LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 1, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 1, 1967

О НЕКОТОРЫХ СВЯЗНОСТЯХ РАССЛОЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ

В. И. БЛИЗНИКАС

В работах [1], [2] построена теория различных связностей пространства опорных элементов $V^{(p)}_{n,N}$, которое является расслоенным пространством со специальной группой Ли (дифференциальная группа определенного порядка). В этой заметке рассматриваются аналогичные вопросы для расслоенного пространства, фундаментальная группа которого является произвольной группой Ли.

§ 1. Структурные уравнения расслоенного пространтсва

Локальные координаты x^i дифференцируемого многообразия V_n можно считать первыми интегралами вполне интегрируемой системы $\omega^i=0$, где

$$D\omega^i=[\omega^k,\ \omega^i_k],$$

$$D\omega^i_{j_1\ldots j_a}=\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\,[\omega^k_{(j_1\ldots j_s},\ \omega^i_{j_{s+1}\ldots j_a)k}]+[\omega^k,\ \omega^i_{j_1\ldots j_a k}], \tag{1}$$

$$(i,\ j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma=1,\ 2,\ \ldots,\ r;$$
$$I,\ J,\ K=1,\ 2,\ \ldots,\ N;\ a,\ b=1,\ 2,\ \ldots,\ p).$$

Структурные уравнения группы Ли G с инвариантными формами $\mathfrak{d}^\alpha$ имеют вид ($C^\alpha_{\beta\gamma}$ – структурные константы, связанные тождествами Якоби):

$$D\mathfrak{d}^\alpha=\frac{1}{2}\,C^\alpha_{\beta\gamma}[\mathfrak{d}^\beta,\ \mathfrak{d}^\gamma]. \tag{2}$$

Любое представление этой группы определяется при помощи вполне интегрируемой системы (см. [3]):

$$d\xi^I+\Xi^I_\alpha(\xi)\,\mathfrak{d}^\alpha=0. \tag{3}$$

Если каждой точке дифференцируемого многообразия V_n сопоставлено пространство представления F группы G, то таким образом полученное новое пространство называется расслоенным пространством $E(V_n,\ F,\ G,\ p,\ Z)$, причем p является канонической проекцией

$$p:E\to V_n,\ p^i(x,\ \xi)=x^i,$$

F – типовым слоем, т. е. пространством представления группы G для точки $x_0\in V_n$, Z – семейством локальных гомеоморфизмов $h_x:F\to F_x$ (F_x – слой точки $x\in V_n$), которые согласованы со структурной группой G ($k_x^{-1}\circ h_x\in G$). Главное расслоенное пространство $E(V_n,\ G)$ пространства $E(V_n, F,\ G,\ p,\ Z)$ определяется формами ω^i, ω^α, причем формы ω^α имеют следующую структуру (см. [3], стр. 228):

$$D\omega^\alpha=\frac{1}{2}\,C^\alpha_{\beta\gamma}[\omega^\beta,\ \omega^\gamma]+[\omega^k,\ \omega^\alpha_k], \tag{4}$$

$$D\omega^\alpha_k=[\omega^h_k,\ \omega^\alpha_h]+[\omega^\beta_k,\ \omega^\alpha_\beta]+[\omega^h,\ \omega^\alpha_{kh}], \tag{5}$$

где

$$\omega^\alpha_{kh} = \omega^\alpha_{hk}, \quad \omega^\alpha_\beta = C^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma.$$

Тогда инвариантные формы группы Ли, которая действует в слое F и изоморфна группе G, имеют вид

$$\mathfrak{d}^\alpha = \omega^\alpha |_{\omega^i = 0}.$$

Формы ω^α_β имеют следующую структуру:

$$D\omega^\alpha_\beta = [\omega^\gamma_\beta, \ \omega^\alpha_\gamma] + [\omega^k, \ \omega^\alpha_{\beta k}], \tag{6}$$

где

$$\omega^\alpha_{\beta k} = C^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma_k.$$

Расслоенное пространство $E(V_n, F, G, p, Z)$ можно определить формами ω^i и Θ^I:

$$\Theta^I = d\xi^I + \Xi^I_\alpha \omega^\alpha + \Xi^I_k \omega^k, \tag{7}$$

которые имеют следующую структуру:

$$D\Theta^I = [\Theta^K, \ \Theta^I_K] + [\omega^k, \ \Theta^I_k], \tag{8}$$

где

$$\Theta^I_J = \partial_J \Xi^I_\alpha \omega^\alpha + \partial_J \Xi^I_h \omega^h, \quad \Theta^I_k = \Xi^I_\alpha \omega^\alpha_k + \Xi^I_h \omega^h_k + \partial_K \Xi^I_k (\Xi^K_\alpha \omega^\alpha + \Xi^K_h \omega^h).$$

Слой F определяется формами $\Theta^I|_{\omega^i=0}$, которые на нем обращаются в нуль. Оказывается, что формы $\omega^\alpha_{j_1 \dots j_a}$ имеют такую структуру:

$$D\omega^\alpha_{j_1 \dots j_a} = \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!\,(a-s)!} \{ [\omega^k_{(j_1 \dots j_s}, \ \omega^\alpha_{j_{s+1} \dots j_a) k}] +$$

$$+ [\omega^\beta_{(j_1 \dots j_s}, \ \omega^\alpha_{|\beta| j_{s+1} \dots j_a)}] \} + [\omega^k, \ \omega^\alpha_{j_1 \dots j_a k}], \tag{9}$$

где

$$\omega^\alpha_{\beta j_1 \dots j_a} = C^\alpha_{\beta\gamma} \omega^\gamma_{j_1 \dots j_a}. \tag{10}$$

Дифференцируя уравнения (10) внешним образом и пользуясь тождествами Якоби, мы получим

$$D\omega^\alpha_{\beta j_1 \dots j_a} = \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!\,(a-s)!} \{ [\omega^k_{(j_1 \dots j_s}, \ \omega^\alpha_{|\beta| j_{s+1} \dots j_a) k}] -$$

$$- [\omega^\alpha_{\gamma (j_1 \dots j_s}, \ \omega^\gamma_{|\beta| j_{s+1} \dots j_a)}] + [\omega^\gamma_{\beta (j_1 \dots j_s}, \ \omega^\alpha_{|\gamma| j_{s+1} \dots j_a)}] \} + [\omega^k, \ \omega^\alpha_{\beta j_1 \dots j_a k}]. \tag{11}$$

Формы $\Theta^I_{J_1 \dots J_a}$, определенные равенствами

$$\Theta^I_{J_1 \dots J_a} = \partial_{J_1 \dots J_a} \Xi^I_\alpha \omega^\alpha + \partial_{J_1 \dots J_a} \Xi^I_h \omega^h, \tag{12}$$

удовлетворяют структурным уравнениям

$$D\Theta^I_{J_1 \dots J_a} = \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!\,(a-s)!} [\Theta^L_{(J_1 \dots J_s}, \ \Theta^I_{J_{s+1} \dots J_a) L}] +$$

$$+ [\Theta^L, \ \Theta^I_{J_1 \dots J_a L}] + [\omega^k, \ \Theta^I_{J_1 \dots J_a k}], \tag{13}$$

где

$$\Theta^I_{J_1 \dots J_a k_1 \dots k_c} = \partial_{J_1 \dots J_a} \Xi^I_\alpha \omega^\alpha_{k_1 \dots k_c} + \dots$$

и

$$D\Theta^I_{J_1\ldots J_a k_1\ldots k_c}=\sum_{l=1}^{a}\frac{a!}{l!\,(a-l)!}\times$$

$$\times\Big\{\sum_{s=1}^{c}\frac{c!}{s!\,(c-s)!}\,[\Theta^L_{(J_1\ldots J_l k_1\ldots k_s},\ \Theta^I_{|L|J_{l+1}\ldots J_a k_{s+1}\ldots k_c)}]+$$

$$+[\Theta^L_{(J_1\ldots J_l},\ \Theta^I_{|L|J_{l+1}\ldots J_a)k_1\ldots k_c}]\Big\}+$$

$$+\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\Big\{[\Theta^L_{(k_1\ldots k_s},\ \Theta^I_{|LJ_1\ldots J_a|k_{s+1}\ldots k_c)}]+[\omega^k_{(k_1\ldots k_s},\ \Theta^I_{|J_1\ldots J_a|k_{s+1}\ldots k_c)k}]\Big\}+$$

$$+[\Theta^L,\ \Theta^I_{J_1\ldots J_a L k_1\ldots k_c}]+[\omega^k,\ \Theta^I_{J_1\ldots J_a k_1\ldots k_c k}]. \tag{14}$$

§ 2. Инфинитезимальная связность пространства $E(V_n,\ G)$

Г. Ф. Лаптев доказал [3], что формы инфинитезимальной связности главного расслоенного пространства $E(V_n,\ G)$ имеют вид:

$$\overset{\circ}{\omega}{}^{\alpha}=\omega^{\alpha}+\Gamma^{\alpha}_{k}\omega^{k}, \tag{15}$$

причем величины Γ^{α}_{k} образуют дифференциально-геометрический объект следующей структуры (см. [3], при $A^{\alpha}_{\beta}=\delta^{\alpha}_{\beta}$):

$$d\Gamma^{\alpha}_{k}-\Gamma^{\alpha}_{s}\omega^{s}_{k}+\Gamma^{\beta}_{k}\omega^{\alpha}_{\beta}-\omega^{\alpha}_{k}=\Gamma^{\alpha}_{sk}\omega^{s}. \tag{16}$$

Дифференцируя уравнения (15) внешним образом, мы получим

$$D\overset{\circ}{\omega}{}^{\alpha}=\frac{1}{2}\,C^{\alpha}_{\beta\gamma}[\overset{\circ}{\omega}{}^{\beta},\ \overset{\circ}{\omega}{}^{\gamma}]+R^{\alpha}_{ks}[\omega^{k},\ \omega^{s}], \tag{17}$$

где

$$R^{\alpha}_{ks}=\Gamma^{\alpha}_{[ks]}-\frac{1}{2}\,C^{\alpha}_{\beta\gamma}\Gamma^{\beta}_{k}\Gamma^{\gamma}_{s}. \tag{18}$$

Объект R^{α}_{ks} называется тензором кривизны инфинитезимальной связности главного расслоенного пространства $E(V_n,\ G)$. Дифференцируя внешним образом формы $\overset{\circ}{\omega}{}^{\alpha}_{\beta}=C^{\alpha}_{\beta\gamma}\overset{\circ}{\omega}{}^{\gamma}$, мы получим

$$D\overset{\circ}{\omega}{}^{\alpha}_{\beta}=\frac{1}{2}\,C^{\alpha}_{\beta\gamma}C^{\gamma}_{\sigma\rho}[\overset{\circ}{\omega}{}^{\sigma},\ \overset{\circ}{\omega}{}^{\rho}]+\frac{1}{2}\,C^{\alpha}_{\beta\gamma}R^{\gamma}_{ks}[\omega^{k},\ \omega^{s}].$$

Отсюда, в силу тождеств Якоби, следует

$$D\overset{\circ}{\omega}{}^{\alpha}_{\beta}-[\overset{\circ}{\omega}{}^{\gamma}_{\beta},\ \overset{\circ}{\omega}{}^{\alpha}_{\gamma}]=R^{\alpha}_{\beta ks}[\omega^{k},\ \omega^{s}], \tag{19}$$

где

$$R^{\alpha}_{\beta ks}=\frac{1}{2}\,C^{\alpha}_{\beta\gamma}R^{\gamma}_{ks}. \tag{20}$$

Таким образом, с любой инфинитезимальной связностью главного расслоенного пространства $E(V_n,\ G)$ ассоциируется вертикальная аффинная связность с тензором кривизны $R^{\alpha}_{\beta ks}$.

§ 3. Вертикальные усеченные аффинные связности

Рассмотрим формы

$$\overset{*}{\omega}{}^{\alpha}_{\beta}=\omega^{\alpha}_{\beta}+\overset{*}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta k}\omega^{k}, \tag{21}$$

где

$$d\overset{*}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta k}-\overset{*}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\sigma k}\omega^{\sigma}_{\beta}-\overset{*}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta s}\omega^{s}_{k}+\overset{*}{\Gamma}{}^{\sigma}_{\beta k}\omega^{\alpha}_{\sigma}-\omega^{\alpha}_{\beta k}=\overset{*}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta sk}\omega^{s},$$

т. е. $\Gamma^{\alpha}_{\beta k}$ образуют объект аффинной связности, который назовем объектом усеченной вертикальной связности (считаем, что он определен на базе V_n). Дифференцируя внешним образом равенства (21), мы получим

$$D\overset{*}{\omega}{}^{\alpha}_{\beta}=[\overset{*}{\omega}{}^{\gamma}_{\beta},\ \overset{*}{\omega}{}^{\alpha}_{\gamma}]+R^{\alpha}_{\beta ks}[\omega^k,\ \omega^s],$$

где

$$R^{\alpha}_{\beta ks}=2\,(\overset{*}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta[ks]}-\overset{*}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\gamma[k}\overset{*}{\Gamma}{}^{\gamma}_{|\beta|s]}). \tag{22}$$

Объект ассоциированной вертикальной аффинной связности имеет вид

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta k}=C^{\alpha}_{\beta\gamma}\,\Gamma^{\gamma}_{k}.$$

Естественным образом возникает следующая задача: когда вертикальная усеченная аффинная связность порождает такую инфинитезимальную связность расслоенного пространства, ассоциированная вертикальная аффинная связность которой совпадает с исходной аффинной связностью. Эта задача сводится к исследованию системы уравнений (Γ^{γ}_{k} — неизвестные):

$$\overset{*}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta k}=C^{\alpha}_{\beta\gamma}\,\Gamma^{\gamma}_{k}. \tag{23}$$

Если группа Ли G полупростая, т. е. $\det\|g_{\alpha\beta}\|\neq 0\,(g_{\alpha\beta}=C^{\sigma}_{\alpha\gamma}C^{\gamma}_{\beta\sigma})$, то система (23) имеет единственное решение

$$\Gamma^{\gamma}_{k}=-g^{\rho\gamma}\,C^{\beta}_{\rho\alpha}\,\overset{*}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta k},$$

где $g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}=\delta^{\alpha}_{\gamma}$. В других случаях система (23) решается не однозначно (имеются в виду те случаи, когда она совместна) и произвол решения зависит от дефекта ранга картановой матрицы $\|g_{\alpha\beta}\|$.

§ 4. Главные расслоенные пространства с финслеровой структурой

Главное расслоенное пространство $E(V_n,\ G)$, на котором определена скалярная функция F, т. е.

$$dF=F_i\,\omega^i+F_{\alpha}\,\omega^{\alpha},$$

назовем главным расслоенным пространством с финслеровой структурой. Продолжение этой системы дает:

$$\begin{gathered}\nabla F_k-F_{\alpha}\,\omega^{\alpha}_{k}=F_{sk}\,\omega^s+F_{\alpha k}\,\omega^{\alpha},\\ \nabla F_{\alpha}=F_{\alpha k}\,\omega^k+F_{\beta\alpha}\,\omega^{\beta},\\ \nabla F_{\alpha k}-F_{\sigma}\,\omega^{\sigma}_{\alpha k}-F_{\sigma\alpha}\,\omega^{\sigma}_{k}=F_{\alpha sk}\,\omega^s+F_{\alpha\beta k}\,\omega^{\beta},\\ \nabla F_{\alpha\beta}=F_{\alpha\beta k}\,\omega^k+F_{\gamma\alpha\beta}\,\omega^{\gamma},\\ \nabla F_{\alpha\beta k}-F_{\sigma\beta}\,\omega^{\sigma}_{\alpha k}-F_{\alpha\sigma}\,\omega^{\sigma}_{\beta k}-F_{\gamma\alpha\beta}\,\omega^{\gamma}_{k}=F_{\alpha\beta sk}\,\omega^s+F_{\gamma\alpha\beta k}\,\omega^{\gamma},\\ \nabla F_{\alpha\beta\gamma}=F_{\alpha\beta\gamma k}\,\omega^k+F_{\varepsilon\alpha\beta\gamma}\,\omega^{\varepsilon},\end{gathered} \tag{24}$$

где

$$F_{sk}=F_{ks},\quad F_{\alpha sk}=F_{\alpha ks},\quad F_{\alpha\beta ks}=F_{\alpha\beta ks},$$

$$F_{[\alpha\beta]\gamma_1\ldots\gamma_a}=\frac{1}{2}\,C^{\sigma}_{\alpha\beta}\,F_{\sigma\gamma_1\ldots\gamma_a}.$$

Если $\det\|F_{(\alpha\beta)}\|\neq 0$, то величины

$$H^{\alpha}_{k}=F^{\alpha\beta}\,F_{\beta k},$$

где

$$F^{\alpha\beta}\,F_{(\gamma\beta)}=\delta^{\alpha}_{\gamma},$$

являются решением системы

$$\nabla H^\alpha_k - H^\alpha_\beta \omega^\beta_k = H^\alpha_{sk}\omega^s + H^\alpha_{\beta k}\omega^\beta,$$

где

$$H^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta + F^{\alpha\gamma} F_\sigma C^\sigma_{\gamma\beta},$$

т. е. H^α_β – тензор. Если этот тензор невырожденный, то величины ($\tilde{H}^\alpha_\beta H^\beta_\gamma = \delta^\alpha_\gamma$):

$$G^\alpha_k = \tilde{H}^\alpha_\beta H^\beta_k$$

образуют объект инфинитезимальной связности пространства $E(V_n, G)$.

§ 5. Индуцированные связности расслоенного пространства $E(V_n, F, G, p, Z)$

1. *Индуцированная инфинитезимальная связность.* Как известно, инфинитезимальная связность главного расслоенного пространства $E(V_n, G)$ индуцирует связность расслоенного пространства $E(V_n, F, G, p, Z)$:

$$\mathring{\Theta}^I = \Theta^I + \mathring{\Gamma}^I_k \omega^k, \tag{25}$$

где

$$\mathring{\Gamma}^I_k = \Xi^I_\alpha \Gamma^\alpha_k \tag{26}$$

и

$$d\mathring{\Gamma}^I_k - \mathring{\Gamma}^I_s \omega^s_k + \mathring{\Gamma}^T_k \Theta^I_T - \Theta^I_k = \mathring{\Gamma}^I_{sk}\omega^s + \mathring{\Gamma}^I_{Lk}\Theta^L, \tag{27}$$

причем

$$\mathring{\Gamma}^I_{sk} = \Xi^I_\alpha \Gamma^\alpha_{sk}, \quad \mathring{\Gamma}^I_{Lk} = \partial_L \Xi^I_\alpha \Gamma^\alpha_k. \tag{28}$$

Дифференциальные уравнения (27) можно переписать в виде

$$d\mathring{\Gamma}^I_k - \mathring{\Gamma}^I_s \omega^s_k + \mathring{\Gamma}^T_k \Theta^I_T - \Theta^I_k = \mathring{\nabla}_s \mathring{\Gamma}^I_k \omega^s + \mathring{\Gamma}^I_{Lk} \mathring{\Theta}^L, \tag{27'}$$

где $\mathring{\nabla}$ – символ неголономной базисной производной относительно объекта $\mathring{\Gamma}^I_k$. Дифференцируя внешним образом соотношения (25), мы получим

$$D\mathring{\Theta}^I - [\mathring{\Theta}^T, \Theta^I_T + \mathring{\Gamma}^I_{Tk}\omega^k] = \frac{1}{2} R^I_{kh}[\omega^k, \omega^h], \tag{29}$$

где

$$R^I_{ks} = 2\mathring{\nabla}_{[k}\mathring{\Gamma}^I_{s]}. \tag{30}$$

Оказывается, что тензоры кривизны связностей $\mathring{\Gamma}^I_k$ и Γ^α_k связаны соотношениями

$$R^I_{ks} = \Xi^I_\beta R^\beta_{ks}. \tag{31}$$

Если структурная группа G действует в пространстве F просто-транзитивно, то $\det\|\Xi^I_\beta\| \neq 0$ и из (26) следует, что между инфинитезимальными связностями расслоенных пространств $E(V_n, G)$ и $E(V_n, F, G, p, Z)$ существует естественный изоморфизм, определенный этим равенством (см. [5]).

2. *Индуцированные линейные связности высшего порядка.* Частичное продолжение уравнений (27) дает

$$d\mathring{\Gamma}^I_{J_1 k} - \mathring{\Gamma}^I_{Qk}\Theta^Q_{J_1} + \mathring{\Gamma}^Q_{J_1 k}\Theta^I_Q - \mathring{\Gamma}^I_{J_1 h}\omega^h_k + \mathring{\Gamma}^T_k \Theta^I_{J_1 T} - \Theta^I_{J_1 k} = \mathring{\Gamma}^I_{J_1 sk}\omega^s + \mathring{\Gamma}^I_{J_1 Qk}\Theta^Q,$$

. . . .

$$d\mathring{\Gamma}^I_{J_1\ldots J_a k} - \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!\,(a-s)!}\left\{\mathring{\Gamma}^Q_{(J_1\ldots J_s|k}\Theta^I_{Q|J_{s+1}\ldots J_a)} - \Theta^Q_{(J_1\ldots J_s}\mathring{\Gamma}^I_{|Q|J_{s+1}\ldots J_a)k}\right\} +$$
$$+ \mathring{\Gamma}^Q_k \Theta^I_{J_1\ldots J_a Q} - \mathring{\Gamma}^I_{J_1\ldots J_a h}\omega^h_k - \Theta^I_{J_1\ldots J_a k} = \mathring{\Gamma}^I_{J_1\ldots J_a hk}\omega^h + \mathring{\Gamma}^I_{J_1\ldots J_a Qk}\Theta^Q. \tag{32}$$

Если ввести новые формы

$$\mathring{\Theta}^I_{J_1\ldots J_a}=\Theta^I_{J_1\ldots J_a}+\mathring{\Gamma}^I_{J_1\ldots J_a k}\,\omega^k \tag{33}$$

то, дифференцируя их, мы получим

$$D\mathring{\Theta}^I_{J_1\ldots J_a}-\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\,[\mathring{\Theta}^Q_{(J_1\ldots J_s}\,\mathring{\Theta}^I_{J_{s+1}\ldots J_a)Q}]=$$

$$=\frac{1}{2}\,\mathring{R}^I_{J_1\ldots J_a kh}[\omega^k,\ \omega^h]+[\mathring{\Theta}^Q,\ \mathring{\Theta}^I_{J_1\ldots J_a Q}], \tag{34}$$

где

$$\mathring{R}^I_{J_1\ldots J_a kh}=2\nabla_{[k}\mathring{\Gamma}^I_{|J_1\ldots J_a|h]}-\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\times$$

$$\times\{\mathring{\Gamma}^Q_{(J_1\ldots J_s|k|}\,\mathring{\Gamma}^I_{J_{s+1}\ldots J_a)Qh}-\mathring{\Gamma}^Q_{(J_1\ldots J_s|h|}\,\mathring{\Gamma}^I_{J_{s+1}\ldots J_a)Qk}\}. \tag{35}$$

Формы $\mathring{\Theta}^I_{J_1\ldots J_a}$ определяют линейную связность, которую мы будем называть индуцированной вертикальной связностью высшего порядка. Если пространство F является линейным представлением группы G, то формы $\mathring{\Theta}^I_J$ являются формами аффинной связности, т. е.

$$D\mathring{\Theta}^I_J-[\mathring{\Theta}^K_J,\ \mathring{\Theta}^I_K]=\frac{1}{2}\,(\mathring{\Gamma}^I_{J[kh]}-\mathring{\Gamma}^Q_{J[k}\mathring{\Gamma}^I_{|Q|h]})[\omega^k,\ \omega^h]. \tag{36}$$

Для любого представления формы $\mathring{\Theta}^I_J$ имеют структуру

$$D\mathring{\Theta}^I_J-[\mathring{\Theta}^Q_J,\ \mathring{\Theta}^I_Q]=\frac{1}{2}\,(\nabla_{[k}\mathring{\Gamma}^I_{|J|h]}-\mathring{\Gamma}^Q_{J[k}\mathring{\Gamma}^I_{|Q|h]})[\omega^k,\ \omega^h]+$$

$$+[\mathring{\Theta}^Q,\ \Theta^I_{JQ}+\mathring{\Gamma}^I_{JQk}\omega^k]. \tag{37}$$

Оказывается, что величины $\mathring{R}^I_{Jkh}$, в общем случае, тензора не образует, а образует вместе с $\mathring{R}^I_{kh}$ линейный и однородный дифференциально-геометрический объект, т. е.

$$\nabla\mathring{R}^I_{Jkh}+R^T_{kh}\,\Theta^I_{TJ}=\mathring{R}^I_{Jkh,\,s}\,\omega^s+\mathring{R}^I_{Jkh,\,Q}\,\Theta^Q.$$

Объект $(\mathring{R}^I_{kh},\ \mathring{R}^I_{Jkh})$ будем называть объектом кривизны вертикальной линейной связности первого порядка, а объект $(\mathring{R}^I_{kh},\ \mathring{R}^I_{J_1kh},\ \ldots,\ \mathring{R}^I_{J_1\ldots J_p kh})$ – объектом кривизны вертикальной линейной связности порядка p. Оказывается, что

$$d\mathring{R}^I_{J_1\ldots J_a kh}-\mathring{R}^I_{J_1\ldots J_a th}\,\omega^t_k-\mathring{R}^I_{J_1\ldots J_a kt}\,\omega^t_h+$$

$$+\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\{\mathring{R}^T_{(J_1\ldots J_s|kh}\,\Theta^I_{T|J_{s+1}\ldots J_a)}-\Theta^T_{(J_1\ldots J_s}\,\mathring{R}^I_{|T|J_{s+1}\ldots J_a)kh}\}+$$

$$+\mathring{R}^T_{kh}\,\Theta^I_{J_1\ldots J_a T}=\mathring{R}^I_{J_1\ldots J_a kh,\,t}\,\omega^t+\mathring{R}^I_{J_1\ldots J_a kh,\,T}\,\Theta^T. \tag{38}$$

Таким образом, инфинитезимальная связность главного расслоенного пространства индуцирует усеченную линейную вертикальную связность высшего порядка пространства $E(V_n,\ F,\ G,\ p,\ Z)$. Когда группа G действует в F транзитивно (но не просто-транзитивно), то для определения объекта Γ^α_k (объект Γ^I_k произвольный) уравнений (26) не достаточно для того, чтобы определить Γ^{α}_{k}. Продолжая дифференциальные уравнения объекта Γ^{I}_{k} (они такие же как и для объекта $\overset{\circ}{\Gamma}{}^{I}_{k}$), мы получим объект усеченной линейной вертикальной связности. Возникает вопрос, когда объект усеченной вертикальной связности (подобъект p-раз продолженного объекта Γ^{I}_{k}) порождает инфинитезимальную связность главного расслоенного пространства. Оказывается, что для этого должны выполняться следующие соотношения:

$$C^{\gamma}_{\alpha\beta}\,\Xi^{I}_{\gamma}\,\Gamma^{\beta}_{k}=\partial_{L}\,\Xi^{I}_{\alpha}\,\Gamma^{L}_{k}-\Xi^{L}_{\alpha}\,\Gamma^{I}_{Lk},$$

$$C^{\gamma}_{\alpha\beta}\,\partial_{J_1}\Xi^{I}_{\gamma}\,\Gamma^{\beta}_{k}=\partial_{J_1L}\,\Xi^{I}_{\alpha}\,\Gamma^{L}_{k}+\partial_{L}\,\Xi^{I}_{\alpha}\,\Gamma^{L}_{J_1k}-\partial_{J_1}\,\Xi^{L}_{\alpha}\,\Gamma^{I}_{Lk}-\Xi^{L}_{\alpha}\,\Gamma^{I}_{J_1Lk},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C^{\gamma}_{\alpha\beta}\,\partial_{J_1\ldots J_p}\,\Xi^{I}_{\gamma}\,\Gamma^{\beta}_{k}=\partial_{J_1\ldots J_pL}\,\Xi^{I}_{\alpha}\,\Gamma^{L}_{k}+\ldots-\Xi^{L}_{\alpha}\,\Gamma^{I}_{J_1\ldots J_pLk}, \tag{39}$$

т. е. когда эта система совместна и имеет ранг $\sigma=nr$. Аналогичную задачу рассматривал Ю. Г. Лумисте для того случая, когда $F=G/H$ (см. [4]).

§ 6. Линейные связности высшего порядка

Структурные уравнения (1) можно рассматривать как структурные уравнения главного расслоенного пространства $E(V_n,\ D_{N_{pn}})$, где $D_{N_{pn}}$ – дифференциальная группа p-го порядка. Пфаффовые формы

$$\mathfrak{d}^{I}_{J_1\ldots J_a}=\Theta^{I}_{J_1\ldots J_a}\Big|_{\omega^i=0,\ \Theta^I=0}$$

являются инвариантными формами другой дифференциальной группы $\mathfrak{d}_{M_{gN}}$. Пользуясь этими группами мы имеем возможность строить различные связности. Эти построения приведены в работах [1, 2] для специальной группы Ли. (число q зависит от разменостей n и r, а также и от внутренних свойств пространства F).

Рассмотрим формы

$$\overset{*}{\Theta}{}^{I}=\Theta^{I}+\Gamma^{I}_{k}\,\omega^{k}, \tag{40}$$

$$\overset{*}{\omega}{}^{i}_{j_1\ldots j_a}=\omega^{i}_{j_1\ldots j_a}+\Gamma^{i}_{kj_1\ldots j_a}\,\omega^{k}+C^{i}_{Tj_1\ldots j_a}\Theta^{T}, \tag{41}$$

$$\overset{*}{\Theta}{}^{I}_{J_1\ldots J_b}=\Theta^{I}_{J_1\ldots J_b}+H^{I}_{kJ_1\ldots J_b}\,\omega^{k}+C^{I}_{TJ_1\ldots J_b}\,\Theta^{T}. \tag{42}$$

Эти формы на расслоенном пространстве $E(V_n,\ F,\ G,\ p,\ Z)$ определяют линейную дифференциально-геометрическую связность порядка $(p,\ q)$ тогда и только тогда, когда на нем задан дифференциально-геометрический объект следующей структуры (объект Γ^{I}_{k} имеет такую же структуру как и $\overset{\circ}{\Gamma}{}^{I}_{k}$):

$$\begin{gathered} d\Gamma^{i}_{kj_1\ldots j_a}-\Gamma^{i}_{tj_1\ldots j_a}\,\omega^{t}_{k}+\\ +\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\left\{\Gamma^{t}_{k(j_1\ldots j_s}\,\omega^{i}_{j_{s+1}\ldots j_a)t}-\omega^{t}_{(j_1\ldots j_s}\,\Gamma^{i}_{|k|j_{s+1}\ldots j_a)t}\right\}-\\ -C^{i}_{Tj_1\ldots j_a}\,\Theta^{T}_{k}-\omega^{i}_{kj_1\ldots j_a}-\Gamma^{i}_{skj_1\ldots j_a}\,\omega^{s}+\Gamma^{i}_{Tkj_1\ldots j_a}\,\Theta^{T}, \end{gathered} \tag{43}$$

$$\begin{gathered} dC^{i}_{Ij_1\ldots j_a}-C^{i}_{Tj_1\ldots j_a}\,\Theta^{T}_{I}+\\ +\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\left\{C^{t}_{I(j_1\ldots j_s}\,\omega^{i}_{j_{s+1}\ldots j_a)t}-\omega^{t}_{(j_1\ldots j_s}\,C^{i}_{|I|j_{s+1}\ldots j_a)t}\right\}=\\ =C^{i}_{kIj_1\ldots j_a}\,\omega^{k}+C^{i}_{TIj_1\ldots j_a}\,\Theta^{T}, \end{gathered} \tag{44}$$

$$dH^I_{kJ_1\ldots J_b}-H^I_{tJ_1\ldots J_b}\omega^t_k+$$
$$+\sum_{s=1}^{b}\frac{b!}{s!\,(b-s)!}\{H^T_{k(J_1\ldots J_s}\Theta^I_{J_{s+1}\ldots J_b)T}-\Theta^T_{(J_1\ldots J_s}H^I_{|k|J_{s+1}\ldots J_b)T}\}-$$
$$-C^I_{TJ_1\ldots J_b}\Theta^T_k-\Theta^I_{J_1\ldots J_bT}=H^I_{hkJ_1\ldots J_b}\omega^h+H^I_{kJ_1\ldots J_bT}\Theta^T, \tag{45}$$

$$dC^I_{KJ_1\ldots J_b}-C^I_{TJ_1\ldots J_b}\Theta^T_K+$$
$$+\sum_{s=1}^{b}\frac{b!}{s!\,(b-s)!}\{C^T_{K(J_1\ldots J_s}\Theta^I_{J_{s+1}\ldots J_b)T}-\Theta^T_{(J_1\ldots J_s}C^I_{|K|J_{s+1}\ldots J_b)T}-\Theta^I_{KJ_1\ldots J_b}=$$
$$=C^I_{hKJ_1\ldots J_b}\omega^h+C^I_{TKJ_1\ldots J_b}\Theta^T. \tag{46}$$

Этот объект называется объектом линейной дифференциально-геометрической связности двойного порядка $(p,\ q)$. Очевидно, что он имеет два подобъекта, т. е. объект линейной горизонтальной связности порядка p:

$$\Gamma^i_{kj_1\ldots j_a},\ C^i_{Tj_1\ldots j_a}\qquad (a=1,\ 2,\ \ldots,\ p)$$

и объект линейной вертикальной связности порядка q:

$$H^I_{kJ_1\ldots J_b}, C^I_{KJ_1\ldots J_b}\qquad (b=1,\ 2,\ \ldots,\ q).$$

Формы (41) и (42) можно переписать в виде

$$\overset{*}{\omega}{}^i_{j_1\ldots j_a}=\omega^i_{j_1\ldots j_a}+\overset{*}{\Gamma}{}^i_{kj_1\ldots j_a}\omega^k+C^i_{Tj_1\ldots j_a}\overset{*}{\Theta}{}^T, \tag{41'}$$

$$\overset{*}{\Theta}{}^I_{J_1\ldots J_a}=\Theta^I_{J_1\ldots J_a}+\overset{*}{H}{}^I_{kJ_1\ldots J_a}\omega^k+C^I_{TJ_1\ldots J_a}\overset{*}{\Theta}{}^T, \tag{42'}$$

где

$$\overset{*}{\Gamma}{}^i_{kj_1\ldots j_a}=\Gamma^i_{kj_1\ldots j_a}-C^i_{Tj_1\ldots j_a}\Gamma^T_k, \tag{47}$$

$$\overset{*}{H}{}^I_{kJ_1\ldots J_b}=H^I_{kJ_1\ldots J_b}-C^I_{TJ_1\ldots J_b}\Gamma^T_k. \tag{48}$$

Эти новые величины образуют самостоятельные дифференциально-геометрические объекты, т. е.

$$d\overset{*}{\Gamma}{}^i_{kj_1\ldots j_a}-\overset{*}{\Gamma}{}^i_{tj_1\ldots j_a}\omega^t_k+\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\{\overset{*}{\Gamma}{}^t_{k(j_1\ldots j_s}\omega^i_{j_{s+1}\ldots j_a)t}-$$
$$-\omega^t_{(j_1\ldots j_s}\overset{*}{\Gamma}{}^i_{|k|j_{s+1}\ldots j_a)t}\}-\omega^i_{kj_1\ldots j_a}=\overset{*}{\Gamma}{}^i_{hkj_1\ldots j_a}\omega^h+\overset{*}{\Gamma}{}^i_{Tkj_1\ldots j_a}\Theta^T, \tag{49}$$

$$d\overset{*}{H}{}^I_{kJ_1\ldots J_b}-\overset{*}{H}{}^I_{tJ_1\ldots J_b}\omega^t_k+\sum_{s=1}^{b}\frac{b!}{s!\,(b-s)!}\{\overset{*}{H}{}^T_{k(J_1\ldots J_s}\Theta^I_{J_{s+1}\ldots J_b)T}-$$
$$-\Theta^T_{(J_1\ldots J_s}\overset{*}{H}{}^I_{|k|J_{s+1}\ldots J_b)T}\}-\Theta^I_{J_1\ldots J_bk}=\overset{*}{H}{}^I_{hkJ_1\ldots J_b}\omega^h+\overset{*}{H}{}^I_{kJ_1\ldots J_bT}\Theta^T. \tag{50}$$

Найдем структурные уравнения расслоенного пространства со связностью. Из (1) и (41′) следует, что

$$D\omega^i-[\omega^k,\ \overset{*}{\omega}{}^i_k]=\mathfrak{R}^i_{kh}[\omega^k,\ \omega^h]+C^i_{Tk}[\overset{*}{\Theta}{}^T,\ \omega^k], \tag{51}$$

где $\mathfrak{R}^i_{kh} = \overset{*}{\Gamma}{}^i_{[kh]}$. Величины $\mathfrak{R}^i_{kh}$ и C^i_{Tk} образуют тензоры, первый из них будем называть тензором горизонтального кручения, а второй — тензором кручения. Дифференцируя внешним образом равенства (40), мы получим

$$D\overset{*}{\Theta}{}^I - [\overset{*}{\Theta}{}^K, \overset{*}{\Theta}{}^I_K] = \frac{1}{2}\mathfrak{R}^I_{kh}[\omega^k, \omega^h] + L^I_{Tk}[\omega^k, \overset{*}{\Theta}{}^T] + \mathfrak{R}^I_{KH}[\overset{*}{\Theta}{}^K, \overset{*}{\Theta}{}^H], \tag{52}$$

где

$$L^I_{Tk} = \overset{*}{H}{}^I_{kT} - \Gamma^I_{Tk}, \quad \mathfrak{R}^I_{KH} = C^I_{[KH]}.$$

Тензор L^I_{Tk} назовем простейшим тензором кривизны, а $\mathfrak{R}^I_{KH}$ — тензором вертикального кручения ($\mathfrak{R}^I_{kh}$ — тензор кривизны объекта Γ^I_k).

Дифференцируя (41′) и (42′), мы получим

$$D\overset{*}{\omega}{}^i_{j_1\ldots j_a} - \sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}[\overset{*}{\omega}{}^t_{(j_1\ldots j_s}, \overset{*}{\omega}{}^i_{j_{s+1}\ldots j_a)t}] =$$
$$= \frac{1}{2}\mathfrak{H}^i_{j_1\ldots j_a kh}[\omega^k, \omega^h] + \mathfrak{R}^i_{j_1\ldots j_a kT}[\omega^k, \overset{*}{\Theta}{}^T] + \frac{1}{2}\mathfrak{S}^i_{j_1\ldots j_a KH}[\overset{*}{\Theta}{}^K, \overset{*}{\Theta}{}^H], \tag{53}$$

$$D\overset{*}{\Theta}{}^I_{J_1\ldots J_b} - \sum_{s=1}^{b}\frac{b!}{s!\,(b-s)!}[\overset{*}{\Theta}{}^T_{(J_1\ldots J_s}, \overset{*}{\Theta}{}^I_{J_{s+1}\ldots J_b)T}] =$$
$$= \frac{1}{2}\mathfrak{L}^I_{J_1\ldots J_b kh}[\omega^k, \omega^h] + \mathfrak{M}^I_{J_1\ldots J_b kT}[\omega^k, \overset{*}{\Theta}{}^T] + \frac{1}{2}\mathfrak{N}^I_{J_1\ldots J_b KH}[\overset{*}{\Theta}{}^K, \overset{*}{\Theta}{}^H], \tag{54}$$

где

$$\mathfrak{H}^i_{j_1\ldots j_a kh} = 2\overset{\circ}{\nabla}_{[k}\overset{*}{\Gamma}{}^i_{h]j_1\ldots j_a} - \sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\{\overset{*}{\Gamma}{}^t_{k(j_1\ldots j_s}\overset{*}{\Gamma}{}^i_{|h|j_{s+1}\ldots j_a)t} -$$
$$-\overset{*}{\Gamma}{}^t_{h(j_1\ldots j_s}\overset{*}{\Gamma}{}^i_{|k|j_{s+1}\ldots j_a)t}\} + C^i_{Tj_1\ldots j_a}\mathfrak{R}^T_{kh}, \tag{55}$$

$$\mathfrak{S}^i_{j_1\ldots j_a KH} = 2C^i_{[KH]j_1\ldots j_a} - \sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\{C^t_{K(j_1\ldots j_s}C^i_{|H|j_{s+1}\ldots j_a)t} -$$
$$-C^t_{H(j_1\ldots j_s}C^i_{|K|j_{s+1}\ldots j_a)}\} + 2C^i_{Tj_1\ldots j_a}\mathfrak{R}^T_{KH}, \tag{56}$$

$$\mathfrak{R}^i_{j_1\ldots j_a kH} = \overset{\circ}{\nabla}_H\overset{*}{\Gamma}{}^i_{kj_1\ldots j_a} - C^i_{Tj_1\ldots j_a}\Gamma^T_{Hk} - \sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\{\overset{*}{\Gamma}{}^t_{k(j_1\ldots j_s}C^i_{|H|j_{s+1}\ldots j_a)t} -$$
$$-C^t_{H(j_1\ldots j_s}\overset{*}{\Gamma}{}^i_{|k|j_{s+1}\ldots j_a)t}\} + C^i_{Tj_1\ldots j_a}L^T_{Hk}, \tag{57}$$

$$\mathfrak{L}^I_{J_1\ldots J_b kh} = 2\overset{\circ}{\nabla}_{[k}\overset{*}{H}{}^I_{h]J_1\ldots J_b} - \sum_{s=1}^{b}\frac{b!}{s!\,(b-s)!}\{\overset{*}{H}{}^T_{k(J_1\ldots J_s}\overset{*}{H}{}^I_{|h|J_{s+1}\ldots J_b)T} -$$
$$-\overset{*}{H}{}^T_{h(J_1\ldots J_s}\overset{*}{H}{}^I_{|k|J_{s+1}\ldots J_b)T}\} + C^I_{TJ_1\ldots J_b}\mathfrak{R}^T_{kh}, \tag{58}$$

$$\mathfrak{N}^I_{J_1\ldots J_b KH} = 2C^I_{[KH]J_1\ldots J_b} -$$
$$-\sum_{s=1}^{b}\frac{b!}{s!\,(b-s)!}\{C^T_{K(J_1\ldots J_s}C^I_{|H|J_{s+1}\ldots J_b)T} - C^T_{H(J_1\ldots J_s}C^I_{|K|J_{s+1}\ldots J_b)T}\}, \tag{59}$$

$$\mathfrak{M}^I_{J_1\ldots J_b kH} = \overset{\circ}{\nabla}_k C^I_{HJ_1\ldots J_b} - \overset{*}{H}{}^I_{kJ_1\ldots J_b H} - C^I_{TJ_1\ldots J_b}\Gamma^T_{Hk} -$$
$$-\sum_{s=1}^{b}\frac{b!}{s!\,(b-s)!}\{\overset{*}{H}{}^T_{k(J_1\ldots J_s}C^I_{|T|J_{s+1}\ldots J_b)H} - C^T_{H(J_1\ldots J_s}\overset{*}{H}{}^I_{|k|J_{s+1}\ldots J_b)T}\} \tag{60}$$

и $\overset{\circ}{\nabla}_k$ — символ неголономной базисной производной относительно объекта Γ^i_k. Система величин $\mathfrak{H}^i_{j_1 \dots j_a kh}$ является решением системы

$$d\mathfrak{H}^i_{j_1 \dots j_a kh} - \mathfrak{H}^i_{j_1 \dots j_a th}\,\omega^t_k - \mathfrak{H}^i_{j_1 \dots j_a kt}\,\omega^t_h +$$

$$+ \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!\,(a-s)!} \{ \mathfrak{H}^t_{(j_1 \dots j_s \mid kh}\,\omega^i_{t \mid j_{s+1} \dots j_a)} - \omega^t_{(j_1 \dots j_s}\,\mathfrak{H}^i_{\mid t \mid j_{s+1} \dots j_a) kh} \} =$$

$$= \mathfrak{H}^i_{j_1 \dots j_a kh, l}\,\omega^l + \mathfrak{H}^i_{j_1 \dots j_a kh, T}\,\Theta^T, \tag{61}$$

т. е. образует линейный и однородный дифференциально-геометрический объект, который будем называть первым картановым объектом горизонтальной кривизны. Структура этого объекта такая же, как и полной неголономной базисной производной высшего порядка $\overset{*}{\nabla}_{j_a} \left(\overset{*}{\nabla}_{j_{a-1}} (\dots \overset{*}{\nabla}_{j_1} T^i_{kh}) \dots \right)$ от тензора T^i_{kh}. Аналогичную структуру имеют и дифференциально-геометрические объекты $\mathfrak{R}^i_{j_1 \dots j_a kH}$ и $\mathfrak{S}^i_{j_1 \dots j_a KH}$, которые будем называть, соответственно, вторым и третьим картановыми объектами горизонтальной кривизны.

Величины $\mathfrak{L}^I_{J_1 \dots J_b kh}$ являются решением системы

$$d\mathfrak{L}^I_{J_1 \dots J_b kh} - \mathfrak{L}^I_{J_1 \dots J_b th}\,\omega^t_k - \mathfrak{L}^I_{J_1 \dots J_b kt}\,\omega^t_h +$$

$$+ \sum_{s=1}^{b} \frac{b!}{s!\,(b-s)!} \{ \mathfrak{L}^T_{(J_1 \dots J_s \mid kh}\,\Theta^I_{T \mid J_{s+1} \dots J_b)} - \Theta^T_{(J_1 \dots J_s}\,\mathfrak{L}^I_{\mid T \mid J_{s+1} \dots J_b) kh} \} =$$

$$= \mathfrak{L}^I_{J_1 \dots J_b kh, t}\,\omega^t + \mathfrak{L}^I_{J_1 \dots J_b kh, T}\,\Theta^T, \tag{62}$$

т. е. образуют линейный и однородный дифференциально-геометрический объект (его структура такая же, как и многократно продолженного тензора T^I_{kh} относительно слоевых форм), который будем называть первым картановым объектом вертикальной кривизны. Объекты $\mathfrak{M}^I_{J_1 \dots J_b kH}$ и $\mathfrak{N}^I_{J_1 \dots J_b KH}$ имеют такую же структуру и их назовем, соответственно, вторым и третьим картановыми объектами вертикальной кривизны.

§ 7. Обобщенные тождества Бианки

Неголономные инвариантные производные объекта $\mathfrak{H}^i_{j_1 \dots j_a kh}$ мы получим, если систему дифференциальных уравнений этого объекта представим в виде

$$d\mathfrak{H}^i_{j_1 \dots j_a kh} - \mathfrak{H}^i_{j_1 \dots j_a th}\,\overset{*}{\omega}{}^t_k - \mathfrak{H}^i_{j_1 \dots j_a kt}\,\overset{*}{\omega}{}^t_k +$$

$$+ \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!\,(a-s)!} \{ \mathfrak{H}^t_{(j_1 \dots j_s \mid kh}\,\overset{*}{\omega}{}^i_{t \mid j_{s+1} \dots j_a)} - \overset{*}{\omega}{}^t_{(j_1 \dots j_s}\,\mathfrak{H}^i_{\mid t \mid j_{s+1} \dots j_a) kh} \} =$$

$$= \nabla_t \mathfrak{H}^i_{j_1 \dots j_a kh}\,\omega^t + \nabla_T \mathfrak{H}^i_{j_1 \dots j_a kh}\,\overset{*}{\Theta}{}^T, \tag{61'}$$

где (∇_t — символ неголономной инвариантной производной первого рода, а ∇_T — второго рода)

$$\nabla_t \mathfrak{H}^i_{j_1 \dots j_a kh} = \mathfrak{H}^i_{j_1 \dots j_a kh, t} - \mathfrak{H}^i_{j_1 \dots j_a sh}\,\overset{*}{\Gamma}{}^s_{tk} - \mathfrak{H}^i_{j_1 \dots j_a ks}\,\overset{*}{\Gamma}{}^s_{th} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!\,(a-s)!} \{ \mathfrak{H}^l_{(j_1 \dots j_s \mid kh}\,\overset{*}{\Gamma}{}^i_{tl \mid j_{s+1} \dots j_a)} - \overset{*}{\Gamma}{}^l_{(j_1 \dots j_s}\,\mathfrak{H}^i_{\mid tl \mid j_{s+1} \dots j_a) kh} \}$$

и

$$\nabla_T \mathfrak{H}^i_{j_1\dots j_a kh} = \mathfrak{H}^i_{j_1\dots j_a kh,\,T} - \mathfrak{H}^i_{j_1\dots j_a sh} C^s_{Tk} - \mathfrak{H}^i_{j_1\dots j_a ks} C^s_{Th} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!\,(a-s)!} \{ \mathfrak{H}^t_{(j_1\dots j_s|kh} C^i_{Tt|j_{s+1}\dots j_a)} - C^t_{(j_1\dots j_s} \mathfrak{H}^i_{|Tt|j_{s+1}\dots j_a)kh} \}, \qquad (64)$$

Обобщенные тождества Бианки мы получим дифференцируя внешним образом уравнения (51)—(54) и приравнивая нулю коэффициенты при внешних кубических формах, в которые входят формы ω^i и $\overset{*}{\Theta}{}^I$. Таких тождеств в нашем случае будет 15 групп:

1. $\nabla_{[h} \mathfrak{R}^i_{kl]} + 2\mathfrak{R}^i_{t[h} \mathfrak{R}^t_{kl]} + \frac{1}{2} C^i_{T[h} \mathfrak{R}^T_{kl]} - \frac{1}{2} \mathfrak{H}^i_{[hkl]} = 0,$

2. $\nabla_L \mathfrak{R}^i_{hk} - \nabla_{[h} C^i_{|L|k]} - 2\mathfrak{R}^i_{t[h} C^t_{|L|k]} - C^i_{Lt} \mathfrak{R}^t_{hk} - \mathfrak{R}^i_{[hk]T} = 0,$

3. $\nabla_{[K} C^i_{L]h} + C^i_{Th} \mathfrak{R}^T_{KL} - C^i_{[K|t|} C^t_{L]h} - \frac{1}{2} \mathfrak{S}^i_{hKL} = 0,$

4. $\frac{1}{2} \nabla_{[h} \mathfrak{R}^I_{kl]} + \mathfrak{R}^I_{t[h} \mathfrak{R}^t_{kl]} - \frac{1}{2} L^I_{T[h} \mathfrak{R}^T_{kl]} = 0,$

5. $\frac{1}{2} \nabla_L \mathfrak{R}^I_{hK} + \nabla_{[h} L^I_{|L|k]} - \mathfrak{R}^I_{t[h} C^t_{|L|k]} + L^I_{Lt} \mathfrak{R}^t_{hk} + L^I_{T[h} L^T_{|L|k]} + \mathfrak{R}^I_{TL} \mathfrak{R}^T_{hk} = 0,$

6. $\nabla_h \mathfrak{R}^I_{KH} - \nabla_{[K} L^I_{H]h} + L^I_{[K|t|} C^t_{H]h} - L^I_{Th} \mathfrak{R}^T_{KH} - \mathfrak{R}^I_{T[K} L^T_{H]h} - \mathfrak{R}^I_{T[K} L^T_{H]h} +$
   $+ \mathfrak{M}^I_{[K|h|H]} = 0,$

7. $\nabla_{[h} \mathfrak{R}^I_{KL]} + 2\mathfrak{R}^I_{T[H} \mathfrak{R}^T_{KL]} - \frac{1}{2} \mathfrak{N}^I_{[HKL]} = 0,$

8. $\frac{1}{2} \nabla_{[h} \mathfrak{H}^i_{|j_1\dots j_a|kl]} + \mathfrak{H}^i_{j_1\dots j_a t[h} \mathfrak{R}^t_{kl]} - \frac{1}{2} \mathfrak{R}^i_{j_1\dots j_a[h|T|} \mathfrak{R}^T_{kl]} = 0,$

9. $\frac{1}{2} \nabla_L \mathfrak{H}^i_{j_1\dots j_a hk} + \nabla_{[h} \mathfrak{R}^i_{|j_1\dots j_a|k]L} + \mathfrak{H}^i_{j_1\dots j_a t[h} C^t_{|L|k]} +$
   $+ \mathfrak{R}^i_{j_1\dots j_a tL} \mathfrak{R}^t_{hk} - \mathfrak{R}^i_{j_1\dots j_a[h|T} L^T_{L|k]} + \frac{1}{2} \mathfrak{S}^i_{j_1\dots j_a TL} \mathfrak{R}^T_{hk} = 0,$

10. $\nabla_{[K} \mathfrak{R}^i_{j_1\dots j_a h|L]} + \frac{1}{2} \nabla_h \mathfrak{S}^i_{j_1\dots j_a KL} + \mathfrak{R}^i_{j_1\dots j_a t[K} C^t_{L]h} -$
    $- \mathfrak{R}^i_{j_1\dots j_a hT} \mathfrak{R}^T_{KL} - \mathfrak{S}^i_{j_1\dots j_a T[K} L^T_{L]h} = 0,$

11. $\frac{1}{2} \nabla_{[H} \mathfrak{S}^i_{|j_1\dots j_a|KL]} + \mathfrak{S}^i_{j_1\dots j_a T[H} \mathfrak{R}^T_{KL]} = 0,$

12. $\frac{1}{2} \nabla_{[h} \mathfrak{L}^I_{|J_1\dots J_b|kl]} + \mathfrak{L}^I_{J_1\dots J_b t[h} \mathfrak{R}^t_{kl]} - \frac{1}{2} \mathfrak{M}^I_{J_1\dots J_b[h|T|} \mathfrak{R}^T_{kl]} = 0,$

13. $\frac{1}{2} \nabla_L \mathfrak{L}^I_{J_1\dots J_b hk} + \nabla_{[h} \mathfrak{M}^I_{|J_1\dots J_b|k]L} - \mathfrak{L}^I_{J_1\dots J_b t[h} C^t_{|L|k]} +$
    $+ \mathfrak{M}^I_{J_1\dots J_b tL} \mathfrak{R}^t_{hk} - \mathfrak{M}^I_{J_1\dots J_b h[T} L^T_{L|k]} + \frac{1}{2} \mathfrak{N}^I_{J_1\dots J_b TL} \mathfrak{R}^T_{hk} = 0,$

14. $\nabla_{[K} \mathfrak{M}^I_{|J_1\dots J_b h|L]} + \mathfrak{M}^I_{J_1\dots J_b t[K} C^t_{L]h} - \mathfrak{M}^I_{J_1\dots J_b hT} \mathfrak{R}^T_{KL} +$
    $+ \frac{1}{2} \nabla_h \mathfrak{N}^I_{J_1\dots J_b KL} + \mathfrak{N}^I_{J_1\dots J_b T[K} L^T_{L]h} = 0,$

15. $\frac{1}{2} \nabla_{[H} \mathfrak{N}^I_{|J_1\dots J_b|KL} + \mathfrak{N}^I_{J_1\dots J_b T[H} \mathfrak{R}^T_{KL]} = 0.$

Вильнюсский Государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
25.V.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Близникас, Неголономное дифференцирование Ли и линейные связности в пространстве опорных элементов, Лит. мат. сб., VI, № 2, 1966, 141—209.
2. В. И. Близникас, Линейные дифференциально-геометрические связности высшего порядка в пространстве опорных элементов, Изв. высш. учеб. зав., мат., 1966, № 5(54), 13—24.
3. Г. Ф. Лаптев, Многообразия, погруженные в обобщенные пространства, Труды IV всесоюзн. мат. съезда, Ленинград, 1964, 226—233.
4. Ю. Г. Лумисте, Связности в расслоениях с однородными слоями, Материалы II Прибалтийской геом. конф., Тарту, 1965, 112—114.
5. К. Номидзу, Группы Ли и дифференциальная геометрия, ИИЛ, Москва, 1960

APIE KAI KURIUOS IŠSLUOKSNIUOTŲ ERDVIŲ SĄRYŠIUS

V. BLIZNIKAS

(Reziumė)

Nagrinėjami išsluoksniuotų erdvių aukštesnės eilės tiesiniai sąryšiai ir jų kreivumo objektai.

ON THE SOME CONECTIONS OF FIBRE SPACES

V. BLIZNIKAS

(Summary)

The linear conections of higher order and their objects of curvature of the fibre spaces are considering.