VI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 4
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1966

ИНФОРМАЦИЯ О СЕДЬМОМ РЕСПУБЛИКАНСКОМ СОВЕЩАНИИ МАТЕМАТИКОВ ЛИТОВСКОЙ ССР

С 27-го по 28-е июня 1966 г. в Вильнюсе проходило Седьмое республиканское совещание математиков Литовской ССР, организованное факультетом математики и механики Вильнюсского Государственного университета им. В. Капсукаса и Обществом литовских математиков. В совещании участвовало свыше 90 сотрудников республиканских научных учреждений и учебных заведений. Наряду с пленарными заседаниями работали четыре секции: теории функций, геометрии, вычислительной математики и математической логики, теории вероятностей и теории чисел.

На совещании было уделено большое внимание вопросам преподавания математики в школе. Большинство участников высказалось за организацию классов с усиленным преподаванием предметов. В связи с подготовкой новой программы по математике, решено организовать курсы для учителей.

На пленарных и секционных заседаниях было прочитано 58 докладов и коротких сообщений.

Ниже приводится программа совещания, а также тезисы и резюме некоторых докладов и сообщений, прочитанных на пленарных и секционных заседаниях.

ПРОГРАММА СОВЕЩАНИЯ

ПЛЕНАРНЫЕ ЗАСЕДАНИЯ

Понедельник, 27 июня 10 ч.

1. Открытие совещания.
2. И. Кубилюс, В. Лютикас, Проблемы преподавания математики в высших и средних школах.
3. Дискуссии.

Вторник, 28 июня 13 ч.

1. Принятие решений.
2. Текущие вопросы.

СЕКЦИЯ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

(руководитель В. ПАУЛАУСКАС)

Понедельник, 27 июня 15 ч.

1. А. Нафталевич (ВГУ), Приближение аналитических функций полиномами (20 мин.).
2. В. Кабайла (ВГУ), Автоморфные функции второго рода (15 мин.).
3. А. Мишкелявичюс (ВГУ), О сверхсходимости рядов Дирихле с комплексными показателями (15 мин.).
4. В. Кабайла (ВГУ), Краевые задачи аналитических функций (15 мин.).
5. И. Гвильдис, М. Бальчюнайте (КПИ), Применение греко-латинских квадратов (15 мин.).
6. Б. Хмелевский (ВГПИ), О дифференцируемости функций конечной вариации двух переменных (15 мин.).

Вторник, 28 июня 10 ч.

1. Ш. Стрелиц (ВГУ), К вопросу о решениях линейных дифференциальных уравнений бесконечного порядка (20 мин.).
2. А. Нагяле (ВГУ), Поведение голоморфных в круге решений дифференциальных уравнений (15 мин.).
3. В. Шилерис, Решение системы уравнений эллиптического типа (15 мин.).
4. Б. Квядарас (ИФМ), Об области разрешимости задачи о корректировке (15 мин.).
5. Л. Ступялис (ИФМ), Об операторных уравнениях (15 мин.).
6. Л. Ступялис, Метод преобразования Лапласа (15 мин.).
7. Ю. Дегутис (ВГУ), О решении гиперболических уравнений (15 мин.).

СЕКЦИЯ ГЕОМЕТРИИ

(Руководитель П. КАТИЛЮС)

Понедельник, 27 июня 15 ч.

1. В. Близникас (ВГПИ), О геометрии систем дифференциальных уравнений высших порядков (20 мин.).
2. К. Гринцявичюс (ВГУ), О пучке линейных касательных комплексов (20 мин.).
3. А. Ионушаускас (ВГПИ), Существование инвариантных финслеровых метрик в однородных пространствах (20 мин.).
4. А. Матузявичюс (ВГУ), О гомотопической эквивалентности неодносвязных многообразий (20 мин.).
5. И. Шинкунас (ВГУ), О теории связности пространств специальных опорных элементов (15 мин.).
6. З. Жемайтис (ВГУ), Обобщение исследований по неевклидовой геометрии (15 мин.).

Вторник, 28 июня 10 ч.

1. Бельтене (ВГУ), Об одном однопараметрическом слое корреляции (15 мин.).
2. И. Близникене (ВГПИ), О геометрии секущих поверхностей некоторых расслоенных пространств (15 мин.).
3. В. Падервинскас (ВГУ), К вопросу существования ромбоэдрических и ромбических сетей в трехмерном евклидовом пространстве (15 мин.).
4. Л. Стиклаките (ВГУ), К вопросу геометрии гиперповерхности билинейнометрического проектного пространства (15 мин.).
5. Е. Ушпалене (ВФКПИ), О секущей поверхности расслоенного пространства, базис которого образован прямыми эллиптического пространства (15 мин.).

СЕКЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

(Руководитель В. МАТУЛИС)

Понедельник, 27 июня 15 ч.

1. В. Е. Шаманский (Киев, ИМ), Численное решение задачи фильтрации грунтовых вод (20 мин.).

2. М. Сапаговас (ИФМ), Приближенное решение нелинейных задач теории эластичности и пластичности (15 мин.).

3. Б. Квядарас, Д. Левинскайте, М. Сапаговас, Д. Сапаговене (ИФМ), Вычисление на ЭВМ частоты собственных колебаний мембраны (20 мин.).

4. И. Уждавинис (ВГУ), Интерполяционные методы решения дифференциальных уравнений (20 мин.).

5. А. Вилькелис (ВГУ), О методе областей (15 мин.).

6. И. Ячяускас (ИФМ), Задача преследования (10 мин.).

7. Р. Ясилёнис (ИФМ), О существовании сложных решений задач математического программирования (10 мин.).

8. В. Бистрицкас (ИФМ), Области решения трихотомической задачи (10 мин.).

9. С. Вакринене (ИФМ), Рекурсивные биматричные игры (15 мин.).

10. Э. Вилкас (ИФМ), Аксиоматическое определение значения некооперативной игры n лиц (20 мин.).

11. Э. Вилкас (ИФМ), Производная значений антагонистической игры (10 мин.).

Вторник, 28 июня 10 ч.

1. Р. Плюшкявичюс (ИФМ), Устранение структурных правил из исчисления генценовского типа (15 мин.).

2. В. Матулис (ИФМ), Вопросы автоматизации поиска вывода теорем исчисления предикатов (15 мин.).

3. С. Норгела (ВГУ), В. Матулис (ИФМ), Об определении недоказуемости формул исчисления предикатов (15 мин.).

4. Р. Плюшкявичюс (ИФМ), К вопросу о некоторых секвенциальных конструктивных исчислениях (15 мин.).

5. Б. Вайчюлис (ВГУ), Вопросы машинного поиска вывода теорем теории множеств (20 мин.).

6. Г. Григас (ИФМ), О формальном языке для описания ЦВМ (20 мин.).

7. В. Бикелене, А. Плюшкявичене (ИФМ), Система символического программирования для БЭСМ-2М (20 мин.).

СЕКЦИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

(Руководитель Б. ГРИГЕЛЁНИС)

Понедельник, 27 июня 15 ч.

1. И. Кубилюс (ВГУ), Метод производящих функций в вероятностной теории чисел (30 мин.).

2. Р. Уждавинис (ВФКПИ), Обобщение теоремы Эрдёша—Винтнера для последовательностей простых чисел (15 мин.).

3. Р. Слесорайтене, Г. Мисявичюс (ВГУ), Из метрической теории чисел (20 мин.).

4. К. Булота (ИФМ), Дзета-фукции Геке (25 мин.).

5. Г. Ю. Алешкявичюс (ИФМ), Предельные теоремы для сумм случайных величин, заданных на цепи Маркова (20 мин.).

6. А. Бикялис, Г. Ясюнас (ВГУ), О предельных теоремах в метриках пространств l_1 и L_1 (30 мин.).

7. А. Бикялис (ВГУ), О многомерных интегральных предельных теоремах.

8. Б. Григелёнис, Оптимальные правила остановки Марковских процессов и задачи анализа (30 мин.).

9. А. Микалаускас (ИФМ), И. Банис (ВГУ), Метод псевдомоментов в предельных теоремах (30 мин.).

Вторник, 28 июня 10 ч.

1. В. Статулявичюс (ИФМ), А. Рауделюнас, А. Аксомайтис (ВГУ), Теоремы о больших уклонениях (30 мин.).
2. П. Сурвила (ВГПИ), Предельные теоремы для функционалов последовательности частичных сумм независимых случайных величин (30 мин.).
3. Л. Тельксннс, В. Черняускас, А. Мотуза (ИФМ), Математические задачи в процессах распознавания (20 мин.).
4. А. Темпельман (ИФМ), Эргодические теоремы общих динамических систем (30 мин.).
5. А. Алешкявичене, В. Лютикас (ИФМ), Предельные теоремы для рекуррентных событий (30 мин.).
6. А. Шепутис (ВФКПИ), С. Стейшюнас (ВГУ), Доверительные зоны для максимума многомерного стационарного гауссового процесса (10 мин.).

«О СВЕРХСХОДИМОСТИ РЯДОВ ДИРИХЛЕ С КОМПЛЕКСНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ»

А. МИШКЕЛЯВИЧУС

Для ряда Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}, \quad \lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty, \tag{1}$$

с комплексными показателями λ_n, удовлетворяющими условию

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\arg(\lambda_{n+1}-\lambda_n)| = \alpha < \frac{\pi}{2}, \tag{2}$$

доказываются следующие теоремы о сверхсходимости, которые являются обобщением теорем Островского [1].

Теорема 1. *Если показатели λ_n удовлетворяют условию (2) и*

$$|\lambda_{n_k+1}| > (1+\vartheta_k)|\lambda_{n_k}|, \quad \vartheta_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty,$$

то частичные суммы

$$S_{n_k}(z) = \sum_{j=1}^{n_k} a_j e^{-\lambda_j z}$$

ряда (1) равномерно сходятся при $k\to\infty$ в каждом замкнутом и ограниченном множестве, содержащемся внутри области голоморфности суммы ряда (1). Кроме того, эта последняя область является односвязной.

Теорема 2. *Пусть по-прежнему λ_n удовлетворяют условию (2) и ζ_0 — точка на границе области сходимости ряда (1) такая, что 1) сумма ряда (1) голоморфна в точке ζ_0, 2) существует круг K, целиком лежащий в области сходимости ряда (1) и касающийся границы этой области в точке ζ_0, и 3) угол ψ между касательной к кругу K в точке ζ_0 и мнимой осью удовлетворяет неравенству $|\psi| < \frac{\pi}{2} - \alpha$. Если выполнено условие*

$$|\lambda_{n_k+1}| > (1+\vartheta)|\lambda_{n_k}|, \quad 0<\vartheta<\infty, \quad k=1, 2, \ldots,$$

то частичные суммы $S_{n_k}(z)$ при $k\to\infty$ равномерно сходятся в некоторой окрестности точки ζ_0.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. Bernstein, Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet, Paris, 1933.

ОБ ОДНОМ ПРИМЕНЕНИИ ГРЕКО-ЛАТИНСКИХ КВАДРАТОВ

И. ГВИЛЬДИС, М. БАЛЬЧЮНАЙТЕ

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_l$ — конечная последовательность, где $x_i \in S = \{1, 2, \dots, n\}$ $(i = 1, 2, \dots, l)$. Такая последовательность есть l-перестановка из n элементов с неограниченным повторением [1]. Число таких последовательностей равно $U(n, l) = n^l$. Набор последовательностей, в котором число совпадающих членов для любых двух последовательностей не превышает числа s, назовем s-набором.

Теорема 1. *В s-наборе $N \leqslant n^{s+1}$, где N — число последовательностей. Если $N = n^{s+1}$, то s-набор назовем полным.*

Укажем связь между полными s-наборами и структурами, которые в комбинаторной математике известны как греко-латинские квадраты [2].

Если соответствующие столбцы v взаимно ортогональных латинских квадратов со сторонами n напишем один рядом с другим, тогда получим структуру, которую назовем греко-латинским квадратом v-го порядка с стороной n. Полученную из соответствующих столбцов латинских квадратов таблицу чисел назовем столбцом греко-латинского квадрата. Латинский квадрат — это греко-латинский квадрат первого порядка. Приведем пример греко-латинского квадрата второго порядка со стороной 4

11	23	34	42
22	14	43	31
33	41	12	24
44	32	21	13

Определим s·2-структуру. s·2-структура v-го порядка со стороной n есть квадратная таблица $s \cdot 2 = [r_{ij}]$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$, где r_{ij} — столбцы греко-латинского квадрата со стороной n, имеющие следующие свойства: а) r_{ij} при фиксированном i или j составляют греко-латинский квадрат v-го порядка; в) числа $r_{ij,k}$, которые находятся в k-той строке r_{ij} столбцов, при фиксированном k тоже составляют греко-латинский квадрат v-го порядка. Общую s·2-структуру определим s·3-структурой.

s·3-структура v-го порядка со стороной n — это кубическая таблица $s \cdot 3 = [r_{ijt}]$ $(i, j, t = 1, 2, \dots, n)$, где r_{ijt} — столбцы греко-латинского квадрата со стороной n, имеющие следующие свойства: а) r_{ijt} при двух фиксированных индексах составляют греко-латинские квадраты v-го порядка; б) r_{ijt} при одном фиксированном индексе составляют s·2-структуру v-го порядка; в) числа $r_{ijt,k}$ при фиксированном k составляют s·2-структуру.

Теорема 2. *Для того, чтобы существовал полный s-набор, когда $s = 1$, состоящий из l-перестановок с повторениями из n элементов, необходимо и достаточно, чтобы существовал греко-латинский квадрат порядка $l-2$ со стороной n.*

Теорема 3. *Для того, чтобы существовал полный s-набор, когда $s = 2$, состоящий из l-перестановок с повторениями из n элементов, необходимо, чтобы существовала s·2-структура порядка $l-3$ со стороной n.*

Теорема 4. *Для того, чтобы существовал полный s-набор, когда $s = 3$, состоящий из l-перестановок с повторениями из n элементов, необходимо, чтобы существовала s·3-структура порядка $l-4$ со стороной n.*

Максимальное число членов последовательностей в полном s-наборе обозначим l_{max}, а максимальное число взаимно ортогональных квадратов — m. Для вышеуказанных полных s-наборов $l_{max} \leqslant m + s + 1$, так как $m \leqslant n - 1$, то $l_{max} \leqslant n + s$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Риордан, Введение в комбинаторный анализ, Изд-во иностр. лит., 1963.
2. Т. Дж. Раизер, Комбинаторная математика, Изд-во «Мир», 1966.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИДЕИ ГАЛИЛЕЯ В СТАРОЙ ВИЛЬНЮССКОЙ АКАДЕМИИ

(тезисы доклада)

Б. ХМЕЛЕВСКИЙ

1. Роль старого Вильнюсского университета в культурной жизни Литвы может быть понята лишь в процессе изучения развития наук в этом университете на фоне истории европейской культуры.

2. Среди различных историко-научных документов, свидетельствующих о влиянии идей Галилея на старую Вильнюсскую академию, главными являются следующие: «Знаменитые математические теоремы и задачи» Яна Рудомины Дусятского (1633), «Астрономическая центурия» Альберта Дыблинского (1639) и «Теорецентрика или математические рассуждения о центре и точках» Казимира Бялковского (1643).

3. В работе Рудомины Дусятского отмечается, что его учитель (Освальд Кригер, *Б. Х.*) наблюдал в Вильнюсе через телескоп открытые Галилеем спутники Юпитера. В наблюдениях принимал участие Рудомина Дусятский. Этот факт показывает, что еще при жизни Галилея его астрономические исследования нашли отзвук в Вильнюсе.

4. В книге Альберта Дыблинского «Астрономическая центурия» упоминается телескоп и описываются проведенные в Вильнюсе наблюдения фаз Венеры.

5. Если вышеупомянутые источники отражают в первую очередь астрономические исследования Галилея и касаются математики лишь в той мере, в какой она связана с астрономией, то в работе Казимира Бяловского «Теорецентрика или математические рассуждения о центре и точках» упоминаются физические и чисто математические идеи Галилея, сыгравшие впоследствии важную роль в развитии этих наук.

6. Во втором томе «Литовской Энциклопедии» (старое довоенное издание) Бялковский упоминается только как теолог. Между тем он был также высокообразованным математиком, учеником и сотрудником Кригера.

7. В вышеупомянутой работе Бялковского описываются «точки» пяти видов: «точка рождения», «точка движения», «точка тяжести», «точка отражения» и «точка количества». В разделе о «точке тяжести» Бялковский отрицает утверждение Галилея о независимости скорости свободно падающих тел от их массы, и пытается выдвинуть следующий «контрэксперимент»: копье, брошенное горизонтально, приближается к земле так, что его более тяжелый конец достигает поверхности земли раньше, чем другие его части. Сам факт отрицания показывает, что открытия Галилея в области механики были известны в Вильнюсе, вызывали здесь интерес и споры.

8. В разделе о «точке количества» описываются чисто математические идеи Галилея, связанные с понятием «неделимых». Бялковский здесь пользуется «Математическими беседами» Галилея, не упоминая, однако, его имени.

9. Затронутые здесь математические идеи о «неделимых» сыграли в развитии математики очень важную роль, начиная с математики античного периода, через проблемы континуума, которые исследовались Томом Брадвардином в средние века, через применение учениками Галилея понятия «неделимых» к геометрии, вплоть до противоречия между понятиями потенциальной и актуальной бесконечности, возникшего вновь в девятнадцатом столетии и связанного с именем Кронекера и Кантора. Эти идеи в одной из фаз своего развития не миновали и старой Вильнюсской академии.

К ВОПРОСУ О РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Ш. И. СТРЕЛИЦ

Изучается дифференциальное уравнение бесконечного порядка

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)\, y^{(n)}=0, \qquad (1)$$

где $P_n(z)$ — абсолютно сходящиеся во всей плоскости ряды Дирихле:

$$P_n(z)=\sum_{p=0}^{\infty} a_p^{(n)} e^{\lambda_p z},$$

у которых последовательность показателей $\{\lambda_p\}$:

$$0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_p\uparrow\infty$$

удовлетворяет условию:

$$\overline{\lim_{p\to\infty}}\frac{\ln p}{\lambda_p}=c<\infty.$$

Положим:

$$Q_n(z)=P_n(z)-a_0^{(n)};$$

$$S_n(x)=\sup_{-\infty<y<\infty}|Q_n(x+iy)|;$$

$$h_0(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_0^{(n)} t^n$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(x)\, r^n=\sigma(x,\ r).$$

Обозначим, наконец, через β — нуль функции $h_0(t)$. Имеет место следующее предположение.

Теорема. *Предположим выполненными следующие условия:*

1) $h_0(\beta+\lambda_{i_1}+\lambda_{i_2}+\ldots+\lambda_{i_m})>0$ *при всяком* m *и любых* $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \ldots, \lambda_{i_m}$;

2) $\sigma(x,\ z)$ — *целая функция при любом действительном* x *и*

3) *имеются такие функции* $\sigma^*(x)$ *и монотонно возрастающая функция* $g(r)$ *с* $\lim\limits_{r\to\infty} g(r)=\infty$, *что*

$$\frac{\sigma(x,\ r)}{|h_0(\beta+r)|}<\frac{\sigma^*(x)}{g(r)}.$$

Тогда существует решение уравнения (1) *вида*

$$y=e^{\beta z} f(z),$$

где

$$f(z)=\sum_{m=1}^{\infty}\ \sum_{i_1,\, i_2,\, \ldots,\, i_m=1}^{\infty} A_{i_1 i_2\ldots i_m} e^{(\lambda_{i_1}+\lambda_{i_2}+\ldots+\lambda_{i_m})\, z}+1 - \qquad (2)$$

абсолютно сходящийся во всей плоскости ряд Дирихле.

Так, например, уравнение

$$(e^{\nu_0 e^z}-1)\,y+(e^{\nu_1 e^z}-1)\,y'+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\,(e^{\nu_n e^z}+n-1)\,y^{(n)}=0$$

с постоянными $\nu_j: |\nu_j|\leqslant\nu$; $j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ имеет бесконечное множество решений

$$y_n=e^{2\pi n z i} f_n(z);\qquad n=0,\ \pm1;\ \pm2;\ \ldots$$

с $f_n(z)$ вида (2).

В заключение заметим, что к уравнению типа (1) заменой $t=e^z$ сводится любое дифференциальное уравнение типа

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n F_n(t)\, y^{(n)}=0$$

с целыми $F_n(t)$; $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

ПОВЕДЕНИЕ ГОЛОМОРФНЫХ В КРУГЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. НАГЯЛЕ

Рассматривается голоморфное решение дифференциального уравнения

$$F(z, w, w')=0, \tag{1}$$

где F — многочлен от всех своих переменных.

Уравнение (1) приводим к виду

$$F^*\left(z, w, \frac{zw'}{w}\right)=0 \tag{2}$$

и разлагаем затем полином F^* по степеням w:

$$\sum_{j=0}^{n} Q_j\left(z, \frac{zw'}{w}\right) w^{n-j}=0. \tag{3}$$

Коэффициент $Q_0\left(z, \frac{zw'}{w}\right)$, далее, разлагаем по степеням $\frac{zw'}{w}$:

$$Q_0\left(z, \frac{zw'}{w}\right)=\sum_{j=0}^{m} P_j(z)\left(\frac{zw'}{w}\right)^{m-j}. \tag{4}$$

Предположим $P_0(0)\neq 0$, что не является ограничением. Изучаем голоморфное решение в окрестности точки $z=0$ уравнения (2) (или (1)).

Пусть $z=a$ ближайший нуль полинома $P_0(z)$ к началу координат. Оказывается, что решение

$$w=\sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k \tag{5}$$

уравнения (2), сходящееся в круге $|z|<R<|a|$, растет не быстрее рациональной функции, т. е.

$$\overline{\lim_{r\to R}} \frac{\ln M(r, w)}{\ln \frac{1}{R-r}}<\infty, \tag{6}$$

где

$$M(r, w)=\max_{|z|=r} |w|.$$

Предположим теперь, что решение (5) сходится в круге $|z|<|a|$. Пусть

$$\frac{zw'}{w}=\sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(ij)} \frac{1}{(z-a_j)^{\frac{p_{ij}-k}{q_{ij}}}}; \qquad i=1, 2, \ldots, n_j; \quad j=1, 2, \ldots, m_0;$$

корни уравнения

$$Q_0\left(z, \frac{zw'}{w}\right)=0$$

в соответствующих окрестностях нулей $a_1, a_2, \ldots, a_{m_0}$ полинома $P_0(z)$, лежащих на окружности $|z|=a$.

Если все $\frac{p_{ij}}{q_{ij}}\leqslant 1$, то для всех рассматриваемых решений имеет место (6). Если же

$$\frac{p_{j_s k}}{q_{j_s k}}>1; \qquad k=1, 2, \ldots, k_s; \quad s=1, 2, \ldots, m^*, \tag{7}$$

а все остальные показатели не больше единицы, то возможны голоморфные в круге $|z|<|a|$ решения, для которых предел

$$\rho=\overline{\lim}\frac{\ln\ln M(r, w)}{\ln\frac{1}{|a|-r}}, \tag{8}$$

вообще говоря, равен одному из чисел

$$\frac{p_{j_s k}}{q_{j_s k}}-1; \qquad k=1, 2, \ldots, k_s; \quad s=1, 2, \ldots, m^*. \tag{9}$$

В работе рассматриваются и исключительные случаи, когда ϱ оказывается не равным ни одному из чисел (9). $\Big($Заметим, что ϱ никогда не превосходит максимального из числа (9)$\Big)$.

ОБ ОБЛАСТИ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ О КОРРЕКТИРОВКЕ

Б. КВЕДАРАС

Пусть $(x_0, \dot{x}_0)$ и $(x_T, \dot{x}_T)$ – две какие либо точки на плоскости (ξ, η). Пусть функции $f(t, x, y)$ и $g(t, x, y)$ определены и непрерывны по всем аргументам при $0\leqslant t\leqslant T$, $-\infty<x, y<\infty$.

Пару чисел a, b из треугольника $L: 0\leqslant a\leqslant b\leqslant T$ назовем решением задачи о корректировке, если существует непрерывно дифференцируемое решение $x(t)$ дифференциального уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2}+h(t, x, \dot{x})=0, \tag{1}$$

где

$$h(t, x, x)=\begin{cases} f(t, x, \dot{x}), & \text{если} \quad t\in[0, a) \quad \text{или} \quad t\in(b, T], \\ g(t, x, \dot{x}), & \text{если} \quad t\in[a, b], \end{cases}$$

удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} x(0)&=x_0, \\ \dot{x}(0)&=\dot{x}_0; \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} x(T)&=x_T, \\ \dot{x}(T)&=\dot{x}_T. \end{aligned} \tag{3}$$

Пусть точка $(x_T, \dot{x}_T)$ плоскости (ξ, η) и числа a и b из L фиксированы. Тогда существующее решение $x(t;\ a, b)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям (3), определяет некоторую точку $\big(x(0;\ a, b), \dot{x}(0;\ a, b)\big)$ на плоскости (ξ, η). Когда a и b пробегают треугольник L, точки вида $\big(x(0;\ a, b), \dot{x}(0;\ a, b)\big)$ будут пробегать некоторое множество M, называемое областью разрешимости задачи о корректировке.

Теорема 1. *Пусть функции $f(t, x, y)$ и $g(t, x, y)$ убывают по x и удовлетворяют условию*

$$f(t, x, y)-g(t, x, y)>0.$$

Тогда отображение φ треугольника L на область M является гомеоморфизмом, если прямую $a=b$ отождествить с точкой (0, 0).

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 отображения $\varphi_1(b)=\varphi(0, b)$ и $\varphi_2(a)=\varphi(a, T)$ обоих катетов треугольника L на множества Γ_1 и Γ_2 суть гомеоморфизмы, причем $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$ является границей области M, а $\Gamma_1\cap\Gamma_2$ состоит лишь из двух точек.*

Отсюда вытекает, что M является замкнутой, ограниченной, связаной и односвязной областью, с границей, состоящей из двух непрерывных дуг, пересекающихся в двух точках, т. е. Γ суть замкнутая кривая. При некоторых дополнительных ограничениях область M выпукла. В частности для линейных систем она выпукла всегда.

ОБ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЯХ

Л. СТУПЯЛИС

Пусть ограниченная область Ω n-мерного евклидова пространства есть сумма двух областей Ω_1 и Ω_2 и разделяющей их $n-1$-мерной поверхности Γ, так что $\Omega=\Omega_1\cup\Gamma\cup\Omega_2$. Обозначим через S границу Ω, а через S_1 и S_2 — границы Ω_1 и Ω_2. Рассмотрим в областях Ω_k, $k=1$, 2 одно из уравнений:

$$L_1^{(k)}u\equiv-\frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}^{(k)}(x,\ t)\ \frac{\partial u}{\partial x_j}\right]+a_i^{(k)}(x,\ t)\ \frac{\partial u}{\partial x_i}+a^{(k)}(x,\ t)\,u=f_1^{(k)}(x,\ t) \tag{1}$$

— эллиптическое,

$$L_2^{(k)}u\equiv\frac{\partial u}{\partial t}+L_1^{(k)}u=f_2^{(k)}(x,\ t) \tag{2}$$

— параболическое, или

$$L_3^{(k)}u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+L_1^{(k)}u=f_3^{(k)}(x,\ t) \tag{3}$$

— гиперболическое.

Для этих уравнений разберем следующие краевые задачи: определить функцию, удовлетворяющую в цилиндре $Q_T^{(1)}=\Omega_1\times[0\leqslant t\leqslant T]$ одному из уравнений $L_r^{(1)}u=f_r^{(1)}$, $r=1$, 2, 3; в цилиндре $Q_T^{(2)}=\Omega_2\times[0\leqslant t\leqslant T]$ — одному из уравнений $L_s^{(2)}u=f_s^{(2)}$, $s=1$, 2, 3 $(r\neq s)$; при $t=0$ — условию

$$u\,|_{t=0}=\varphi_0^{(k)}(x) \tag{4}$$

в случае уравнений (2), и условиям

$$u\,|_{t=0}=\varphi_0^{(k)}(x),\quad u_t\,|_{t=0}=\varphi_1^{(k)}(x) \tag{5}$$

— в случае уравнений (3), на S — одному из классических краевых условий, пусть для определенности первому

$$u\,|_S=\psi(s,\ t),\quad \text{при}\quad t\in[0,\ T] \tag{6}$$

и на Γ — условиям сопряжения:

$$[u]\,|_\Gamma=\psi_1(s,\ t),\ \left[b\ \frac{\partial u}{\partial N}\right]\Big|_\Gamma+h\,[u]\,|_\Gamma=\psi_2(s,\ t),\quad \text{при}\quad t\in[0,\ T], \tag{7}$$

где $b(x,\ t)\geqslant\beta>0$. Символ $[v]$ означает скачок, который испытывает функция v при переходе через Γ.

Предполагается, что коэффициенты уравнений (1)—(3) удовлетворяют в $\bar{\Omega}_k$ следующим условиям:

$$a_{ij}^{(k)}=a_{ji}^{(k)},\quad \sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^{(k)}\xi_i\xi_j\geqslant\alpha\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2,\quad \alpha=\mathrm{const}>0, \tag{8}$$

для $L_1^{(k)}$ в (1) (но не в (2) и (3)) верно неравенство

$$\int\limits_{\Omega_k}[a_{ij}^{(k)}v_{x_i}v_{x_j}+a_i^{(k)}v_{x_i}v+a^{(k)}v^2]\,dx\geqslant\nu\,\|\,v\,\|^2_{W_2^1(\Omega_k)},\qquad \nu=\mathrm{const}>0, \tag{9}$$

при любой функции v из $W_2^1(\Omega_k)$, удовлетворяющей условию

$$v\,|_{S_k\setminus\Gamma}=0.$$

Для решения этих задач используется функциональный метод, которому посвящено много работ О. А. Ладыженской, М. И. Вишика, а также известна более поздняя работа Т. Като, который опирается на работы Э. Хилла и К. Иосиды по теории полугрупп.

Сформулированные выше задачи трактуются как задачи о решении операторных уравнений с неограниченными операторами в банаховых пространствах и доказывается однозначная их разрешимость.

Этот метод применим для более частных классов уравнений и в том случае, когда условие (9) не выполнено.

МЕТОД ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Л. СТУПЯЛИС

Пусть конечная область Ω изменения $x=(x_1, \ldots, x_n)$ заключает в себе область $\overline{\Omega}_1$; $\Omega_2=\Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Gamma)$, где Γ — разделяющая области Ω_1 и Ω_2 $n-1$-мерная поверхность. Задачи

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^{(1)}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+a_i^{(1)}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+a^{(1)}(x)u=f_1^{(1)}(x, t), \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^{(2)}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+a_i^{(2)}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+a^{(2)}(x)u=f_2^{(2)}(x, t), \tag{2}$$

$$u|_S=0, \quad [u]|_\Gamma=0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial N}\right]\Big|_\Gamma=0, \tag{3}$$

$$u|_{t=0}=0 \tag{4}$$

и

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^{(1)}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+a^{(1)}(x)u=f_1^{(1)}(x, t), \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^{(2)}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+a_i^{(2)}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+a^{(2)}(x)u=f_3^{(2)}(x, t), \tag{6}$$

$$u|_S=0, \quad [u]|_\Gamma=0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial N}\right]\Big|_\Gamma=0, \tag{7}$$

$$u|_{t=0}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0, \tag{8}$$

коэффициенты уравнений которых не зависят от времени t, решены с помощью преобразования Лапласа по t, если контур S области Ω и граница раздела Γ не меняется с течением времени. Символ $[v]$ означает скачок, который испытывает функция при переходе через Γ.

Предположим, что коэффициенты уравнений и их свободные члены удовлетворяют следующим условиям:

а) коэффициенты $a_{ij}^{(k)}$, $a_i^{(k)}$, $a^{(k)}$ обладают в $\overline{\Omega}_k$ непрерывными производными по x_i до порядка $\left[\frac{n}{2}\right]+2$;

б) как всегда, считаем, что $a_{ij}^{(k)}=a_{ji}^{(k)}$ и

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(k)}\xi_i\xi_j \geqslant \alpha\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2, \qquad \alpha=\mathrm{const}>0;$$

в) свободные члены $f_s^{(k)}(x, t)$ имеют непрерывные производные

$$\frac{\partial^{l_0+l}f_s^{(k)}}{\partial t^{l_0}\partial x_1^{l_1}\cdots\partial x_n^{l_n}}, \quad 0\leqslant l_0+l\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]+4, \quad 0\leqslant l\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]+2,$$

в $\overline{\Omega}_k$ для $t\geqslant 0$, причем

$$\frac{\partial^{l_0}f_s^{(k)}}{\partial t^{l_0}}\Big|_{t=0}=0, \qquad l_0=0, 1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]+3;$$

г) при всех $x\in\overline{\Omega}_k$ и $t\geqslant 0$ выполнены неравенства

$$\left|\frac{\partial^{l_0+l}f_s^{(k)}}{\partial t^{l_0}\partial x_1^{l_1}\cdots\partial x_n^{l_n}}\right|<Ce^{\lambda_0 t},$$

$$0\leqslant l_0+l\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]+4, \quad 0\leqslant l\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]+2,$$

где C и $\lambda_0\geqslant 0$ какие-нибудь постоянные.

Пусть $z_n = \omega(z_1, \ldots, z_{n-1})$ — функции, дающие уравнения контура S и границы раздела Γ в местных координатах. Предположим, что они непрерывно дифференцируемы по z_i до порядка $\left[\frac{n}{2}\right]+4$.

Кроме того, предположим, что задача

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^{(1)}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+a_i^{(1)}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+a^{(1)}(x)u=0, \quad x\in\Omega_1, \tag{9}$$

$$u|_\Gamma=0 \tag{10}$$

не имеет ненулевых решений.

Доказывается следующая теорема.

Теорема. При перечисленных выше условиях существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $u(x,t)$ в областях $\overline{\Omega}_k$, $k=1,2$, для $t\geqslant 0$, являющаяся классическим решением задачи (1) — (4), и она может быть получена с помощью преобразования Лапласа по переменной t.

Аналогичная теорема имеет место и для задачи (5)—(8).

О ГЕОМЕТРИИ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

В. И. БЛИЗНИКАС

Систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d^{p+1}x^i}{dt^{p+1}}=\overset{(p)}{H^i}\left(t, x^k, \frac{dx^k}{dt}, \ldots, \frac{d^p x^k}{dt^p}\right),$$

заданную на дифференцируемом многообразии V_n, можно рассматривать как некоторую поверхность в пространстве линейных элементов высшего порядка $L_n^{(p)}$. Так как в пространстве $L_n^{(p)}$ действуют две псевдогруппы (нормальная расслоенная псевдогруппа $G^{(p)}$ p-раз продолженной псевдогруппы аналитических преобразований локальных координат дифференцируемого многообразия V_n и нормальная расслоенная псевдогруппа $\Gamma^{(p)}$ p-раз продолженной одномерной псевдогруппы преобразований параметра t), то геометрия системы дифференциальных уравнений эквивалентна геометрии пространства $L_n^{(p)}$ с заданным дифференциально-геометрическим объектом $\overset{(p)}{H^i}$, причем под геометрией пространства $L_n^{(p)}$ с дифференциально-геометрическим объектом $\overset{(p)}{H^i}$ понимается совокупность инвариантов и инвариантных операций, присоединенных к $\overset{(p)}{H^i}$ и инвариантных относительно псевдогруппы $\Gamma^{(p)}\times G^{(p)}$. Оказывается, что подгруппой группы $\Gamma^{(p)}$ являются группа аффинных преобразований прямой и группа проективных преобразований прямой (а также продолжения этих групп). Таким образом, получаются различные геометрии, присоединенные к системе дифференциальных уравнений.

Найдена структура дифференциально-геометрических объектов, при помощи которых можно построить инфинитезимальные связности и аффинные связности. Аналогичные вопросы рассмотрены и для систем

$$\frac{\partial^{p+1}x^i}{\partial u^{\alpha_1}\ldots\partial u^{\alpha_{p+1}}}=\overset{(p)}{\mathfrak{L}}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+1}}\left(u^\beta, x^k, \frac{\partial u^k}{\partial u^{\beta_1}}, \ldots, \frac{\partial^p u^k}{\partial u^{\beta_1}\ldots\partial u^{\beta_p}}\right).$$

Только в этом случае найдены объекты различных связностей при различных значениях p ($p=2$, 3, 4). Исследования ведутся методом Г. Ф. Лаптева, и применяется общая теория связностей пространства опорных элементов, которая разработана в работах автора. Найдены тензоры, характеризующие специальные системы дифференциальных уравнений.

О ПУЧКЕ ЛИНЕЙНЫХ КАСАТЕЛЬНЫХ КОМПЛЕКСОВ

К. И. ГРИНЦЕВИЧЮС

В заметке [1] было показано, что дифференциальная окрестность второго порядка комплекса прямых трехмерного проективного пространства выделяет из всех касательных линейных комплексов один инвариантный комплекс M. Если комплекс прямых задается линейными дифференциальными уравнениями:

$$\omega_1^4+\omega_2^3=0,$$
$$\omega_3^4-\omega_2^1=h_{3333}\,\omega_1^3+2h_{3334}\,\omega_1^4+(h-h_{3344})\,\omega_2^4,$$
$$\omega_2^2-\omega_1^1-\omega_3^3+\omega_4^4=2h_{3334}\,\omega_1^3+2\,(h+2h_{3344})\,\omega_1^4-2h_{3444}\,\omega_2^4,$$
$$\omega_4^3-\omega_1^2=(h-h_{3344})\,\omega_1^3-2h_{3444}\,\omega_1^4+h_{4444}\,\omega_2^4$$

и соответствующими внешними квадратичными, то линейный касательный комплекс M определяется уравнением

$$p^{13}+p^{42}-hp^{34}=0.$$

Оказывается, что дифференциальная окрестность второго порядка комплекса прямых позволяет пучок линейных касательных комплексов отобразить на интервал $(-\infty,+\infty)$ чисел, причем это отображение не нарушается при проективных преобразованиях. Действительно, выражение

$$H=h+I\sqrt[3]{\Delta},$$

где I — любой инвариант или постоянное число из интервала $(-\infty,\ +\infty)$, а

$$\Delta=\begin{vmatrix} h_{3333} & h_{3334} & h_{3344} \\ h_{3334} & h_{3344} & h_{3444} \\ h_{3344} & h_{3444} & h_{4444} \end{vmatrix}$$

(полагаем, что $\Delta\neq 0$, т. е. четверка инфлекционных центров на луче не является гармонической), удовлетворяет такому же дифференциальному уравнению, как и h в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Гринцевичюс, Линейный комплекс, присоединенный к дифференциальной окрестности второго порядка луча комплекса, Усп. матем. наук, 1958, т. 13, вып. 2(80), 175—180.

О ГОМОТОПИЧЕСКОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ НЕОДНОСВЯЗНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

А. МАТУЗЯВИЧУС

Рассматривается отображение $f\colon M_1^{4k+2}\to M_2^{4k+2}$ многообразий со свободной абелевой фундаментальной группой, имеющее степень $+1$ и являющиеся гомотопическими эквивалентностями в размерностях $<2k+1$. Основной вопрос — изучение класса Понтрягина—Хирцебруха $L_k\,(M_1^{4k+2})$ как функции от $L_k\,(M_2^{4k+2})$ и скалярного произведения на π_1-модуле $N=\operatorname{Ker} f\,(\pi_{2k+1})$, порожденного индексом пересечения на универсальной накрывающей $\hat{M}_1$.

СУЩЕСТВОВАНИЕ ИНВАРИАНТНЫХ ФИНСЛЕРОВЫХ МЕТРИК В НЕКОТОРЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А. ИОНУШАУСКАС

В докладе рассматриваются однородные пространства, линейная группа изотропии которых является тензорным представлением группы $SL\,(n, R)$, а также однородные пространства, линейная группа изотропии которых есть прямое произведение $\prod_{\alpha=1}^{k}\mathfrak{G}_\alpha$

нескольких линейных групп $\mathfrak{G}_\alpha$, где $\mathfrak{G}_\alpha$ — некоторое тензорное представление группы $SL(n_\alpha, R)$ (n_α — натуральное число, $\alpha=1,\ldots,k$) или какой-то ее подгруппы. В большинстве случаев в таких однородных пространствах инвариантные финслеровы метрики существуют. Так, в частности, если линейная группа изотропии имеет вид

$$dx_{i_1 i_2 \ldots i_{2m}} = \omega^j_{i_1} x_{j i_2 \ldots i_{2m}} + \omega^j_{i_2} x_{i_1 j \ldots i_{2m}} + \cdots + \omega^j_{i_{2m}} x_{i_1 i_2 \ldots j}, \tag{1}$$

где

$$D\omega^j_i = [\omega^l_i \omega^j_l], \quad \omega^i_i = 0 \quad (i, j, l, i_1, \ldots, i_{2m} = 1, \ldots, n;\ m \geqslant 1),$$

то в качестве уравнения тангенциально невырожденной гиперповерхности, инвариантной относительно группы (1), можно взять следующее:

$$\det(x_{I, K}) = \mathrm{const}\ (\neq 0),$$

где $I=(i_1, i_2, \ldots, i_m)$, $K=(i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_{2m})$, т. е. I, K пробегают n^m значений.

Результаты для случаев, когда линейная группа изотропии есть прямое произведение, получаются как непосредственными исследованиями, так и с помощью результатов работы [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ионушаускас, Существование инвариантных финслеровых метрик в однородных пространствах с линейной группой изотропии тензорного типа, Лит. мат. сб., VI, № 1 (1966).

О СВЯЗНОСТЯХ В ПРОСТРАНСТВАХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ОПОРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Ю. ШИНКУНАС

Рассматривается пространство, локальные координаты которого определяются как первые интегралы вполне интегрируемой системы дифференциальных уравнений:

$$\omega^i = 0,$$
$$\Theta_i \equiv dv_i - v_k \omega^k_i = 0,$$
$$\Theta_{ij} \equiv dv_{ij} - v_{ik}\omega^k_j - v_{kj}\omega^k_i - v_k \omega^k_{ij} = 0$$
$$(i, j, k = 1, 2, \ldots, n),$$

где ω^i, ω^j_i, ω^k_{ij} — пфаффовые формы продолженной группы аналитических преобразований пространства X_n и $v_{[ij]}=0$. Это пространство будем называть пространством опорных сверхвекторов второго порядка и обозначим $X^{(2)}_n$. Структурные уравнения пространства $X^{(2)}_n$ имеют вид:

$$D\omega^i = [\omega^k, \omega^i_k],$$
$$D\Theta_i = [\omega^k_i, \Theta_k] + [\varphi_{il}, \omega^l],$$
$$D\Theta_{ij} = [\omega^k_i \Theta_{kj}] + [\omega^k_j, \Theta_{ik}] + [\psi_{ijk}, \omega^k]$$
$$(\varphi_{il} = v_k \omega^k_{il},\ \psi_{ijk} = v_{il}\omega^l_{jk} + v_{lj}\omega^l_{ik} + v_l \omega^l_{ijk}).$$

В пространстве $X^{(2)}_n$ рассматриваются линейные дифференциально-геометрические связности, определенные формами

$$\nu_i = \Theta_i + \Gamma_{ik}\omega^k,$$
$$\vartheta_{ij} = \Theta_{ij} + \Pi_{ijk}\omega^k + \Pi^k_{ij}\vartheta_k.$$

Найдена структура объектов Γ_{ik}, Π_{ijk} и Π^k_{ij}. Кроме того, рассмотрены и аналоги аффинных связностей, т. е. линейных связностей, определенных формами:

$$\vartheta^j_i = \omega^j_i + A^j_{ik}\omega^k + A^{jk}_i\Theta_k + A^{jkl}_i\Theta_{kl},$$
$$\vartheta^j_{ik} = \omega^j_{ik} + B^j_{ikl}\omega^l + B^{jl}_{ik}\Theta_l + B^{jlp}_{ik}\Theta_{lp}.$$

Найдена структура объектов A^j_{ik}, A^{jk}_i, A^{jkl}_i, B^j_{ikl}, B^{jl}_{ik} и B^{jlp}_{ik}, получены вычислительные формулы для соответствующих тензоров кривизны и найдены аналоги тождества Риччи и Бианки.

TYRIMŲ APIE NEEUKLIDINES GEOMETRIJAS APIBENDRINIMAI

Z. ŽEMAITIS

Referate pateikiami papildymai autoriaus darbui („V.V. Universiteto Darbai", fiz.-mat. mokslų sekcija, VII t., 1957 m.") apie sujungtinių kampų savybes, bendras hiperbolinei, elipsinei ir parabolinei geometrijoms, išplečiančias absoliutinės geometrijos sritį. Be to, iškeliami kai kurie klausimai apie skritulyje paimtų figūrų kampų ir linijų kitimo pobūdį, kai skritulio spindulys kinta tolygiai.

ОБ ОДНОМ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОМ СЛОЕ КОРРЕЛЯЦИИ

Г. БЕЛЬТЕНЕ

Корреляция (a^{ij}) $(i, j, k = 1, 2, 3, 4)$ в трехмерном проективном пространстве плоскости $a_i x^i = 0$ ставит в соответствие точку $x^i = a^{ij} a_j$ $(\det \| a^{ij} \| \neq 0)$.

К этой корреляции присоединяем такой однопараметрический слой, один элемент которого определяется фиксированным λ и однородными a^{ij}, где

$$\lambda = \frac{(a^{ij} u_{ij})^4}{\det \| a^{ij} \| \det \| u_{ij} \|}, \tag{1}$$

а u_{ij} — коэффициенты корреляции, которая точке (y^i) ставит в соответствие плоскость $(u_{ij} y^j) y^i = 0$ $(\det \| u_{ij} \| \neq 0)$.

Уравнение (1), когда значение λ фиксировано, в 15-параметрическом пространстве корреляций (u_{ij}) выделяет гиперповерхность 4-го порядка, присоединенную к корреляции (a^{ij}). Таким образом, фиксированная корреляция (a^{ij}) дает возможность все 15-параметрическое пространство корреляций расслоить на однопараметрическое семейство гиперповерхностей 4-го порядка так, что каждой гиперповерхности соответствует одно значение λ.

Коэффициенты a^{ij} удовлетворяют дифференциальным уравнениям инвариантности:

$$\omega^{ij} \equiv da^{ij} + a^{ik} \omega_k^j + a^{kj} \omega_k^i + a^{ii} \omega = 0,$$
$$D\omega = 0, \tag{2}$$

где ω_i^j — линейные дифференциальные формы инфинитезимального перемещения точки в проективном пространстве.

Дифференцируя уравнение (1), получаем:

$$d\lambda = 0. \tag{3}$$

Система уравнений (2) вполне интегрируема. Система уравнений (2) и (3) тоже вполне интегрируема и первые интегралы этой системы определяют корреляцию $(a$ и элемент присоединенного к ней слоя.

О ГЕОМЕТРИИ СЕКУЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ НЕКОТОРЫХ РАССЛОЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ

И. В. БЛИЗНИКЕНЕ

Рассматривается многообразие $\mathfrak{M}_1^{(3)}$ (множество прямых трехмерного проективного пространства P_3) с заданным невырожденным симметрическим относительным тензорным полем

$$du_{pq} - u_{rq} \omega_p^r - u_{pr} \omega_q^r - \omega u_{pq} = u_{pq\alpha}^r \omega_r^\alpha,$$
$$(i, j, k, = 1, 2, 3, 4; \quad p, r, s = 1, 2; \quad \alpha, \beta, \gamma = 3, 4), \tag{1}$$

где $D\omega = 0$, $\det \| u_{pq} \| > 0$, ω_j^i — пфаффовые формы инфинитезимального перемещения подвижного репера пространства P_3, а ω_p^α — главные формы рассматриваемого многообразия. Тензор u_{pq} устанавливает проективное соответствие между точками $t^p A_p$ и $T^p A_p$ прямой $(A_1 A_2)$:

$$u_{pq} t^p T^q = 0. \tag{2}$$

После частичной канонизации репера $\{A_1\}$ и нормировки компонент тензора u_{pq}, система (1) принимает вид:

$$\omega_2^2-\omega_1^1=\lambda_\alpha^p\,\omega_p^\alpha,\quad \omega_1^2+\omega_2^1=\mu_\alpha^p\,\omega_p^\alpha, \tag{3}$$

и ее внешнее дифференцирование дает:

$$[d\lambda_\alpha^p+\lambda_\alpha^q\,\omega_q^p-\lambda_\beta^p\,\omega_\alpha^\beta+\mu_\alpha^p\,(\omega_1^2-\omega_2^1)+\delta_2^p\,\omega_\alpha^2-\delta_1^p\,\omega_\alpha^1,\ \omega_p^\alpha]=0,$$

$$[d\mu_\alpha^p+\mu_\alpha^q\,\omega_q^p-\mu_\beta^p\,\omega_\alpha^\beta-\lambda_\alpha^p\,(\omega_1^2-\omega_2^1)+\delta_1^p\,\omega_\alpha^2+\delta_2^p\,\omega_\alpha^1,\ \omega_p^\alpha]=0. \tag{4}$$

Система дифференциальных уравнений (3) и (4) определяет четырехмерную поверхность рассматриваемого пространства (это пространство является частным случаем пространства тензорных опорных элементов), которую будем называть секущей поверхностью.

Найдены следующие подобъекты фундаментального объекта первого порядка $(\lambda_\alpha^p,\ \mu_\alpha^p)$ секущей поверхности:

1. Объект

$$h_\alpha^p=\begin{cases}\dfrac{-\lambda_\alpha^1+\mu_\alpha^2}{2}, & p=1,\\[2mm] \dfrac{\lambda_\alpha^2+\mu_\alpha^1}{2}, & p=2,\end{cases}$$

определяющий инвариантную прямую, уравнения которой имеют вид $x^p=h_\alpha^p x^\alpha$.

2. Относительный инвариант

$$I=-\begin{vmatrix}\lambda_3^1 & \lambda_4^1\\ \lambda_3^2 & \lambda_4^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda_3^1 & \mu_4^2\\ -\lambda_3^2 & \mu_4^1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mu_3^1 & \lambda_4^2\\ \mu_3^2 & -\lambda_4^1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\mu_3^1 & \mu_4^2\\ \mu_3^2 & \mu_4^2\end{vmatrix}.$$

3. Объект $(h_\alpha^p,\ a_{\alpha\beta})$, где

$$a_{\alpha\beta}=\sigma_{pq}\,\lambda_{(\alpha}^p\,\mu_{\beta)}^q,\quad \sigma_{pq}=p-q,$$

определяющий квадрику, проходящую через двойные точки соответствия (2).

4. Относительный тензор $\mathfrak{A}_{\alpha\beta}$:

$$\mathfrak{A}_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}-\delta_{pq}\,h_\alpha^p\,h_\beta^q,$$

где δ_{pq} — символ Кронекера, определяющий двойные точки пересечения квадрики с инвариантной прямой.

5. Относительный тензор

$$g_{pqr}^\alpha\ (g_{111}^4=-g_{122}^4,\ g_{111}^3=-g_{122}^3,\ g_{112}^4=-g_{222}^4,\ g_{112}^3=-g_{222}^3)\ g_{111}^3=\frac{\mu_4^1+\lambda_4^1}{2},$$

$$g_{122}^4=\frac{\mu_3^2+\lambda_3^1}{2},\ g_{222}^4=\frac{\lambda_3^2-\mu_3^1}{2},\ g_{112}^3=\frac{\lambda_4^2-\mu_4^1}{2},$$

который устанавливает инвариантное соответствие между точками t^pA_p прямой (A_1A_2) и плоскостями $a_\alpha x^\alpha=0$, проходящими через эту прямую.

Даются геометрические интерпретации указанных подобъектов, т. е. геометрические конструкции инвариантной квадрики инвариантной прямой и т. д.

К ВОПРОСУ СУЩЕСТВОВАНИЯ РОМБОЭДРИЧЕСКИХ И РОМБИЧЕСКИХ СЕТЕЙ В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. ПАДЕРВИНСКАС

Если в трехмерном евклидовом пространстве дано однопараметрическое семейство поверхностей

$$r=r\,(u,\ v,\ w) \tag{1}$$

(w — параметр семейства) и вектор r голоморфный в окрестности точки $(u_0,\ v_0,\ w_0)$, то семейство поверхностей (1) всегда можно включить (в окрестности точки $(u_0,\ v_0,\ w_0)$) в ромбоэдрическую сеть, т. е. всегда можно найти преобразование

$$u'=u'\,(u,\ v,\ w),$$

$$v'=v'\,(u,\ v,\ w),$$

$$w'=w, \tag{2}$$

после которого выполняются соотношения

$$(r_{u'})^2=(r_{v'})^2=(r_{w'})^2.$$

Произвол преобразования (2) — две функции двух аргументов.

При тех же условиях семейство поверхностей (1) всегда можно включить (в окрестности точки (u_0, v_0, w_0)) в ромбическую сеть, т. е. всегда можно найти преобразование (2), после которого выполняются соотношения

$$(r_{u'})^2:(r_{v'})^2:(r_{w'})^2=A(v, w):B(u, w):C(u, v).$$

Произвол преобразования (2) в этом случае — шесть функций двух аргументов.

К ВОПРОСУ ГЕОМЕТРИИ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ БИЛИНЕЙНО-МЕТРИЧЕСКОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Л. СТИКЛАКИТЕ

Проективное пространство P_n с заданной корреляцией называется билинейно-метрическим проективным пространством π_n. Дифференциальные уравнения тензора $H_{\alpha\beta}$ $(H_{\alpha\beta}\neq H_{\beta\alpha})$, определяющего корреляцию в подвижном репере, имеет вид:

$$dH_{\alpha\beta}-H_{\gamma\beta}\,\omega_\alpha^\gamma-H_{\alpha\gamma}\,\omega_\beta^\gamma=0$$

$$\begin{pmatrix} \alpha, \beta, \gamma, \ldots=0, 1, \ldots, n; \\ I, J, K, \ldots=1, \quad \ldots, n; \\ i, j, k, \ldots=1, \quad \ldots, n-1 \end{pmatrix},$$

где ω_α^β — пфаффовые формы, связанные структурными уравнениями проективного пространства.

Гиперповерхность в пространстве π_n определяется уравнениями:

$$\omega^I=\Lambda_k^I\,\Theta^k,$$

где

$$D\Theta^k=[\Theta^p, \Theta_p^k],$$

$$D\Theta_p^k=[\Theta_p^q, \Theta_q^k]+[\Theta^q, \Theta_{pq}^k],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Пространственная корреляция индуцирует корреляцию на гиперповерхности, определяющий тензор которой будет называться метрическим тензором гиперповерхности. Он имеет вид:

$$\hat{H}_{ij}=\hat{H}_{IJ}\Lambda_i^I\Lambda_j^J, \quad \hat{H}_{IJ}=H_{IJ}-\frac{H_{I0}H_{0J}}{H_{00}}.$$

Касательная гиперплоскость точки A_0 гиперповерхности определяется точками A_0, B_k, где $B_k=\Lambda_k^I\,\Theta^k$.

Гиперповерхность π_{n-1} называется нормализованной, если каждой точке A_0 отнесены:

1) прямая π_1, проходящая через A_0, но не имеющая с касательной гиперплоскостью других общих точек (нормаль первого рода);

2) многообразие π_{n-2}, расположенное в касательной гиперплоскости, но не проходящее через точку A_0 (нормаль второго рода).

В нашем случае можно указать три различные нормализации. Найдены дифференциально-геометрические объекты, при помощи которых определяется та или иная нормализация, а также деривационные уравнения и условие совместности этих уравнений.

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ

М. САПАГОВАС

Метод конечных разностей применяется для решения некоторых нелинейных задач теории упругости и пластичности, описываемых квазилинейными эллиптическими уравнениями с дивергентной главной частью. Сюда относится, в частности, задача упруго-пластического кручения сплошного стержня

$$L^1(u) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left[f(T^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[f(T^2)\frac{\partial u}{\partial y}\right] = -2G\omega_0 = \text{const}, \tag{1}$$

$$u|_\Gamma = 0,$$

где

$$T^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \tag{2}$$

Г — граница области, а также задача о ползучести закрепленной по краю пластинки

$$L^2(u) \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[g(H^2)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[g(H^2)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right] +$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[g(H^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right] = p(x, y), \tag{3}$$

$$u|_\Gamma = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = 0, \tag{4}$$

где

$$H^2 = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2.$$

Уравнения (1), (3) заменяются следующими простейшими разностными соотношениями:

$$\Lambda_h^1(u) \equiv (f u_{\bar{x}})_x + (f u_{\bar{y}})_y = \text{const}, \tag{1a}$$

$$\Lambda_h^2(u) \equiv \left[g\left(u_{\bar{x}x} + \frac{1}{2}u_{\bar{y}y}\right)\right]_{\bar{x}x} + \left[g\left(u_{\bar{y}y} + \frac{1}{2}u_{\bar{x}x}\right)\right]_{\bar{y}y} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[(g u_{x\bar{y}})_{\bar{x}y} + (g u_{\bar{x}y})_{x\bar{y}}\right] = p, \tag{3a}$$

где

$$f = f\left((u_{\bar{x}})^2 + (u_{\bar{y}})^2\right),$$

$$g = g\left((u_{\bar{x}x})^2 + (u_{\bar{y}y})^2 + u_{\bar{x}x}u_{\bar{y}y} + \frac{1}{2}\left[(u_{x\bar{y}})^2 + (u_{\bar{x}y})^2\right]\right),$$

$u_{\bar{x}}$ (соотв. u_x) — левая (соотв. правая) разность по направлению оси x; $u_{\bar{y}}$ (соотв. u_y) — аналогичные разности по направлению оси y.

Предполагается, что функция $f(T^2)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$0 < m \leqslant f \leqslant M < \infty,$$

$$0 < c \leqslant f + 2f'T^2 \leqslant C < \infty.$$

Такие же ограничения накладываются на функцию $g(H^2)$. При этих ограничениях доказана однозначная разрешимость получаемых разностных задач, а также сходимость разностных схем при добавочном предположении о гладкости решения исходной дифференциальной задачи.

Для задачи (1)—(2) построена также более точная разностная схема.

Решение системы нелинейных разностных уравнений находится итерационным методом, на каждом шаге которого приходится решать линейную систему уравнений, соответствующую уравнению Пуассона в случае задачи (1)—(2), и бигармоническому уравнению — в случае задачи (3)—(4).

Рассмотренным выше методом на вычислительной машине БЭСМ-2М решена задача (1)—(2) при

$$f(T^3)=\begin{cases} \dfrac{10^{-5}}{8}, & \text{если } T^3\leqslant 4\cdot 10^6,\\[2mm] \dfrac{10^{-3}}{24}\left(1-\dfrac{1940}{T}\right), & \text{если } T^3\geqslant 4\cdot 10^6 \end{cases}$$

в квадратной области $\{-1\leqslant x\leqslant 1,\ -1\leqslant y\leqslant 1\}$.

НАХОЖДЕНИЕ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕМБРАНЫ НА ЭЦВМ

Б. КВЕДАРАС, Д. ЛЕВИНСКАЙТЕ, М. САПАГОВАС, Д. САПАГОВЕНЕ

При решении многих практических задач механики и радиотехники, в частности, при вычислении собственных частот колебания мембраны, приходится сталкиваться с нахождением собственных значений (одного или несколько наименьших) следующей задачи:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\lambda u=0, \tag{1}$$

$$u|_\Gamma=0\ \left(\text{или }\ \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_\Gamma=0\right). \tag{2}$$

Известно, что для решения задачи (1)—(2) может быть применен метод конечных разностей. При этом, задача нахождения собственных частот колебания мембраны сводится к нахождению собственных значений матрицы A:

$$Ax=\lambda_h x, \tag{3}$$

где $\lambda_h^{(k)}\approx\lambda^{(k)}$, $k=1, 2, \ldots, N$, N — порядок матрицы, определяемый числом точек сеточной области. Особенно целесообразно применение метода конечных разностей в случае областей типа **Г, П, Н, Т** и т. п., т. е. для областей, составленных из нескольких прямоугольников.

Несмотря на свою простоту, задача (3) до сих пор остается проблематичной, когда речь идет о практической ее реализации. Известные итерационные методы позволяют достаточно быстро и точно находить крайние собственные значения матрицы, но при вычислении остальных собственных значений могут давать слишком большую погрешность, либо требовать на каждом шаге итерационного процесса обращения матрицы порядка N. Методы, основанные на ортогонализации, требуют хранения в памяти машины всей матрицы A, что явно не целесообразно при больших N.

Для решения задачи (3) предлагается следующий метод. Приближенное значение $\lambda_h^{(k)}$ ищется как корень характеристического многочлена

$$P_N(\lambda_h)=\det|A-\lambda_h E|=0 \tag{5}$$

одним из методов, пригодных для решения алгебраических уравнений, напр., методом секущих, отправляясь от некоторого приближенного (достаточно грубого) значения искомого корня $\lambda_h^{(k)}$. Вычисление определителя N-го порядка $P_N(x_0)$ при некотором фиксированном значении x_0 проводится по методу квадратного корня, приспособленного для вычисления определителя (с учетом структуры матрицы A), по формулам:

$$P_N(x_0)=\prod_{i=1}^{N} s_{ii}^2,$$

где

$$s_{11}=\sqrt{a_{11}-x_0},\quad s_{1j}=\frac{a_{1j}}{s_{11}},$$

$$s_{ii}=\sqrt{a_{ii}-x_0-\sum_{l=}^{i-1} s_l^2}\quad (i>1),\quad s_{ij}=\frac{a_{ij}-\sum\limits_{l=1}^{i-1} s_{li}s_{lj}}{s_{ii}}\quad (j>i).$$

Предлагаемый метод требует порядка $O(N^2)$ арифметических операций и хранения в памяти машины cN промежуточных результатов (c — число, близкое к $\frac{1}{2}$, зависящее от формы области).

В Институте физики и математики АН Лит. ССР на машине БЭСМ-2М проводились многочисленные эксперименты по нахождению собственных значений задачи (1) по описанному выше методу для П-образных областей. Для нахождения одного собственного значения с точностью 0,5—1% ($N \approx 1000$) потребовалось около 20 мин. машинного времени. При этом начальное приближение выбиралось из решения задачи при грубом шаге сетки (N-порядка нескольких десятков).

УСТРАНЕНИЕ СТРУКТУРНЫХ ПРАВИЛ ИЗ ИСЧИСЛЕНИЙ ГЕНЦЕНОВСКОГО ТИПА

Р. А. ПЛЮШКЕВИЧЮС

В этом сообщении рассматривается применение метода мажорирования [1] для доказательства допустимости структурного правила сокращения повторений в секвенциальных вариантах исчисления предикатов, рассматриваемых в книге [2], а именно: в многосукцедентном классическом исчислении K, в многосукцедентном и односукцедентном конструктивных исчислениях $I1$ и I, в многосукцедентном и односукцедентном минимальных исчислениях $M1$ и M, в многосукцедентном и односукцедентном абсолютных исчислениях A^*1 и A^* *.

Определим отношения «Пара формульных цепей Γ, Θ классически мажорирует формулу A» (символическая запись $(\Gamma, \Theta) \underset{k}{\succ} A$) и «Формула A классически мажорирует пару формульных цепей Γ, Θ» (символическая запись $A \underset{k}{\succ} (\Gamma, \Theta)$).

1а. $(\Gamma' A \Gamma'', \Theta) \underset{k}{\succ} A$; 1б. $A \underset{k}{\succ} (\Gamma, \Theta' A \Theta'')$.

2. Если $M \underset{k}{\succ} (\Gamma, \Theta)$, то $(\Gamma, \Theta) \underset{k}{\succ} (M \supset N)$.

3. Если $(\Gamma, \Theta) \underset{k}{\succ} N$, то $(\Gamma, \Theta) \underset{k}{\succ} (M \supset N)$.

4. Если $(\Gamma, \Theta) \underset{k}{\succ} M$, $(\Gamma, \Theta) \underset{k}{\succ} N$, то $(\Gamma, \Theta) \underset{k}{\succ} (M \& N)$.

5. Если $(\Gamma, \Theta) \underset{k}{\succ} M$, то $(\Gamma, \Theta) \underset{k}{\succ} (M \vee N)$.

6. Если $(\Gamma, \Theta) \underset{k}{\succ} N$, то $(\Gamma, \Theta) \underset{k}{\succ} (M \vee N)$.

7. Если $M \underset{k}{\succ} (\Gamma, \Theta)$, то $(\Gamma, \Theta) \underset{k}{\succ} \neg M$.

8. Если $(\Gamma, \Theta) \underset{k}{\succ} M$, то $(\Gamma, \Theta) \underset{k}{\succ} \exists x [M]_x^b$.

9. Если $(\Gamma, \Theta) \underset{k}{\succ} M$, $N \underset{k}{\succ} (\Gamma, \Theta)$, то $(M \supset N) \underset{k}{\succ} (\Gamma, \Theta)$.

10. Если $M \underset{k}{\succ} (\Gamma, \Theta)$, то $(M \& N) \underset{k}{\succ} (\Gamma, \Theta)$.

11. Если $N \underset{k}{\succ} (\Gamma, \Theta)$, то $(M \& N) \underset{k}{\succ} (\Gamma, \Theta)$.

12. Если $M \underset{k}{\succ} (\Gamma, \Theta)$, $N \underset{k}{\succ} (\Gamma, \Theta)$, то $(M \vee N) \underset{k}{\succ} (\Gamma, \Theta)$.

13. Если $(\Gamma, \Theta) \underset{k}{\succ} M$, то $\neg M \underset{k}{\succ} (\Gamma, \Theta)$.

14. Если $M \underset{k}{\succ} (\Gamma, \Theta)$, то $\forall x [M]_x^b$.

Пусть Λ обозначает пустое слово. Определение отношений «Пара формульных цепей Γ, Λ просто мажорирует формулу A (символическая запись $(\Gamma, \Lambda) \succ A$) и формула A просто мажорирует пару формульных цепей Λ, Θ (символическая запись $A \succ (\Lambda, \Theta)$)

* Будем разделять переменные на свободные и связанные.

получается из предыдущего определения, если 1) пропустить пункты 2, 7, 9, 13 и 14; 2) в пунктах 1а, 3, 4, 5, 6, 8 слово Θ заменить на Λ, в пунктах 1б, 10, 11, 12 слово Γ заменить на Λ; во всех пунктах знак $\underset{k}{\succ}$ заменить на $\succ$.

Геометрический смысл отношений объясняет следующая.

Лемма. *Если* $(\Gamma, \Theta)\underset{k}{\succ}A\big((\Gamma, \Lambda)\succ A\big)$ *или* $A\underset{k}{\succ}(\Gamma, \Theta)\ \big(A\succ(\Lambda, \Theta)\big)$, то $\Gamma\to\Theta A$ $(\Gamma\to A)$ *выводима в исчислении* K (*в исчислениях* $I1$, $M1$, A^*1, I, M, A^*) *или* $\Gamma A\to\Theta$ $(A\to\Theta)$ *выводима в исчислении* K (*в исчислениях* $I1$, $M1$, A^*1).

Следующая теорема устанавливает допустимость некоторого обобщенного (а тем самым и обычного) структурного правила сокращения повторений.

Теорема 1. *Если в исчислении* K (*в исчислениях* $I1$, $M1$, A^*1, I, M, A^*) *дан вывод секвенции* $\Gamma_1 A\,\Gamma_2\to\Theta$ *и* $(\Gamma_1\Gamma_2, \Theta)\underset{k}{\succ}A\big((\Gamma_1\Gamma_2, \Lambda)\succ A\big)$, *то можно построить вывод секвенции* $\Gamma_1\Gamma_2\to\Theta$ *в исчислении* K (*в исчислениях* $I1$, $M1$, A^*1, I, M, A^*).

2. *Если в исчислении* K (*в исчислениях* $I1$, $M1$, A^*1) *дан вывод секвенции* $\Gamma\to\Theta_1 A\,\Theta_2$ *и* $A\underset{k}{\succ}(\Gamma, \Theta_1\ \Theta_2)\ \big(A\succ(\Lambda, \Theta_1\Theta_2)\big)$, *то можно построить вывод секвенции* $\Gamma\to\Theta_1\Theta_2$ *в исчислении* K (*в исчислениях* $I1$, $M1$, A^*1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. А. Плюшкевичюс, Об одном варианте конструктивного исчисления предикатов без структурных правил вывода, ДАН, 161, № 2.
2. H. Curry, Foundations of mathematical logic, 1963.

К ВОПРОСУ О НЕКОТОРЫХ СЕКВЕНЦИАЛЬНЫХ КОНСТРУКТИВНЫХ ИСЧИСЛЕНИЯХ

Р. А. ПЛЮШКЕВИЧЮС

1. Рассматривается вариант конструктивного исчисления предикатов, обозначенный посредством I_0^M, без структурных правил вывода, более приспособленный для поиска вывода, чем исчисление I_0 [1]. Для описания исчисления I_0^M будем пользоваться обозначениями статьи [1], кроме того, $\mathfrak{D}_1$ будет обозначать формулу $\exists x\mathfrak{A}$ или $\forall x\,\mathfrak{M}$ где $\mathfrak{M}$ — произвольная формула, не начинающаяся знаком $\neg$; $\mathfrak{C}_1$ — или элементарная формула, или отрицание элементарной формулы, или же формула $\forall x\neg\mathfrak{A}$. Исчисление I_0^M получается из исчисления I_0 путем замены правил 2б, 8а и 8б, соответственно, новыми правилами:

2.1. $\dfrac{\Gamma_1\mathfrak{A}_1(\mathfrak{A}_2\supset\mathfrak{B})\,\Gamma_2\to\mathfrak{A};\ \ \Gamma_1\mathfrak{B}\,\Gamma_2\to\Theta}{\Gamma_1\big((\mathfrak{A}_1\supset\mathfrak{A}_2)\supset\mathfrak{B}\big)\,\Gamma_2\to\Theta}$ 2.2. $\dfrac{\Gamma_1\big(\mathfrak{A}_1\supset(\mathfrak{A}_2\supset\mathfrak{B})\big)\,\Gamma_2\to\Theta}{\Gamma_1\big((\mathfrak{A}_1\,\&\,\mathfrak{A}_2)\supset\mathfrak{B}\big)\,\Gamma_2\to\Theta}$

2.3. $\dfrac{\Gamma_1(\mathfrak{A}_1\supset\mathfrak{B})(\mathfrak{A}_2\supset\mathfrak{B})\,\Gamma_2\to\Theta}{\Gamma_1\big((\mathfrak{A}_1\vee\mathfrak{A}_2)\supset\mathfrak{B}\big)\,\Gamma_2\to\Theta}$ 2.4. $\dfrac{\Gamma_1(\mathfrak{D}\supset\mathfrak{B})\,\Gamma_2\to\mathfrak{D}_1;\ \ \Gamma_1\mathfrak{B}\,\Gamma_2\to\Theta}{\Gamma_1(\mathfrak{D}_1\subset\mathfrak{B})\,\Gamma_2\to\Theta}$

8.1. $\dfrac{\Gamma_1\Gamma_2\to\mathfrak{C}_1}{\Gamma_1\neg\,\mathfrak{C}_1\Gamma_2\to\Theta}$ 8.2. $\dfrac{\Gamma_1\neg\neg\,\mathfrak{A}\neg\,\mathfrak{B}\,\Gamma_2\to\Theta}{\Gamma_1\neg\,(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\,\Gamma_2\to\Theta}$

8.3. $\dfrac{\Gamma_1(\mathfrak{A}\supset\neg\neg\mathfrak{B})\,\Gamma_2\to\Theta}{\Gamma_1\neg\neg\,(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\,\Gamma_2\to\Theta}$ 8.4. $\dfrac{\Gamma_1(\mathfrak{A}\supset\neg\,\mathfrak{B})\,\Gamma_2\to\Theta}{\Gamma_1\neg\,(\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B})\,\Gamma_2\to\Theta}$

8.5. $\dfrac{\Gamma_1\neg\neg\,\mathfrak{A}\neg\neg\,\mathfrak{B}\,\Gamma_2\to\Theta}{\Gamma_1\neg\neg\,(\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B})\,\Gamma_2\to\Theta}$ 8.6. $\dfrac{\Gamma_1\neg\,\mathfrak{A}\neg\,\mathfrak{B}\,\Gamma_2\to\Theta}{\Gamma_1\neg\,(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})\,\Gamma_2\to\Theta}$

8.7. $\dfrac{\Gamma_1(\neg\,\mathfrak{A}\supset\neg\neg\,\mathfrak{B})\,\Gamma_2\to\Theta}{\Gamma_1\neg\neg\,(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})\,\Gamma_2\to\Theta}$ 8.8. $\dfrac{\Gamma_1\neg\,\mathfrak{D}_1\Gamma_2\to\mathfrak{D}_1}{\Gamma_1\neg\,\mathfrak{D}_1\Gamma_2\to\Theta}$

Теорема. *Исчисления I_0 и I_0^M — равнообъемны.*

Примечание: *Для того, чтобы как можно больше сократить число случаев, когда нужно применять правила* 2.4 *и* 8.8, *можно ввести правила, производящие всевозможную минископизацию кванторов.* Более подробно этот вопрос здесь не рассматривается.

2. Рассматривается вариант конструктивного исчисления высказываний с сильным отрицанием, лучше приспособленный для получения разрешающей процедуры, чем исчисление Н. Н. Воробьева [2]. Как и в [2], сильное отрицание будем обозначать через $\sim$. Рассматриваемое исчисление получается из исчисления I_0^M путем присоединения следующих аксиом:

$$\Gamma_1 {\sim} A\,\Gamma_2 \to {\sim} A; \quad \Gamma_1 {\sim} A\,\Gamma_2 A\,\Gamma_3 \to \Theta; \quad \Gamma_1 A\,\Gamma_2 {\sim} A\,\Gamma_3 \to \Theta$$

и следующих правил вывода:

$$\frac{\Gamma_1 \Gamma_2 \to {\sim}\text{э};\ \Gamma_1 B\,\Gamma_2 \to \Theta}{\Gamma_1 ({\sim}\text{э} \supset B)\,\Gamma_2 \to \Theta}; \qquad \frac{\Gamma_1 \big(A \supset ({\sim} C \supset B)\big)\,\Gamma_2 \to \Theta}{\Gamma_1 \big({\sim}(A \supset C) \supset B\big)\,\Gamma_2 \to \Theta};$$

$$\frac{\Gamma_1 ({\sim} A \supset B)({\sim} C \supset B)\,\Gamma_2 \to \Theta}{\Gamma_1 \big({\sim}(A \,\&\, C) \supset B\big)\,\Gamma_2 \to \Theta}; \qquad \frac{\Gamma_1 \big({\sim} A \supset ({\sim} C \supset B)\big)\,\Gamma_2 \to \Theta}{\Gamma_1 \big({\sim}(A \vee C) \supset B\big)\,\Gamma_2 \to \Theta};$$

$$\frac{\Gamma_1 (A \supset B)\,\Gamma_2 \to \Theta}{\Gamma_1 ({\sim}{\sim} A \supset B)\,\Gamma_2 \to \Theta}; \qquad \frac{\Gamma_1 A {\sim} B\,\Gamma_2 \to \Theta}{\Gamma_1 {\sim}(A \supset B)\,\Gamma_2 \to \Theta};$$

$$\frac{\Gamma \to A;\ \Gamma \to {\sim} B}{\Gamma \to {\sim}(A \supset B)}; \qquad \frac{\Gamma_1 {\sim} A\,\Gamma_2 \to \Theta;\ \Gamma_1 {\sim} B\,\Gamma_2 \to \Theta}{\Gamma_1 {\sim}(A \,\&\, B)\,\Gamma_2 \to \Theta};$$

$$\frac{\Gamma \to ({\sim} A \vee {\sim} B)}{\Gamma \to {\sim}(A \,\&\, B)}; \qquad \frac{\Gamma_1 {\sim} A {\sim} B\,\Gamma_2 \to \Theta}{\Gamma_1 {\sim}(A \vee B)\,\Gamma_2 \to \Theta};$$

$$\frac{\Gamma \to {\sim} A;\ \Gamma \to {\sim} B}{\Gamma \to {\sim}(A \vee B)}; \qquad \frac{\Gamma_1 A\,\Gamma_2 \to \Theta}{\Gamma_1 {\sim}{\sim} A\,\Gamma_2 \to \Theta}.$$

$$\frac{\Gamma \to A}{\Gamma \to {\sim}{\sim} A};$$

3. Рассматривается исчисление, равнообъемное фрагменту исчисления Идельсона [3], включающего, кроме обычных правил конструктивной логики, правило выражения связки $\vee$ через $\exists$ и схему $\neg\neg\text{э} \supset \text{э}$, где э — элементарная формула. Эта схема выражает принцип А. А. Маркова применительно к элементарным формулам. Для доказательства допустимости сечения используется, в частности, идея спецификации правил для равенства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. А. Плюшкевичюс, Об одном варианте конструктивного исчисления предикатов без структурных правил вывода, ДАН СССР, 161, № 2 (1965).
2. Н. Н. Воробьев, Конструктивное исчисление высказываний с сильным отрицанием, Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова, XXII, 195—227 (1964).
3. А. В. Идельсон, Исчисление конструктивной логики с подчиненными переменными, Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова, XXII, 229—345 (1964).

О ФОРМАЛЬНОМ ЯЗЫКЕ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ЦВМ

Г. К. ГРИГАС

При решении многих задач проектирования цифровых вычислительных машин (ЦВМ) и программирования требуется точно описать функции, выполняемые ЦВМ без определения внутренней структуры машины. Следовательно, ЦВМ может быть описана алгоритмом, независимым или мало зависимым от технической реализации ее схемы. Требуется только, чтобы результат алгоритма совпал с результатом работы ЦВМ в определенных моментах времени (например, между выполнением соседних команд).

Предлагается алгоритмический язык для формального описания ЦВМ, обладающий следующими свойствами.

1. Переменные могут быть схемные и вспомогательные. Первые имеют эквиваленты в машине (триггеры, регистры, запоминающие устройства), а вспомогательные являются искусственно введенными, с целью фиксации промежуточных результатов алгоритма.

2. Значениями переменных могут быть числа или двоичные коды.

3. Основные операции определены и над числами, и над кодами. В логических операциях числа кодируются двоичными кодами, операции выполняются покомпонентно. Нуль интерпретируется как «ложь», а единица — как «истина». В арифметических операциях двоичные коды декодируются в числа. Следовательно, в одном и том же выражении могут использоваться и арифметические, и логические операции, напр.:

$$x := (a \times b) \wedge c.$$

4. Имеются средства для определения более сложного кодирования чисел. Напр., кодирование отрицательных чисел в обратном коде задается описанием:

real code $R(x)$;
begin R(**sign**) $:= x(20)$;
if $\neg x(20)$ **then** R(**integer**) $:= x(19:1)$;
if $x(20)$ **then** R(**integer**) $:= 2 \uparrow 19 - x(19:1)$ **end**.

5. Операции определены над разноразрядными кодами. При этом коды «подравниваются» по правой стороне, а к более коротким слева приписываются нули.

6. С целью удобства использования языка в проектировании и эксплуатации ЦВМ, определено графическое представление алгоритма, взаимооднозначно соответствующее линейному.

Приведем пример описания некоторых операций цифрового устройства, работающего над целыми числами. Пусть память обозначена M, счетчик команд C, числа кодируются по вышеопределенному примеру.

103 : $K := M[C]$; коп $:= K(20:15)$; $a := M[K(14:1)]$;
go to коп; **comment** передача управления по коду операции;
01 : $R(H) := R(H) + R(a)$; **go to** 102;
02 : $R(H) := R(H) - R(a)$; **go to** 102;
.
.
.
05 : $H := H \wedge a$; **go to** 102;
06 : **if** $H = 0$ **then begin** $C := K(14:1)$; **go to** 103; **comment** передача, если $H = 0$ **end**;
.
.
.
102 : $C := C + 1$; **go to** 103.

СИСТЕМА СИМВОЛИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ МАШИНЫ БЭСМ-2М

В. БИКЕЛЕНЕ, А. ПЛЮШКЯВИЧЕНЕ

Под системой символического программирования (ССП) для машины БЭСМ-2М понимается язык для записи программ в ССП и программа, переводящая программу, написанную на этом языке, на язык машины.

Программу, написанную на языке ССП, будем называть исходной программой, а программу, полученную после перевода исходной программы в коды машины БЭСМ-2М, — конечной программой.

Язык системы символического программирования предусматривает:

1) запись мнемонических кодов операций команд наряду с действительными;

2) использование символических наименований, называемых меткой, для указания расположения команд и чисел в ячейках машины;

3) адреса трех типов: действительные, символические и относительные. Символические и относительные адреса должны иметь соответствующие им метки;

4) бланк для записи исходной программы со строго разграниченными графами для записи метки, кода операции и адресов (фиксированная форма бланка);

В ССП разрешаются следующие операторы:

а) операторы команд, охватывающие все машинные команды машины БЭСМ-2М и составляющие большую часть операторов исходной программы,

б) ОЧ — оператор определения чисел,

в) ОРП — оператор определения рабочего поля,

г) НАЧ (начало) — оператор для указания расположения частей программы,

д) КН (конец) — оператор для указания конца программы,

е) СР (сравнить) — оператор сравнения символической метки с любым другим адресом,

ж) ПЕР (переход) — оператор, останавливающий ввод конечной программы и передающий управление для ее исполнения,

з) СТП (стоп) — оператор останова во время перевода исходной программы в конечную.

Каждый оператор записывается в отдельной строке бланка и перфорируется на отдельную перфокарту. Для записи и ввода исходной программы в машину используется буквенный ввод.

Программа, переводящая исходную программу в конечную, состоит из двух частей, называемых первой и второй фазой соответственно.

Конечная программа может быть выведена на перфокарты или на магнитные ленты, а также отпечатана. Она также может быть оставлена в машине для ее исполнения сразу после перевода.

Использование ССП облегчает запись программ, допускает больше гибкости и удобства при внесении изменений в программу и одновременно дает возможность так же хорошо и эффективно использовать знание специфики машины, как и при программировании на языке машины.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Магарик, Н. М. Нагорный, Система команд универсальной цифровой автоматической машины БЭСМ-2 ВЦ АН СССР, Москва, 1963.

2. Автоматизация программирования, сборник переводов, Москва, 1961.

3. Дж. Карр, Лекции по программированию, Москва, 1963.

О ДЗЕТА-ФУНКЦИЯХ ГЕККЕ

К. БУЛОТА

Обзорный доклад, посвященный работам по дзета-функциям Гекке, выполняемым математиками республики. Приведены результаты, полученные проф. Й. Кубилюсом, кандидатами физико-математических наук И. Вайткявичусом, И. Урбялисом, автором, аспирантами А. Матуляускасом, В. Калинкой. Указана проблематика, в которой сейчас ведутся работы. Сообщено о некоторых новых результатах.

Автором ранее было получено следующее приближенное функциональное уравнение дзета-функций Гекке для мнимого квадратичного числового поля:

$$Z(s,\ \Xi,\ R)=\sum_{\substack{\mathfrak{A}\in R\\ N\mathfrak{A}<X}}\frac{\Xi(\mathfrak{A})}{N\mathfrak{A}^{s}}+\psi(s)\sum_{\substack{\mathfrak{b}\in R^{*}\\ N\mathfrak{b}<Y}}\frac{\overline{\Xi}(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{1-s}}+O\left(V^{\frac{1}{2}}X^{-\sigma}+X^{\frac{1}{2}-\sigma}\right)\ln^{2}V, \qquad (1)$$

где X, Y — достаточно большие положительные числа, R и R^* — класса идеалов поля, $\psi(s)$ — известная функция из функционального уравнения

$$Z(s, \Xi, R) = \psi(s) Z(1-s, \overline{\Xi}, R^*),$$

$$V \equiv \sqrt{m^2 g^2 + 4t^2} = 4\pi \sqrt{\frac{XY}{dN\mathfrak{m}}},$$

где m — показатель характера Гекке, $s = \sigma + it$.

В настоящее время получено приближенное функциональное уравнение, подобное (1), для

$$\sum_{|m| \leqslant M} Z(s, \Xi, R), \tag{2}$$

причем проведена оценка как в случае (1), так и в случае (2) относительно нормы идеала $\mathfrak{m}$, являющегося модулем группового характера χ, входящего в характер Гекке Ξ. Остаточный член для суммарного функционального уравнения получен при нескольких основных конфигурациях параметров X, Y, t, $N\mathfrak{m}$, M. Так при $N\mathfrak{m} \gg V$, например, остаточный член в (2) совпадает с остаточным членом в (1). Вследствие этих новых оценок возможно некоторое уточнение плотностных теорем для числа нулей $Z(s, \Xi)$ в некотором прямоугольнике критической полосы, следуют и другие результаты. Доказательство новых результатов будет опубликовано.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, ЗАДАННЫХ НА ЦЕПИ МАРКОВА

Г. Ю. АЛЕШКЯВИЧЮС

Пусть $(\xi_k^{(n)})_{k=0}^n$ — n-ая цепь Маркова, определенная вероятностями $p_k^{(n)}(\omega, A)$ перехода из состояния $\xi_{k-1}^{(n)} = \omega \in \Omega_{k-1}^{(n)}$ в измеримое множество $A \subset \Omega_k^{(n)}$. Через $p_{kl}^{(n)}(\omega, A)$ обозначим вероятность перехода из состояния $\omega \in \Omega_k^{(n)}$ во множество $A \subset \Omega_l^{(n)}$, $(l > k)$ и определим коэффициент эргодичности $\alpha_{kl}^{(n)}$ между состояниями $\xi_k^{(n)}$ и $\xi_l^{(n)}$, полагая

$$\alpha_{kl}^{(n)} = 1 - \sup_{\omega, \tilde{\omega}, A} |p_{kl}^{(n)}(\omega, A) - p_{kl}^{(n)}(\tilde{\omega}, A)|. \tag{1}$$

Определим случайные величины $(X_k^{(n)})_{k=1}^n$, заданные на n-ой цепи Маркова условиями:

(а) $(\xi_k^{(n)}, X_k^{(n)})_{k=1}^n$ *является цепью Маркова (двумерной);*

(б) *если состояния* $\xi_0^{(n)}, \xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_n^{(n)}$ *фиксированы, то случайные величины* $X_1^{(n)}, \ldots, X_n^{(n)}$ *не зависимы и имеют функции распределения*

$$F_{nk}(x) = \mathbf{P}\{X_k^{(n)} < x \mid \xi_0^{(n)}, \xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_n^{(n)}\} = \mathbf{P}\{X_k^{(n)} < x \mid \xi_{k-1}^{(n)}, \xi_k^{(n)}\}. \tag{2}$$

Обозначим

$$a_{nk} = \mathbf{M}\{X_k^{(n)} \mid \xi_{k-1}^{(n)}, \xi_k^{(n)}\}, \qquad F_n(x) = \mathbf{P}\left\{\sum_1^n X_k^{(n)} < xB_n + A_n\right\},$$

$$\sigma_{nk}^2 = \mathbf{D}\{X_k^{(n)} \mid \xi_{k-1}^{(n)}, \xi_k^{(n)}\}, \qquad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

$$L_n^s = \frac{1}{B_n^s} \sum_{k=1}^n \mathbf{M} |X_k^{(n)} - \mathbf{M} X_k^{(n)}|^s, \qquad (s = 2, 3, 4, \ldots),$$

$$L_n(\varepsilon) = \frac{1}{B_n^2 \alpha(n)} \sum_{k=1}^n \mathbf{M} \int\limits_{|x| > \varepsilon B_n \sqrt{\alpha(n)}} x^2 dF_{nk}(x + a_{nk}).$$

Здесь $B_n^2 = \mathbf{D}\left(\sum_1^n X_k^{(n)}\right)$, $A_n = \mathbf{M}\left(\sum_1^n X_k^{(n)}\right)$ — нормирующие постоянные. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Если с вероятностью единица*

1) $a_{nk} \equiv 0$,

2) $|X_k^{(n)}| \leqslant C$,

3) $\alpha(n) B_n^2 \to \infty$,

то равномерно по x $(-\infty < x < \infty)$ *при* $n \to \infty$

$$F_n(x) \to \Phi(x).$$

Теорема 2. *Если*

1) *с вероятностью единица* $a_{nk} \equiv 0$,

2) *для любого* $\varepsilon > 0$ *и* $n \to \infty$

$$L_n(\varepsilon) \to 0,$$

то равномерно по x

$$F_n(x) \to \Phi(x).$$

Теорема 3. *Если*

1) *с вероятностью единица* $a_{nk} \equiv 0$;

2) $L_n^3 \to 0$;

3) $\frac{1}{\alpha(n)} L_n^4 \to 0$,

то равномерно по x

$$F_n(x) \to \Phi(x).$$

Идея доказательства теорем 1—3. Пусть $(Y_k^{(n)})_{k=1}^{(n)}$ сопровождающие случайные величины, заданные на цепи Маркова функциями распределения

$$G_{nk}(x) = \Phi\left(\frac{x - a_{nk}}{\sigma_{nk}}\right). \tag{3}$$

Через $f_n(t)$ и $g_n(t)$ обозначим характеристические функции сумм

$$S_n = \frac{1}{B_n}\left(\sum_1^n X_k^{(n)} - A_n\right) \quad \text{и} \quad S_n' = \frac{1}{B_n}\left(\sum_1^n Y_k^{(n)} - A_n'\right).$$

Тогда

$$|f_n(t) - g_n(t)| < \left(1 + \frac{4}{\sqrt{x\pi}}\right) \frac{|t|^3}{6} L_n^3, \tag{4}$$

$$\left|g_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| < \frac{t^2}{2} \sqrt{\frac{8}{\alpha(n)} L_n^4}. \tag{5}$$

Из (4) и (5) следуют 1 и 3 теоремы. Вторая теорема доказывается по той же схеме.

Только что сформулированные теоремы обобщены на сложные цепи Маркова с заданными на них «m-зависимыми» случайными величинами. Рассмотрен также случай, когда нарушено условие: $a_{nk} \equiv 0$ (с вероятностью единица).

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ В МЕТРИКАХ ПРОСТРАНСТВ l_1 И L_1

А. БИКЯЛИС, Г. ЯСЮНАС

Рассматривается последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ независимых одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1. α_3, β_3 — соответственно центральный и центральный абсолютный момент третьего порядка величины ξ_1. $F_n(x)$ — функция распределения нормированной суммы $S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \xi_j$, а

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad \text{и} \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Через $\|f(x)\|$ обозначим норму функции $f(x)$ пространства L_1. В метрике L_1 имеют место следующие оценки:

Теорема 1. *Если* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *не являются решетчатыми и* $\beta_3 < \infty$, *то*

$$\left\| x^2 \left(F_n(x) - \Phi(x) - \frac{\alpha_3(1-x^2)}{6\sqrt{n}} \varphi(x)\right) \right\| = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Теорема 2. *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — *решетчатые случайные величины.* ξ_1 *принимает значения* $s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ *с максимальным шагом распределения* 1 *и* $\beta_3 < \infty$. *Тогда*

$$\left\| x^2 \left[F_n(x) - \Phi(x) - \left(\frac{\alpha_3(1-x^2)}{6\sqrt{n}} + \frac{S(x\sqrt{n})}{\sqrt{n}}\right) \varphi(x)\right] \right\| = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Здесь $S(u) = u - [u] + \frac{1}{2}$, $[u]$ — *целая часть* u.

Пусть $\|y\|$ норма элемента $y \in l_1$. Доказана

Теорема 3. *При выполнении условий теоремы* 2 *имеет место равенство*

$$\left\| \left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^3 \left[P_n(s) - \frac{\varphi\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{\alpha_3\left(\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^3 - \frac{3s}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}}\right)\right] \right\| = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

где $P_n(s) = P\{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n = s\}$.

О МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ

А. БИКЯЛИС

Рассматривается последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ независимых одинаково распределенных k-мерных случайных векторов. Предположим, что ξ_1 имеет нулевой вектор математических ожиданий и неснигулярную ковариационную матрицу V.

x, y — векторы k-мерного евклидового пространства R_k, (x, y) — их скалярное произведение, $|t|$ — длина вектора t, $f(t)$ — характеристическая функция случайного вектора ξ_1.

$F_n(x)$ — функция распределения суммы

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \xi_j.$$

Через $\lambda_1^{s_1} \lambda_2^{s_2} \ldots \lambda_k^{s_k}$ обозначим семиинварианты $(s_1, s_2, \ldots, s_k)$-порядка. $P_j(\omega)$ определяем с помощью формального тождества

$$\exp\left\{\sum_{j=3}^{\infty} \frac{(\lambda, \omega)^j}{j!} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{j-2}\right\} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j P_j(\omega),$$

а $P_j(\xi_1, -\varphi)(x)$ и $P_j(\xi_1, -\Phi)(x)$ — следующими равенствами:

$$P_j(\xi_1, -\varphi)(x) - \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{R_k} P_j(it) e^{-i(t, x) - \frac{1}{2} tVt'} dt$$

и

$$P_j(\xi_1, -\Phi)(x) = \int\limits_{\substack{y_1 \leqslant x_1 \\ \cdots\cdots \\ y_k < x_k}} P_j(\xi_1, -\varphi)(y)\, dy.$$

Теорема 1. *Если случайный вектор* ξ_1 *имеет конечные третьи моменты и не является решетчатым, то равномерно по* $x \in R_k$

$$F_n(x) = \Phi(x) + \frac{1}{\sqrt{n}} P_1(\xi_1, -\Phi)(x) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Заметим, что в работе [1] показано:

Если ξ_1 имеет конечные третьи моменты и принимает значения из многомерной решетки с максимальным шагом распределения 1, то равномерно по $x \in R_k$

$$F_n(x)=\Phi(x)+\frac{1}{\sqrt{n}}P_1(\xi_1,-\Phi)(x)-\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{k}S(x_j\sqrt{n})\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_j}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Здесь $\Phi(x)$ — функция распределения k-мерного нормального закона с нулевым вектором математических ожиданий и ковариационной матрицей V. $S(u)=[u]-u+\frac{1}{2}$, $[u]$ — целая часть u.

Теорема 2. *Если случайный вектор ξ_1 имеет конечные моменты порядка $s \geqslant 3$ и выполнено условие*

(C) $$\overline{\lim_{|t|\to\infty}}|f(t)|<1,$$

то равномерно по $x \in R_k$

$$F_n(x)=\sum_{j=0}^{s-2}\frac{1}{n^{\frac{j}{2}}}P_j(\xi_1,-\Phi)(x)+\vartheta\left(\frac{1}{n^{\frac{s-2}{2}}}\right).$$

При доказательстве теорем используется одна лемма Г. Бергстрома [2], а также метод усечения случайных векторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Бикялис, Предельные теоремы для сумм независимых случайных векторов (кандидат. диссертация), Вильнюс, 1965.
2. H. Bergström, On the central limit theorem in R_k, $k>1$, Skand. Aktuartiedskrift, 28 (1945), 106—127.

УТОЧНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ И. А. ИБРАГИМОВА

Г. А. МИСЯВИЧЮС

Каждое вещественное число интервала (0, 1) единственным образом разлагается в цепную дробь

$$t=\cfrac{1}{a_1(t)+\cfrac{1}{a_2(t)\ldots}},$$

где все $a_j(t)$ — натуральные числа, которые обычно записывают в виде $t=[a_1(t), a_2(t)\ldots]$. Через $\frac{p_k}{q_k}$ обозначим подходящую дробь порядка k числа t, т. е. $\frac{p_k}{q_k}=[a_1(t), \ldots, a_k(t)]$. Обозначим $F_n(z)$ меру Лебега точек $t \in (0, 1)$, удовлетворяющих условию

$$\frac{\log q_n(t)-na}{\sqrt{n}}<z.$$

И. А. Ибрагимовым доказано следующее соотношение

$$F_n(z)\to\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-\frac{u^2}{2}}du,$$

которое уточнил Й. П. Кубилюс:

$$\sup_z|F_n(z)-\Phi(z)|=O\left(\frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}\right).$$

Последний результат нами несколько улучшен, т. е. доказана справедливость соотношения

$$\sup_z|F_n(z)-\Phi(z)|=O\left(\frac{\ln^{\frac{3}{2}} n}{\sqrt{n}}\right).$$

Кроме того, получен следующий результат типа больших уклонений: при $1 \leqslant x^2 < \Delta\delta$, $\Delta = \frac{\sqrt{n}}{\ln^4 n}$,

$$\frac{1-F_n(na+x\sigma\sqrt{n})}{1-\Phi(x)} = e^{\frac{x^4}{\Delta}\lambda\left(\frac{x^2}{\Delta}\right)}\left(1+O\left(\frac{x^2}{\Delta}\right)\right).$$

$$\frac{F_n(na-x\sigma\sqrt{n})}{\Phi(-x)} = e^{-\frac{x^4}{\Delta}\lambda\left(-\frac{x^2}{\Delta}\right)}\left(1+O\left(\frac{x^2}{\Delta}\right)\right).$$

Здесь a, σ, δ — константы, $\lambda(t)$ — степенной ряд Крамера.

Упомянутые результаты получены методом усечения, с использованием новейших исследований В. А. Статулявичюса в области слабозависимых случайных величин.

СТАРШИЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ В ТЕОРЕМАХ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ

В. А. СТАТУЛЯВИЧЮС

Пусть $\{\xi(t),\ -\infty<t<\infty\}$ — вещественный измеримый случайный процесс с непрерывным временем. Говорят, что $\xi(t)$ принадлежит классу $T^{(k)}$, если

$$\mathbf{M}\,|\xi(t)|^k < C_k < \infty.$$

Рассмотрим случайную величину

$$\zeta_T = \int_0^T \xi(t)\,dt$$

и пусть $m_T = \mathbf{M}\,\zeta_T$, $\sigma_T^2 = \mathbf{D}\,\zeta_T$ и $s_\xi^{(k)}(t_1, \ldots, t_k)$ — корреляционная функция порядка k процесса $\xi(t)$, т. е. простой семиинвариант случайного вектора $(\xi(t_1), \ldots, \xi(t_k))$:

$$s_\xi^{(k)}(t_1, \ldots, t_k) = \frac{1}{i^k}\frac{\partial^k}{\partial u_1 \ldots \partial u_k}\ln \mathbf{M}\,e^{i\left(u_1\xi(t_1)+\cdots+u_k\xi(t_k)\right)}\Big|_{u_1=\cdots=u_k=0}.$$

В условиях семиинвариантов $s_\xi^{(k)}(t_1, \ldots, t_k)$ удается выразить критерии различных свойств перемешивания стационарного процесса (см. [1]), среднее число выбросов через данный уровень за данный промежуток времени и многое другое, что было известно только для гауссовских процессов. Известны так же ([1]) семиинвариантные условия для применимости к

$$\frac{\zeta_T - m_T}{\sigma_T}$$

центральной предельной теоремы, состоящие в том, что $\xi(t) \in T^{(\infty)}$ и

$$\frac{1}{\sigma_T^k}\int_0^T \cdots \int_0^T s_\xi^{(k)}(t_1, \ldots, t_k)\,dt_1 \ldots dt_k = 0\,(1)$$

при $T \to \infty$ для всех $k \geqslant 3$.

Теорема. Если $\xi(t) \in T^{(\infty)}$ и

$$\frac{1}{\sigma_T^k}\left|\int_0^T \cdots \int_0^T s_\xi^{(k)}(t_1, \ldots, t_k)\,dt_1 \ldots dt_k\right| \leqslant \frac{k!\,H}{\Delta_T^{k-2}}$$

для всех $k \geqslant 3$, то для $F_T(x) = \mathbf{P}\{\zeta_T < x\}$ имеют место соотношения больших уклонений

$$\frac{1-F(m_T+x\sigma_T)}{1-\Phi(x)} = e^{\frac{x^3}{\Delta_T}\lambda\left(\frac{x}{\Delta_T}\right)}\left(1+f_1(\delta, H)\frac{x}{\Delta_T}\right),$$

$$\frac{F(m_T-x\sigma_T)}{\Phi(-x)} = e^{-\frac{x^3}{\Delta_T}\lambda\left(\frac{-x}{\Delta_T}\right)}\left(1+f_2(\delta, H)\frac{x}{\Delta_T}\right)$$

для
$$1 \leqslant x \leqslant \delta \Delta_T, \quad \delta < \delta_H$$
причем
$$|f_i(\delta, H)| < \frac{8H\left\{1+7,2\left(1+2\delta+\min\left\{\frac{1}{3}(1-\delta)^3 H^{-1}, \frac{1}{2} H^{-\frac{1}{4}}\right\}\right)^4\right\}}{(1-\delta')^4 (1-\rho)^{\frac{3}{2}}},$$
$i=1, 2$, $0<\delta'<\delta'_H$ определяется из уравнения
$$\delta'=\frac{\delta(1+\delta)}{2}, \quad \rho=\frac{6H\delta'}{(1-\delta')^3}, \quad \delta_H=\frac{\delta'_H(1+\delta'_H)}{2},$$
δ'_H – действительный корень уравнения $\rho=1$ и $\lambda(t)=\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{kT} t^k$ – степенной ряд Кремера, сходящийся при $|t|<\delta_H$, причем
$$|\lambda_{kT}| \leqslant \frac{\delta'_H}{(k+3)\delta_H^{k+2}}, \qquad k=0, 1, \ldots$$

Следствие. Если $\sigma_T^2 \geqslant c^2 T$ и
$$\left| \int_0^T \cdots \int_0^T s_\xi^{(k)}(t_1, \ldots, t_k)\, dt_1 \ldots dt_k \right| \leqslant k!\, H_1 T$$
для всех $k \geqslant 3$, то можно выбрать $H=\frac{H_1}{c^2}$, $\Delta_T=c\sqrt{T}$.

Полное изложение печатается в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Леонов, Некоторые применения старших семиинвариантов к теории стационарных случайных процессов, Москва, 1964.
2. V. Statulevičius, On large deviations, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, B. 6 (1966), 133–144.

О БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

А. АКСОМАЙТИС

Рассмотрим последовательность независимых случайных величин $\{\xi_k, k=1, 2\ldots\}$ с функциями распределения $\{F_k(x), k=1, 2, \ldots\}$ и с двухсторонними преобразованиями Лапласа $\{f_k(s), k=1, 2, \ldots\}$.

Обозначим
$$S_n=\sum_{k=1}^{n} \xi_k, \quad \bar{S}_n=\frac{S_n-A_n}{B_n},$$
$G_\alpha(x)$ – устойчивое предельное распределение для суммы $\bar{S}_n$, характеристическая функция которого имеет вид:
$$\exp\left\{\frac{1}{\alpha}(-it)^\alpha\right\}, \text{ если } 1<\alpha<2,$$
$$\exp\left\{\frac{1}{\alpha}(-it)\ln(-it)\right\}, \text{ при } \alpha=1, \tag{1}$$
а $\{G_{\alpha k}(x), k=1, 2, \ldots\}$ – устойчивые законы семейства (1) с х.ф. вида
$$\exp\left\{\frac{1}{\alpha}\lambda_k(-it)^\alpha\right\}, \qquad 1<\alpha<2,$$
$$\exp\{\lambda_k(-it)\ln(-it)\}, \qquad \alpha=1,$$
где $\lambda_k>0$, $k=1, 2, \ldots$

Выберем постоянные A_n и B_n следующим образом:

$$B_n^\alpha = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k, \quad A_n = \begin{cases} 0, & 1<\alpha<2, \\ B_n \ln B_n, & \alpha=1. \end{cases}$$

Полагаем на $\{\xi_k,\ k=1, 2, \dots\}$ условия:

C_1. Существуют такие $B>0$ и $a\geqslant\alpha$, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^a\, d\left| d\Big(F_k(x) - G_{\alpha k}(x)\Big)\right| \leqslant B.$$

C_2. Существуют такие $m>0$ и $M>0$, что в полосе $0\leqslant \operatorname{Re} s \leqslant A$ имеют место неравенства

$$m \leqslant |f_k(s)| \leqslant M, \qquad k=1, 2, \dots$$

C_3. Для всех n

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k}{n} \geqslant \varepsilon > 0.$$

Предполагая эти условия выполненными, мы получаем следующие результаты.

Теорема 1. *При $n\to\infty$ для больших уклонений $-\Delta_n < x < 0$ имеем*

$$\frac{P\{\bar S_n < x\}}{G_\alpha(x)} = \prod_{k=1}^{n} f_k(\tilde h) \exp\left\{ B_n^\alpha \Big(r(\tau) + \tau \tilde h\Big)\right\} \Big(1+o(1)\Big),$$

где $\tilde h(\tau)$ — положительное решение уравнения

$$\tau B_n^\alpha + \sum_{k=1}^{n} [\ln f_k(\tilde h)]' = 0,$$

$$r(\tau) = \begin{cases} \dfrac{\alpha-1}{\alpha}(-\tau)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}, & 1<\alpha<2, \\ \exp\{1+\tau\xi\}, & \alpha=1, \end{cases}$$

а τ определяется по $x_1 B_n$ условиями

$$\tau = \begin{cases} x B_n^{1-\alpha}, & 1<\alpha<2, \\ x+\ln B_n, & \alpha=1 \end{cases}$$

и

$$\Delta_n = \begin{cases} o(B_n^{\alpha-1}), & 1<\alpha<2, \\ \ln B_n \Big(1+o(1)\Big), & \alpha=1. \end{cases}$$

Теорема 2. *При $n\to\infty$*

$$P\{\bar S_n < x\} = G_\alpha(x)\{1+o(1)\}$$

для больших уклонений $-\Delta_n' < x < 0$, где

$$\Delta_n' = \begin{cases} o\left(B_n^{\frac{(\alpha-1)(L-\alpha)}{L}}\right), & 1<\alpha<2, \\ \ln B_n^{\frac{L-1}{L}} \Big(1+o(1)\Big), & \alpha=1. \end{cases}$$

Здесь

$$L = \min\{a,\ 1+\min_k l_k\},$$

где l_k — показатель симметрии распределения $F_k(x)$ относительно $G_{\alpha k}(x)$.

Доказательства вышеприведенных теорем проводятся при помощи преобразования Эссшера—Крамера, используя идеи В. М. Золотарева.

Рассматривались суммы $S_{N(t)}=\sum\limits_{k=1}^{N(t)}\xi_k$, где $\{\xi_k,\ k=1, 2, \ldots\}$ одинаково распределены, а $N(t)$ — случайная величина.

Получены локальные предельные теоремы для больших уклонений в случае устойчивого предельного закона с параметрами $1\leqslant\alpha<2$ и $\beta=1$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ В ПРОЦЕССАХ ОПОЗНАВАНИЯ

А. Ю. МОТУЗА, Л. А. ТЕЛЬКСНИС, В. Ю. ЧЕРНЯУСКАС

При создании обучаемых опознающих систем одной из задач является выбор такого способа обучения, который обеспечил бы максимальную точность опознавания при наибольшей скорости сходимости процесса обучения.

В докладе показывается, что обучение с применением метода стохастической аппроксимации, при соответствующем подборе его параметров, обеспечивает более точное и быстрое обучение классификаторов по сравнению с некоторыми другими известными способами их обучения.

Рассматриваются математические задачи, возникающие при применении метода стохастической аппроксимации, решение которых позволило бы наиболее эффективно использовать этот метод в обучаемых опознающих системах.

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ КРАМЕРА

А. ШЕПУТИС

Г. Крамером [1] было доказано, что если $\{\xi(t),\ -\infty<t<\infty\}$ действительный сепарабельный стационарный гауссовский процесс с $\mathbf{M}\xi(t)=0$, с корреляционной функцией $\mathbf{B}(\tau)$, $B(0)=1$, имеющий спектральную плотность $f(\lambda)$ ограниченной вариации на $(-\infty,\infty)$, причем для какого-нибудь $a>1$

$$\int\limits_0^\infty \lambda^2\log^a(1+\lambda)f(\lambda)\,d\lambda<\infty, \tag{1}$$

то

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\left\{\left|\max_{0\leqslant u\leqslant t}|\xi(u)|-\sqrt{2\log t}\right|<\frac{\log\log t}{\sqrt{\log t}}\right\}=1.$$

Пусть $\{\xi_k(t),\ k=1,\ldots,n,\ -\infty<t<\infty\}$ — n-мерный действительный сепарабельный стационарный гауссовский процесс с корреляционной матрицей $\mathbf{B}(\tau)$, для всех компонент которого выполнено (1). Пусть, кроме того, $\mathbf{M}\xi_k(t)=0$, $k=1,\ldots,n$, $\mathbf{B}(0)=\mathbf{E}$ и

$$\mathbf{M}\xi_i'(t)\xi_j'(t)=0,\quad i\neq j,\ i,j=1,\ldots,n.$$

Тогда имеет место следующая

Теорема.

$$\mathbf{P}\left\{\max_{0\leqslant t\leqslant T}\sum_{k=1}^n\xi_i^2(t)\geqslant R^2\right\}\leqslant\frac{R^{n-1}e^{-\frac{R^2}{2}}T}{2^{\frac{n-3}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}+$$

$$+\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int\limits_{R^2}^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx-\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left(R+\dfrac{R^3}{3}+\ldots+\dfrac{R^{n-2}}{(n-2)!!}\right)e^{-\frac{R^2}{2}}, & \text{при } n \text{ нечетном},\\[2ex] \left(1+\dfrac{R^2}{2}+\ldots+\dfrac{R^{n-2}}{(n-2)!!}\right)e^{-\frac{R^2}{2}}, & \text{при четном } n,\end{cases}$$

$$\mathbf{P}\left\{\max_{0\leqslant t\leqslant T}\sum_{k=1}^n\xi_i^2(t)\leqslant r^2\right\}\leqslant\frac{c(n)\,r^{3n+2}}{T^2}\,e^{\frac{r^2}{2}},$$

т. е.

$$\lim_{T\to\infty} \mathbf{P}\left\{\left|\max_{0\leqslant t\leqslant T}|\vec{\xi}(t)|-\sqrt{2\log T}\right|<\frac{3n+2}{5}\,\frac{\log\log T}{\sqrt{\log T}}\right\}=1.$$

Такая задача очень часто возникает в вопросах стохастического линейного программирования при построении доверительных зон для $\vec{\xi}(t)$ в интервале $0\leqslant t\leqslant T$.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Cramer, On the maximum of a normal stationary stochastic process, Bull. Amer. Math. Soc., 5, 68 (1962).

МЕТОД ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ В ВЕРОЯТНОСТНОЙ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Й. КУБИЛЮС

Рассмотрены возможности использования рядов Дирихле для изучения асимптотического поведения характеристических функций для аддитивных арифметических функций. В частности, доказана следующая теорема. Пусть $f(m)$ — целочисленная аддитивная арифметическая функция, причем $f(p)=0$ для всех простых p. Тогда для любого целого k число целых положительных $m\leqslant n$, для которых $f(m)=k$, равно $\lambda_k n+O(n^{3/5})$. Оценка равномерна по k. Константы λ_k определяются из соотношения

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_k e^{itk}=\prod_p\left(1+\sum_{\alpha=2}^{\infty}\frac{e^{itf(p^\alpha)}-e^{itf(p^{\alpha-1})}}{p^\alpha}\right).$$