LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 1, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 1, 1967

ПРОИЗВОДНАЯ ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ АНТАГОНИСТИЧЕСКОЙ ИГРЫ

Б. И. БУДРЕЙКА, Э. Й. ВИЛКАС

Пусть X и Y – множества чистых стратегий первого и второго игроков, $K(\xi, x, y)$ (ξ из некоторого интервала I, $x \in X$, $y \in Y$) – выигрыш первого игрока в ситуации (x, y). Пусть, далее, $\mathscr{F} = \{F\}$ и $\mathcal{G} = \{G\}$ – множества смешанных стратегий-вероятностных мер на X и Y. Не касаясь вопросов построения $\mathscr{F}$ и $\mathcal{G}$ и существования значения игры $v(\xi)$, мы рассмотрим дифференцируемость функции $v(\xi)$ и найдем выражение производной функции $v(\xi)$.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $K(\xi, x, y)$ ограничена по совокупности переменных ξ, x и y.

Лемма 1. *Если $K(\xi, x, y)$ дифференцируема по ξ для всех $x \in X$, $y \in Y$ и из множеств оптимальных стратегий $\mathscr{F}^*(\xi)$ и $\mathcal{G}^*(\xi)$ можно выделить функции $F^*(\xi, x)$ и $G^*(\xi, y)$, непрерывные по ξ для всех $x \in X$, $y \in Y$, то существует производная функции значения игры $v(\xi)$ и*

$$v'(\xi) = \int_X \int_Y K'(\xi, x, y) F^*(\xi, dx) G^*(\xi, dy).$$

Доказательство. В силу дифференцируемости $K(\xi)$ и непрерывности $F^*(\xi)$ и $G^*(\xi)$

$$v'(\xi) = \int_X \int_Y K(\xi, x, y) F^*(\xi, dx) G^*(\xi, dy) +$$

$$+ \lim_{h \to 0} \int_X \int_Y K(\xi, x, y) \left[\frac{F^*(\xi + h, dx) - F^*(\xi, dx)}{h} \right] G^*(\xi, dy) +$$

$$+ \lim_{h \to 0} \int_X \int_Y K(\xi, x, y) \left[\frac{G^*(\xi + h, dy) - G^*(\xi, dy)}{h} \right] F^*(\xi, dx).$$

Надо показать, что последние два предела существуют и равны нулю.

На основании того, что $F^*(\xi, x)$ – оптимальная стратегия первого игрока в точке ξ, а не $\xi + h$, можем написать

$$\int_X \int_Y K(\xi, x, y) F^*(\xi + h, dx) G^*(\xi, dy) \leqslant \int_X \int_Y K(\xi, x, y) F^*(\xi, dx) G^*(\xi, dy)$$

или

$$\int_X \int_Y K(\xi, x, y) \left[\frac{F^*(\xi + h, dx) - F^*(\xi, dx)}{h} \right] G^*(\xi, dy) \geqslant 0, \qquad h > 0, \tag{3}$$

и аналогично

$$\int_X \int_Y K(\xi + h, x, y) \left[\frac{F^*(\xi + h, dx) - F(\xi, dx)}{h} \right] G^*(\xi + h, dy) \leqslant 0, \quad h > 0.$$

В силу непрерывности по ξ функций K и G^* последнее неравенство можем переписать в виде

$$\int_X \int_Y K(\xi, x, y)\left[\frac{F^*(\xi+h, dx)-F^*(\xi, dx)}{h}\right] G^*(\xi, dy) \leqslant 0, \qquad h>0. \tag{4}$$

Из неравенств (3) и (4) для $h>0$ получаем:

$$\varliminf_{h\to 0} \int_X \int_Y K(\xi, x, y)\left[\frac{F^*(\xi+h, dx)-F^*(\xi, dx)}{h}\right] G^*(\xi, dy) \geqslant 0,$$

$$\varlimsup_{h\to 0} \int_X \int_Y K(\xi, x, y)\left[\frac{F^*(\xi+h, dx)-F^*(\xi, dx)}{h}\right] G^*(\xi, dy) \leqslant 0.$$

Такие же соотношения получаются и для $h<0$. Для этого только следует брать верхний предел в неравенстве (3) и нижний – в неравенстве (4). Следовательно, существуют и равен нулю

$$\lim_{h\to 0} \int_X \int_Y K(\xi, x, y)\left[\frac{F^*(\xi+h, dx)-F^*(\xi, dx)}{h}\right] G^*(\xi, dy).$$

Совершенно аналогично рассматривается и второй предел

$$\lim_{h\to 0} \int_X \int_Y K(\xi, x, y)\, F^*(\xi, dx)\left[\frac{G^*(\xi+h, dy)-G^*(\xi, dy)}{h}\right].$$

Лемма 2. *Если функция $K(\xi, x, y)$ непрерывна по $\xi \in I$ равномерно для всех $x \in X$ и $y \in Y$ и для каждого ξ существуют такие $F^*(\xi) \in \mathscr{F}^*(\xi)$ и $G^*(\xi) \in \mathscr{G}^*(\xi)$, что их носители мер X_0 и Y_0 не зависят от ξ, то существуют $F^*(\xi)$ и $G^*(\xi)$, непрерывные по ξ для всех $x \in X$ и $y \in Y$.*

Доказательство. Для всех $y \in Y_0$ в силу оптимальности F^*

$$\int_{X_0} K(\xi, x, y)\, F^*(\xi, dx) = v(\xi). \tag{5}$$

Пусть для всех $x \in X_1 \subset X_0$ функция $F^*(\xi)$ имеет разрыв в точке ξ_0 и X_1 имеет положительную $F^*(\xi_0)$ – меру. Перепишем (5) в виде

$$\int_{X_1} K(\xi, x, y)\, F^*(\xi, dx) + \int_{X_0 \setminus X_1} K(\xi, x, y)\, F^*(\xi, dx) = v(\xi).$$

Функции $F^*(\xi)$ для $x \in X_0 \setminus X_1$, $v(\xi)$ и $K(\xi)$ непрерывны, причем $K(\xi)$ равномерно по x и y. Поэтому непрерывна и функция

$$u(\xi) = v(\xi) - \int_{X_0 \setminus X_1} K(\xi, x, y)\, F^*(\xi, dx),$$

т. е. непрерывна функция

$$\int_{X_1} K(\xi, x, y)\, F^*(\xi, dx). \tag{6}$$

Но в силу разрывности функции $F^*(\xi, x)$, $x \in X_1$, в точке ξ_0 интеграл (6) также имеет разрыв в точке ξ_0, если только $K(\xi_0, x, y) \neq 0$ при $x \in X_1$. Так как оптимальные стратегии инвариантны относительно сдвига функции выигрыша, то это предположение всегда можно считать выполненным.

Полученное противоречие доказывает лемму.

Теорема. *Если $K(\xi, x, y)$ непрерывно дифференцируема по $\xi \in I$ для всех $x \in X$, $y \in Y$, то прсизводная значения игры $v'(\xi)$ существует и*

$$v'(\xi) = \int_X \int_Y K'(\xi, x, y)\, F^*(\xi, dx)\, G^*(\xi, dy) \tag{7}$$

для всех ξ, за исключением, может быть, некоторого множества, состоящего из изолированных точек.

Доказательство. Рассмотрим пары множеств $A \subset X$ и $B \subset Y$, для которых существуют $F \in \mathscr{F}$ и $G \in \mathcal{G}$, носителем мер которых являются соответственно A и B и для некоторого $w(A, B, \xi)$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} w(A, B, \xi) &= \int_X K(\xi, x, y)\, F(\xi, dx), \qquad y \in B, \\ w(A, B, \xi) &= \int_Y K(\xi, x, y)\, G(\xi, dy), \qquad x \in A. \end{aligned} \tag{8}$$

Функция $w(A, B, \xi)$ дифференцируема непрерывно всюду, где она существует.

Множество A назовем существенным в точке ξ, если существует такое $F^*(\xi) \in \mathscr{F}^*(\xi)$, что A является его носителем меры. Аналогично определим существенное B. Множества A и B существенны в точке ξ и $w(A, B, \xi) = v(\xi)$ тогда и только тогда, когда для всех A' и B'

$$w(A', B, \xi) \leqslant w(A, B, \xi) \leqslant w(A, B', \xi). \tag{9}$$

Леммы 1 и 2 позволяют утверждать, что $v'(\xi)$ существует всюду, где неравенства (9) не меняют знака при существенных A и B.

Если множество тех ξ, для которых существенны некоторые A и B, всюду плотно в каком-нибудь интервале, то в силу непрерывности $w(A, B, \xi)$ и (9) множества A и B существенны во всем этом интервале.

Пусть ξ_0 является предельной точкой множества тех ξ, для которых производная функции $v(\xi)$ не существует. Из доказанного следует, что это может иметь место только тогда, если можно выделить систему интервалов I_n, длина которых и расстояние до точки ξ_0 стремится к нулю и в каждом из I_n существенна система, возможно, бесконечная, множеств $\{A_\alpha\}$ и $\{B_\alpha\}$. Точнее, для любого α из некоторого множества и $n = 1, 2, \ldots$ должно существовать такое $\xi_\alpha^{(n)} \in I_n$, что только A_α и B_α существенны в точке $\xi_\alpha^{(n)}$. По теореме о среднем значении отсюда следует, что

$$w'(A_\alpha, B_\alpha, \xi_0) = w'(A_\beta, B_\beta, \xi_0) \tag{10}$$

для всех α и β.

В точке ξ_0 существенны все A_α, B_α. Поэтому

$$v(\xi_0 + h) - v(\xi_0) = w(A_\alpha, B_\alpha, \xi + h) - w(A_\alpha, B_\alpha, \xi),$$

когда в точке $\xi+h$ существенны A_α и B_α. Отсюда

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\ \frac{v(\xi_0+h)-v(\xi_0)}{h}=\max_\alpha w'(A_\alpha,\ B_\alpha,\ \xi_0),$$

$$\underline{\lim_{h\to 0}}\ \frac{v(\xi_0+h)-v(\xi_0)}{h}=\min_\alpha w'(A_\alpha,\ B_\alpha,\ \xi_0).$$

Последние соотношения и (10) показывают, что $v'(\xi_0)$ существует.

Теорема доказана.

Мы хотим обратить внимание на то, что условие непрерывной дифференцируемости функции $K(\xi)$ не может быть заменено простой дифференцируемостью. Для этого мы построим пример с дифференцируемой $K(\xi)$ и недифференцируемым на множестве меры $\mu(I)-\varepsilon$ значением игры.

Перенумеруем каким-нибудь образом все рациональные точки интервала $I=[0,\ 1]$. Точками первого сорта x_n назовем точки, имеющие четное число единиц в двоичной записи, точками второго рода – точки с нечетным числом единиц. Обозначим

$$I_n=\left(x_n-\frac{\varepsilon}{2^n},\quad x_n+\frac{\varepsilon}{2^n}\right).$$

Очевидно, $\sum_n \mu(I_n)=2\varepsilon$. Из системы интервалов $\{I_n\}$ нетрудно сделать систему непересекающихся интервалов $\{I'_n\}$.

Рассмотрим игру, в которой I игрок имеет две чистые стратегии, а II – одну. Пусть соответствующие выигрыши $f(\xi)$ и $g(\xi)$. Пусть, далее, для точек (точнее, интервалов) первого рода

$$f(\xi)>g(\xi),\quad \xi\in I'_n,$$

а для точек второго рода

$$f(\xi)<g(\xi),\quad \xi\in I'_n.$$

Положим

$$f(\xi)=g(\xi)\quad \text{для}\quad \xi\in I\setminus\cup I'_n.$$

Кроме того, в каждом интервале первого рода I'_n положим $g(\xi)=0$ и $f(\xi)=0$ во второго рода интервалах. Функции $f(\xi)$ и $g(\xi)$ всегда можем подобрать дифференцируемыми причем так, что

$$\inf_{\xi\in I'_n} f'(\xi)=a_1<0,$$

$$\sup_{\xi\in I'_n} f'(\xi)=a_2>0,$$

$$\inf_{\xi\in I'_n} g'(\xi)=b_1<0,$$

$$\sup_{\xi\in I'_n} g'(\xi)=b_2>0$$

соответственно в первого и второго рода интервалах. Теперь непосредственно убеждаемся, что для $\xi\in I\setminus\cup I'_n$ производная функции $v(\xi)$ не существует:

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\ \frac{v(\xi+h)-v(\xi)}{h}=\max\{0,\ \sup f'(\xi),\ \sup g'(\xi)\}>0,$$

$$\underline{\lim_{h\to 0}}\ \frac{v(\xi+h)-v(\xi)}{h}=\min\{0,\ \inf f'(\xi),\ \inf g'(\xi)\}<0.$$

В интервалах I'_n $v'(\xi)$ равна либо $f'(\xi)$, либо $g'(\xi)$.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
18.VII.1966

PARAMETRINIO ANTAGONISTINIO LOŠIMO REIKŠMĖS IŠVESTINĖ

B. BUDREIKA, E. VILKAS

(Reziumė)

Pateikiama lošimo reikšmės išvestinės formulė ir įrodoma teorema apie lošimo reikšmės diferencijuotumą.

THE DERITATIVE OF THE VALUE OF PARAMETRIC ANTAGONISTIC GAME

B. BUDREIKA, E. VILKAS

(Summary)

There is given the formula for derivative of game value and the theorem on differentiability of this value.