^3 + a_{14}\, x^1 x^4 + a_{23}\, x^2 x^3 + a_{24}\, x^2 x^4 = 0. \tag{6}$$

Нетрудно убедиться, что полярная плоскость произвольной точки $M = A_1 + tA_2$ прямой A_1A_2 относительно абсолюта является касательной плоскостью к квадрике (6) в такой точке $N = A_4 + \tau A_3$ прямой A_4A_3, для которой

$$a_{13}\, t\tau - a_{23}\, \tau + a_{14}\, t - a_{24} = 0, \tag{7}$$

а полярная плоскость точки N прямой A_4A_3 относительно абсолюта является касательной плоскостью к квадрике (6) в такой точке $M' = A_1 + t'A_2$ прямой A_1A_2, для которой

$$a_{24}\, t'\tau + a_{14}\, \tau - a_{23}\, t' - a_{13} = 0. \tag{8}$$

Потребуем, чтобы точка M' совпала с точкой M, т.е., чтобы проективные соответствия, определенные уравнениями (7) и (8), были взаимно обратными. Это приводит к следующим соотношениям для коэффициентов квадрики (6):

$$\frac{a_{24}}{a_{13}} = \frac{-a_{23}}{a_{14}} = \frac{a_{14}}{-a_{23}} = \frac{-a_{13}}{-a_{24}},$$

из которых получаем

$$a_{23} = \varepsilon\, a_{14}, \quad a_{24} = -\varepsilon\, a_{13},$$

где

$$\varepsilon = \pm 1.$$

Таким образом, для каждого ε существует однопараметрическое семейство квадрик (семейство K), проходящих через прямые A_1A_2 и A_4A_3, обладающих свойством: если полярная плоскость произвольной точки M прямой A_1A_2 относительно абсолюта является касательной плоскостью к некоторой поверхности семейства K в точке N прямой A_4A_3 (такую точку всегда можно найти), то полярная плоскость точки N относительно абсолюта является касательной плоскостью к той же поверхности семейства K в точке M, и наоборот.

Докажем, что если поверхность семейства K обладает этим свойством относительно одной пары прямолинейных образующих, полярно сопряженных относительно абсолюта, то она обладает этим же свойством и относительно любой другой пары прямолинейных образующих, которые полярно сопряжены относительно абсолюта.

Семейство K определяется уравнением:

$$\tilde{\Phi} = x^1 x^3 - \varepsilon x^2 x^4 + \rho\,(x^1 x^4 + \varepsilon x^2 x^3) = 0, \tag{6'}$$

где ρ – параметр семейства.

Легко проверить, что прямолинейными образующими поверхности (6'), проходящими через точку $M = A_1 + tA_2$, являются прямые:

$$A_1 A_2 \qquad (\text{семейства I}) \tag{l}$$

и

$$(A_1 + tA_2, \ \ (1 + \varepsilon\rho t)\, A_4 - (\rho - \varepsilon t)\, A_3) \qquad (\text{семейства II}). \tag{m}$$

Отсюда получаем, что через точку A_1 проходит прямая

$$(A_1, \ A_4 - \rho A_3) \tag{m_1}$$

семейства II. Прямой, полярно сопряженной образующей m_1 относительно абсолюта, является прямая

$$(A_2, \ \rho A_4 + A_3), \tag{m_2}$$

которая тоже принадлежит семейству II прямолинейных образующих квадрики (6′) (в выражении для прямой m нужно положить $t=\infty$). Так как A_1 — любая точка прямой $A_1 A_2$, m_1 — любая образующая семейства II. Таким образом, если прямая m принадлежит семейству II прямолинейных образующих квадрики и (6′), полярно сопряженная с ней относительно абсолюта прямая тоже принадлежит семейству II. Очевидно, тоже самое справедливо и для прямолинейных образующих семейства I.

Справедливость высказанного выше утверждения доказывается проведением элементарных вычислений по отношению к прямым m_1 и m_2.

Таким образом, рассматривая свойства семейства K по отношению к прямым $A_1 A_2$ и $A_4 A_3$, мы получаем свойства этого семейства по отношению к любой паре прямолинейных образующих, полярно сопряженных относительно абсолюта.

Существование семейства квадрик K показывает, что к прямой l (элементу базисного пространства — множества всех прямых рассматриваемого эллиптического пространства) естественным образом присоединяется слой, являющийся однопараметрическим семейством элементов (l, l', k), где k — квадрика семейства K.

Так как, в силу уравнений (4′), (5),

$$d(A_1 A_2)=\omega_1^3 (A_3 A_2)+\omega_1^4 (A_4 A_2)+\omega_2^3 (A_1 A_3)+\omega_2^4 (A_1 A_4),$$
$$d(A_4 A_3)=-\omega_1^3 (A_4 A_1)-\omega_1^4 (A_1 A_3)-\omega_2^3 (A_4 A_2)-\omega_2^4 (A_2 A_3),$$

$$\left.\begin{aligned}d\tilde{\Phi}=&[2\omega-\rho(\varepsilon\,\omega_1^2-\omega_4^3)]\,\tilde{\Phi}+\omega_1^3[-(x^1)^2+(x^3)^2+\rho(x^3x^4-\varepsilon x^1x^2)]+\\&+\omega_1^4[-\rho(x^1)^2+\rho(x^4)^2+(x^3x^4+\varepsilon x^1x^2)]+\\&+\omega_2^3[-\varepsilon\rho(x^2)^2+\varepsilon\rho(x^3)^2-\varepsilon(x^3x^4+\varepsilon x^1x^2)]+\\&+\omega_2^4[\varepsilon(x^2)^2-\varepsilon(x^4)^2+\varepsilon\rho(x^3x^4-\varepsilon x^1x^2)]+\Delta\rho(x^1x^4+\varepsilon x^2x^3),\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где

$$\Delta\rho\equiv d\rho+(1+\rho^2)\,(\varepsilon\omega_1^2-\omega_4^3),$$

главными формами элемента (l, l', k) являются формы

$$\omega_1^3,\ \omega_1^4,\ \omega_2^3,\ \omega_2^4,\ \Delta\rho.$$

Таким образом, многообразие элементов (l, l', k) (расслоенное пространство) является пятипараметрическим.

3. Уравнениями

$$\Delta\rho=F_\alpha^p\,\omega_p^\alpha, \tag{10}$$
$$[\Delta F_\alpha^p,\ \omega_p^\alpha]=0, \tag{11}$$

где

$$\Delta F_\alpha^p\equiv dF_\alpha^p+F_\alpha^q\,\omega_q^p-F_\beta^p\,\omega_\alpha^\beta+2\rho F_\alpha^p\,\vartheta+\frac{1}{2}\,(1+\rho^2)\,\vartheta_\alpha^p,$$
$$\vartheta=\varepsilon\,\omega_1^2-\omega_4^3,$$
$$\vartheta_3^1=-\varepsilon\,\vartheta_4^2\equiv\omega_4^1+\varepsilon\,\omega_3^2,$$
$$\vartheta_4^1=+\varepsilon\,\vartheta_3^2\equiv-\omega_3^1+\varepsilon\,\omega_4^2$$
$$(p,\ q=1,\ 2;\qquad \alpha,\ \beta=3,\ 4),$$

из пятипараметрического многообразия элементов (l, l', k) выделяем четырехпараметрическое подмногообразие, которое ввиду того, что в уравнении (10) коэффициент при $\Delta\rho$ не равен нулю, с каждым слоем имеет только один общий элемент $(l,\ l',\ k)$.

Рассмотрим свойства этого подмногообразия.

Разложение уравнения (11) по лемме Картана приводит к уравнениям

$$\Delta F^p_\alpha = F^{pq}_{\alpha\beta}\,\omega^\beta_q, \tag{12}$$

в которых

$$F^{pq}_{\alpha\beta} = F^{qp}_{\beta\alpha}.$$

Из уравнений (11) имеем:

$$\delta F^p_\alpha + F^q_\alpha\,\pi^p_q - F^p_\beta\,\pi^\beta_\alpha + 2\rho F^p_\alpha\,\bar{\vartheta} = 0, \tag{12'}$$

где δ — символ дифференцирования по вторичным параметрам и

$$\omega^j_i(\delta) = \pi^j_i,\quad \vartheta(\delta) = \bar{\vartheta}.$$

Свертывая F^p_α с координатами $x^\alpha\,(x^1 = x^2 = 0)$ точки на прямой A_4A_3, получаем новые величины

$$F^p = F^p_\alpha\,x^\alpha,$$

которые, как нетрудно проверить непосредственным дифференцированием, при изменении только вторичных параметров, удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\delta F^p = -F^q\,\pi^p_q + F^p(\pi - 2\rho\,\bar{\vartheta})\,(\omega(\delta) = \pi).$$

Непосредственным дифференцированием нетрудно проверить, что

$$\delta F = 2F(\pi - \rho\bar{\vartheta}), \tag{13}$$

где

$$F = F^1 y^2 - F^2 y^1,$$

а y^p — координаты точки на прямой $A_1A_2\,(y^3 = y^4 = 0)$.

Уравнение (13) показывает, что F является относительным инвариантом, т. е. равенство нулю его

$$F^{[1}_\alpha\,y^{2]}\,x^\alpha = 0 \tag{14}$$

определяет инвариантное соответствие между точками прямых A_1A_2 и A_4A_3. Получим геометрическую характеристику этого соответствия.

4. Пусть прямая A_1A_2 описывает на плоскости

$$(A_1,\ A_2,\ A_4 + \tau A_3) \tag{15}$$

пучок прямых с центром в точке $M = A_1 + tA_2$. Для этого достаточно потребовать, чтобы точка M (центр пучка) и плоскость (15) были неподвижны. Так как

$$dM = -t\omega^2_1\,M + [dt + (1+t^2)\,\omega^2_1]\,A_2 + (\omega^3_1 + t\omega^3_2)\,A_3 + (\omega^4_1 + t\omega^4_2)\,A_4,$$

$$d(A_1,\ A_2,\ A_4 + \tau A_3 = -\tau\,\omega^3_4\,(A_1,\ A_2,\ A_4 + \tau A_3) + [d\tau + (1+\tau^2)\,\omega^3_4]\,(A_1,\ A_2,\ A_3) +$$
$$+ (\omega^3_2 - \tau\omega^4_2)\,(A_1,\ A_3,\ A_4) + (\tau\omega^4_1 - \omega^3_1)\,(A_2,\ A_3,\ A_4),$$

точка M является неподвижной, если

$$dt + (1+t^2)\,\omega^2_1 = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} &\omega^3_1 + t\,\omega^3_2 = 0,\\ &\omega^4_1 + t\,\omega^4_2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

плоскость (15) является неподвижной, если

$$d\tau+(1+\tau^2)\,\omega_4^3=0,$$

$$\left.\begin{aligned}&\omega_2^3-\tau\,\omega_2^4=0,\\&\tau\,\omega_1^4-\omega_1^3=0.\end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Из уравнений (16) и (17) имеем

$$\left.\begin{aligned}&\omega_1^3=-t\,\tau\,\omega_2^4,\\&\omega_1^4=-t\,\omega_2^4,\\&\omega_2^3=\tau\,\omega_2^4.\end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

При помощи уравнения (10) $\Delta\rho$ выражен через главные формы ω_p^α прямой A_1A_2. Когда прямая A_1A_2 описывает пучок прямых, то, как видно из уравнений (18), среди форм ω_p^α имеется только одна независимая (например, ω_2^4), следовательно, в этом случае ρ тоже зависит только от одного параметра. Таким образом, когда прямая A_1A_2 описывает пучок прямых, уравнение (6′) определяет однопараметрическое семейство линейчатых поверхностей второго порядка. Будем искать точки пересечения характеристической кривой этого семейства с прямой A_1A_2.

Для получения уравнений характеристической кривой, к уравнению (6′) семейства поверхностей нужно присоединить производную этого уравнения по параметру семейства ρ (полагая, что удовлетворены уравнения (6′), (18)). Эту производную получим, подставляя значения $\Delta\rho$, ω_1^3, ω_1^4, ω_2^3 в правую сторону соотношения (9) и приравнивая нулю коэффициенты при ω_2^4. Таким образом, уравнения характеристической кривой имеют вид:

$$x^1x^3-\varepsilon x^2x^4+\rho(x^1x^4+\varepsilon x^2x^3)=0,$$

$$\left.\begin{aligned}&t\tau\,[(x^1)^2-(x^3)^2-\rho(x^3x^4-\varepsilon x^1x^2)-F_3^1(x^1x^4+\varepsilon x^2x^3)]+\\&+t\,[\rho(x^1)^2-\rho(x^4)^2-(x^3x^4+\varepsilon x^1x^2)-F_4^1(x^1x^4+\varepsilon x^2x^3)]-\\&-\tau\,[\varepsilon\rho(x^2)^2-\varepsilon\rho(x^3)^2+\varepsilon(x^3x^4+\varepsilon x^1x^2)-F_3^2(x^1x^4+\varepsilon x^2x^3)]+\\&+\varepsilon(x^2)^2-\varepsilon(x^4)^2+\varepsilon\rho(x^3x^4-\varepsilon x^1x^2)+F_4^2(x^1x^4+\varepsilon x^2x^3)=0.\end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Решая систему алгебраических уравнений (19) и

$$x^3=0,\quad x^4=0,$$

получаем, что характеристическая кривая (19) пересекает прямую A_1A_2 в двух точках:

$$M_1=A_1+tA_2 \quad\text{и}\quad M_2=(1-\rho\tau)\,A_1+\varepsilon(\rho+\tau)\,A_2.$$

Касательными к кривой (19) в точках M_1 и M_2 пересечения ее с прямой A_1A_2 являются прямые, заданные соответственно уравнениями:

$$\left.\begin{aligned}&(1+\varepsilon\rho t)\,x^3+(\rho-\varepsilon t)\,x^4=0,\\&[\tau(1+\varepsilon\rho t)+(\rho-\varepsilon t)]\,(tx^1-x^2)+[\tau(F_3^2-tF_3^1)+(F_4^2-tF_4^1)]\,(x^4+\varepsilon t x^3)=0\end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

и

$$\left\{\begin{aligned}&x^3-\tau x^4=0,\\&[t(1-\rho\tau)-\varepsilon(\rho+\tau)]\,[(\rho+\tau)\,x^1-\varepsilon(1-\rho\tau)\,x^2]+\\&+[\tau(F_3^2-tF_3^1)+(F_4^2-tF_4^1)]\,[(\rho+\tau)\,x^3+(1-\rho\tau)\,x^4]=0.\end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Рассматривая систему уравнений (20) и

$$x^1=0, \quad x^2=0,$$

нетрудно установить, что касательная (20) пересекает прямую $A_4 A_3$ только тогда, когда

$$\tau(F_3^2-tF_3^1)+(F_4^2-tF_4^1)=0, \tag{14'}$$

т. е., когда точка $P=A_4+\tau A_3$ является соответствующей для точки M в соответствии (14).

Отметим, что точкой пересечения касательной (20) и прямой $A_4 A_3$ является точка

$$R_4=(1+\varepsilon\rho t)A_4-(\rho-\varepsilon t)A_3.$$

Кроме того, если выполнено соотношение (14'), касательная (21) тоже пересекает прямую $A_4 A_3$, причем точкой пересечения является точка

$$R_3=A_4+\tau A_3.$$

Так как точка M неподвижна, полярная плоскость этой точки относительно абсолюта, т. е. плоскость $(tA_1-A_2,\ A_3,\ A_4)$, тоже неподвижна; так как плоскость $(A_1,\ A_2,\ A_4+\tau A_3)$ неподвижна, полюс этой плоскости относительно абсолюта, т. е. точка $R=\tau A_4-A_3$, тоже неподвижна. Следовательно, когда прямая $A_1 A_2$ описывает на плоскости $(A_1,\ A_2,\ A_4+\tau A_3)$ пучок прямых с центром в точке M, прямая $A_4 A_3$ описывает на плоскости $(tA_1-A_2,\ A_3,\ A_4)$ пучок прямых с центром в точке R. Поэтому естественно, аналогично проделанному выше, искать также точки пересечения характеристической кривой (19) с прямой $A_4 A_3$. Нетрудно проверить, что такими точками являются точки

$$R_2=\tau A_4-A_3 \quad \text{и} \quad R_1=(\varepsilon\rho-t)A_4+(\varepsilon+\rho t)A_3.$$

Касательными к кривой (19) в точках R_2 и R_1 являются соответственно прямые, заданные уравнениями

$$\left.\begin{aligned}&(1-\rho\tau)x^1+\varepsilon(\rho+\tau)x^2=0,\\ &[\tau(F_3^2-tF_3^1)+(F_4^2-tF_4^1)](\varepsilon x^2-\tau x^1)+[t(1-\rho t)-\varepsilon(\rho+\tau)](\tau x^3+x^4)=0\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

и

$$\left.\begin{aligned}&x^1+tx^2=0,\\ &[\tau(F_3^2-tF_3^1)+(F_4^2-tF_4^1)]\,[(\varepsilon\rho-t)x^1+(1+\varepsilon\rho t)x^2]+\\ &+[\tau(1+\varepsilon\rho t)+(\rho-\varepsilon t)]\,[(\rho-\varepsilon t)x^3-(1+\varepsilon\rho t)x^4]=0.\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Если выполнено соотношение (14'), касательные (22) и (23) пересекают прямую $A_1 A_2$, соответственно, в точках

$$M_3=\varepsilon(\rho+\tau)A_1-(1-\rho\tau)A_2 \quad \text{и} \quad M_4=tA_1-A_2.$$

Так как касательная (20) к характеристической кривой (19) определяется точками $M_1=A_1+tA_2$ и $R_4=(1+\varepsilon\rho t)A_4-(\rho-\varepsilon t)A_3$, она принадлежит поверхности (6') (см. прямые l и m). Нетрудно проверить, что касательные $M_2 R_3$, $M_3 R_2$ и $M_4 R_1$ тоже лежат на поверхности второго порядка, определяемой уравнением (6').

Вильнюсский филиал
Каунасского Политехнического института

Поступило в редакцию
9.III.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Фиников, Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии, М.—Л., 1948.
2. Г. Ф. Лаптев, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий, Труды Моск. математ. общества, 1953, т. II, 275—382.

APIE VIENĄ ANTROS EILĖS TIESIALINIJINIŲ PAVIRŠIŲ ŠEIMĄ TRIMATĖJE ELIPSINĖJE ERDVĖJE

E. UŠPALIENĖ

(Reziumė)

Kiekvienai tiesei l elipsinėje erdvėje atitinka tiesė l', poliariškai sujungtinė su tiese l absoliuto atžvilgiu. Parodoma, kad, esant absoliutui, prie tiesių dvejeto l, l' galima prijungti vienparametrinę tiesialinijinių antros eilės paviršių šeimą. Tokiu būdu atsiranda galimybė prie tiesės kaip bazinės erdvės (visų nagrinėjamos elipsinės erdvės tiesių aibės) elemento, prijungti sluoksnį, kuris yra vienparametrinė elementų (l, l', k) šeima (k yra tos šeimos paviršius). Nagrinėjama penkiaparametrinės išsluoksniuotos elementų (l, l', k) erdvės hiperpaviršiaus (keturmačio poerdvio) pirmos eilės diferencialinė aplinka. Hiperpaviršiaus savybės charakterizuojamos trimatės elipsinės erdvės sąvokomis.

ÜBER EINE SCHAR VON GERADLINIGEN FLÄCHEN ZWEITER ORDNUNG IM DREIDIMENSIONALEN ELLIPTISCHEN RAUM

E. UŠPALIENĖ

(Zusammenfassung)

Es wird gezeigt, dass man im elliptischen Raum jedem Paar der konjugierten Polaren l und l' eine einparametrische Schar k von geradlinigen Flächen zweiter Ordnung assoziieren kann. Weiter wird die Differentialumgebung erster Ordnung von Hyperfläche im fünfdimensionalen Raum der Elementen (l, l', k) untersucht. Die Eigenschaften der Hyperfläche werden durch Begriffe des dreidimensionalen elliptischen Raumes charakterisiert.