LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 1, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 1, 1967

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОБОБЩЕННЫХ АВТОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ И КРАЕВАЯ ЗАДАЧА КАРЛЕМАНА

В. КАБАЙЛА

1. В статье рассматриваются условия разрешимости системы:

$$f(S_k z)=a_k f(z)+b_k, \quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n \quad (a_k\neq 0), \tag{1}$$

где S_k – дробно,-линейные преобразования, порождающие фуксову или элементарную группу G (употребляются термины, используемые в работах [1] и [2]), a_k и b_k – константы. Мероморфные в области D группы G (т. е. внутри неподвижной окружности в случае фуксовой группы и во всей комплексной плоскости, за исключением предельных точек группы в случае элементарной группы) решения системы (1) в случае $b_k=0$ ($k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$) являются зета-функциями, существование которых при естественных ограничениях доказал Г. Пуанкаре [3]. В случае $a_k=1$ и $b_k=0$ ($k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$) мероморфные в области D решения системы (1) являются автоморфными функциями. В работах П. И. Мирберга [4], [5] и [6] рассматриваются различные обобщения зета-функций и вопросы, связанные с существованием голоморфных решений системы (1) (и более общих систем) для некоторых групп дробно-линейных преобразований. В случае, когда $n=2$, $S_1 z=z+\alpha$, $S_2 z=z+\beta$ и $b_1=b_2=0$, мероморфными решениями системы (1) являются эллиптические функции II-ого рода [7]. В ряде работ [8–12] исследованы системы более общего вида, чем (1), но с целыми линейными преобразованиями вида $z+\alpha_k$.

В настоящей статье указаны необходимые и достаточные условия совместности системы (1) и связь между задачей решения системы (1) и граничной задачей Карлемана [13], [14]. При этом, решение системы (1) приводится к решению некоторого интегрального уравнения со сдвигом и с разрывными коэффециентами. Кроме того, доказываются некоторые вспомогательные предложения, облегчающие исследование полученного интегрального уравнения.

В дальнейшем тексте статьи везде буквой G обозначается фуксова или элементарная группа дробно-линейных преобразований, S_k ($k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$) – генерирующие преобразования группы G, D – область группы G.

2. Как известно (см. [1], [2]), для группы $G=\{S_i\}$ ($i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ S_0=E$ – единичное преобразование) существует такое разбиение области D на фундаментальные области R_i, что удовлетворяются следующие условия: 1) каждой фундаментальной области R_i соответствует преобразование S_i группы G, в частности области R_0 соответствует единичное преобразование; 2) если $z\in R_0$, то $S_i z\in R_i$, т. е. $S_i R_0=R_i$; 3) в любой фундаментальной области R_i не существует ни одной пары точек, конгруэнтных друг другу, т. е. не существует таких точек z_1, $z_2\in R_i$, что $Sz_1=z_2$ для некоторого $S\in G$. При том

можно считать, что фундаментальная область R_0 группы G ограничена контуром γ, составленным из n пар гладких дуг (дуг окружностей), называемых сторонами области R_0: $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2n}$ (и, возможно, из некоторых дуг неподвижной окружности группы G, если G — фуксова группа II-ого рода). Стороны γ_k можно так пронумеровать, чтобы преобразование S_k ($k=1, 2, \ldots, n$) отображало сторону γ_{n+k} в γ_k (т. е. $S_k\gamma_{n+k}=\gamma_k$ и $S_k^{-1}\gamma_k=\gamma_{n+k}$). Стороны γ_k и γ_{n+k} называются сопряженными сторонами. Концы дуг γ_k называются вершинами области R_0 и обозначаются $c_1, c_2, \ldots, c_\nu$. Вершины пронумерованы произвольно.

Если R_i — другая фундаментальная область и $S_iR_0=R_i$, то сторона $S_i\gamma$ области R_i называется соответствующей стороне γ_i области R_0. Аналогично определяются соответствующие вершины.

Между преобразованиями группы G могут существовать зависимости, которые получаются как следствие и конечного числа m ($m \leqslant 2n$) фундаментальных зависимостей:

$$S_1^{(k)}S_2^{(k)} \ldots S_r^{(k)}=E, \quad k=1, 2, \ldots, m; \quad r=r(k), \tag{2}$$

где $S_j^{(k)}$ — некоторые преобразования из $S_1, S_2, \ldots, S_n, S_1^{-1}, S_2^{-1}, \ldots, S_n^{-1}$.

Как известно [1], все фундаментальные зависимости можно получить следующим образом.

Выбираем произвольно вершину c_k области R_0, лежащую внутри D (если такая вершина существует) и проводим вокруг нее окружность ω достаточно малого радиуса, чтобы внутри и на этой окружности не было других вершин, кроме c_k. Выбираем произвольно направление на окружности ω. Эта окружность в выбранном направлении будет пересекать, начиная с области R_0, последовательно некоторые фундаментальные области и стороны этих областей. Проследим, каким преобразованиям группы G соответствуют пересекаемые окружностью ω фундаментальные области.

Пусть ω переходя из области R_0 в лимитропную фундаментальную область $R_1^{(k)}$ (т. е. в фундаментальную область, которая имеет общую сторону с R_0) пересекает сторону $\gamma_1^{(k)}$ области R_0. Преобразование $S_1^{(k)}$, отображающее сторону области R_0, сопряженную со стороной $\gamma_1^{(k)}$, в $\gamma_1^{(k)}$, будет отображать R_0 в $R_1^{(k)}$. Пусть дальше окружность ω, переходя из области $R_1^{(k)}$ в область R_{α_2}, пересекает сторону области $R_1^{(k)}$, соответствующую стороне $\gamma_2^{(k)}$ области R_0 (т. е. сторону $S_1^{(k)}\gamma_2^{(k)}$, где $S_1^{(k)}R_0=R_1^{(k)}$) и пусть преобразование $S_2^{(k)}$ отображает сторону области R_0, сопряженную со стороной $\gamma_2^{(k)}$, в $\gamma_2^{(k)}$. Тогда преобразование $S_1^{(k)}S_2^{(k)}$ будет отображать область R_0 в R_{α_2} (т. е. $S_1^{(k)}S_2^{(k)}=S_{\alpha_2}$). Переходя из области R_{α_2} в R_{α_3} окружность ω пусть пересекает сторону области R_{α_2}, соответствующую стороне $\gamma_3^{(k)}$ области R_0 (сторону $S_{\alpha_2}\gamma_3^{(k)}$) и пусть преобразование $S_3^{(k)}$ отображает сторону области R_0, сопряженную со стороной $\gamma_3^{(k)}$, в $\gamma_3^{(k)}$. Тогда преобразование $S_1^{(k)}S_2^{(k)}S_3^{(k)}$ будет отображать R_0 в R_{α_3} и т. д. Пусть, наконец, окружность ω, переходя из области $R_{\alpha_{r-1}}$ в область $R_{\alpha_r}=R_0$, пересекает сторону области $R_{\alpha_{r-1}}$, соответствующую стороне $\gamma_r^{(k)}$ области R_0 (сторону $S_{\alpha_{r-1}}\gamma_r^{(k)}$ и пусть преобразование $S_r^{(k)}$ отображает сторону области R_0, сопряженную со стороной $\gamma_r^{(k)}$, в $\gamma_r^{(k)}$.

Тогда преобразование $S_1^{(k)} S_2^{(k)} \ldots S_r^{(k)}$будет отображать R_0 в $R_{\alpha_r} = R_0$ т. е. область R_0 в себя. Поэтому

$$S_1^{(k)} S_2^{(k)} \ldots S_r^{(k)} = E.$$

Таким образом, для каждой вершины c_k области R_0, если только c_k не является граничной точкой области D, получается соотношение вида (2). Из этих соотношений могут быть получены все другие зависимости между преобразованиями группы G [1].

В дальнейших рассуждениях будем считать, что равенства (2) получены вышеописанным образом.

Если все вершины R_0 лежат на границе D, то зависимостей вида (2) между преобразованиями группы G не существует.

Фундаментальную область R_0, к которой присоединены точки сторон $\gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}, \ldots, \gamma_{2n}$ за исключением вершин, будем называть полузамкнутой фундаментальной областью и будем обозначать R_0'. Множество $S_i R_0'$ $(S_i \in G)$ будем называть полузамкнутой фундаментальной областью R_i'.

Область, которая получается из области D группы G после исключения всех вершин фундаментальных областей, будем дальше везде обозначать D'.

Определение. *Система* (1) *называется совместной в области* D', *если для любой функции* $\varphi(z)$, *однозначно определенной в какой либо полузамкнутой фундаментальной области* R_i', *существует однозначное (принимающее конечные или бесконечные значения) и определенное во всей области* D' *решение системы* (1), *совпадающее с функцией* $\varphi(z)$ *в* R_i'.

Очевидно, если в системе (1) хотя бы одна из констант a_k равна нулю, то система (1) несовместна в области D'.

Докажем, что определение совместности системы (1) в области D' не зависит от выбора фундаментальной области R_i'. Для этого достаточно доказать следующее: *если для любой функции* $\varphi(z)$, *определенной в* R_i', *существует в области* D' *однозначное решение системы* (1), *совпадающее с* $\varphi(z)$ *в* R_i', *то и для любой однозначной функции* $\psi(z)$, *определенной в* R_0', *существует в области* D' *однозначное решение системы* (1), *совпадающее с* $\psi(z)$ *в* R_0'.

Пусть для любой функции $\varphi(z)$, определенной в R_i', существует решение $f(z)$ системы (1), совпадающее с $\varphi(z)$ в R_i'. Пусть $S_i = S_{\alpha_1} S_{\alpha_2} \ldots S_{\alpha_p}$ — одно из возможных выражений преобразования S_i $(S_i R_0' = R_i')$ через генерирующие и обратные им преобразования, т. е. или $S_{\alpha_j} = S_k$, или $S_{\alpha_j} = S_k^{-1}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Если $f(z)$ — решение системы (1), то из одного уравнения $f(S_k z) = a_k f(z) + b_k$ системы (1) получается:

$$f(S_{\alpha_j} z) = a_{\alpha_j} f(z) + b_{\alpha_j},$$

где

$a_{\alpha_j} = a_k$ и $b_{\alpha_j} = b_k$, если $S_{\alpha_j} = S_k$, и $a_{\alpha_j} = \frac{1}{a_k}$, $b_{\alpha_j} = -\frac{b_k}{a_k}$, если $S_{\alpha_j} = S_k^{-1}$.

Тогда:

$$\left.\begin{aligned} &f(S_{\alpha_1} z) = a_{\alpha_1} f(z) + b_{\alpha_1}, \\ &f(S_{\alpha_1} S_{\alpha_2} z) = a_{\alpha_1} f(S_{\alpha_2} z) + b_{\alpha_1} = a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} f(z) + b_{\alpha_1} + a_{\alpha_1} b_{\alpha_2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f(S_{\alpha_1} S_{\alpha_2} \ldots S_{\alpha_p} z) = a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \ldots a_{\alpha_p} f(z) + b_{\alpha_1} + \sum_{j=2}^{p} a_{\alpha_1} \ldots a_{\alpha_{j-1}} b_{\alpha_j}. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Пусть теперь $\psi(z)$ – любая функция, определенная в R'_0. Определим функцию $\varphi(z)$ в области R'_i с помощью равенства, аналогичного равенству (3):

$$\varphi(S_{\alpha_1} S_{\alpha_2} \ldots S_{\alpha_p} z) = a_{\alpha_1} \ldots a_{\alpha_p} \psi(z) + b_{\alpha_1} + \sum_{j=2}^{p} a_{\alpha_1} \ldots a_{\alpha_{j-1}} b_{\alpha_j}, \quad z \in R'_0. \qquad (3')$$

Пусть $f(z)$ – однозначное решение системы (1) в области D', совпадающее с $\varphi(z)$ в R'_i. Тогда из равенств (3) и (3′) получится, что $f(z) = \psi(z)$ в области R'_0, что и требовалось доказать.

Теорема. *Если не существует зависимостей вида* (2) *между преобразованиями группы G, то система* (1) *совместна в области D'. Если же между преобразованиями группы G существуют зависимости вида* (2), *то для того, чтобы система* (1) *была совместной в области D', необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись следующие условия:*

$$a_1^{(k)} a_2^{(k)} \ldots a_r^{(k)} = 1 \qquad (4)$$

и

$$b_1^{(k)} + a_1^{(k)} b_2^{(k)} + a_1^{(k)} a_2^{(k)} b_3^{(k)} + \ldots + a_1^{(k)} \ldots a_{r-1}^{(k)} b_r^{(k)} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, m, \qquad (5)$$

где числа $a_j^{(k)}$ и $b_j^{(k)}$ получаются при выражении $f(S_j^{(k)} z)$ из одного уравнения системы (1) *через $f(z)$:*

$$f(S_j^{(k)} z) = a_j^{(k)} f(z) + b_j^{(k)}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, r). \qquad (6)$$

Кроме того, если система (1), *будучи совместной или не совместной в D', имеет однозначное решение $f(z)$ в области D', то*

$$f(z) \equiv a_1^{(k)} \ldots a_r^{(k)} f(z) + b_1^{(k)} + \sum_{j=2}^{r} a_1^{(k)} \ldots a_{j-1}^{(k)} b_j^{(k)}, \qquad z \in D'. \qquad (7)$$

Доказательство. Пусть существует однозначное решение $f(z)$ системы (1). Тогда

$$\left.\begin{aligned} & f(S_1^{(k)} z) = a_1^{(k)} f(z) + b_1^{(k)}, \\ & f(S_1^{(k)} S_2^{(k)} z) = a_1^{(k)} f(S_2^{(k)} z) + b_1^{(k)} = a_1^{(k)} a_2^{(k)} f(z) + b_1^{(k)} + a_1^{(k)} b_2^{(k)}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & f(S_1^{(k)} S_2^{(k)} \ldots S_r^{(k)} z) = \\ & = a_1^{(k)} \ldots a_r^{(k)} f(z) + b_1^{(k)} + a_1^{(k)} b_2^{(k)} + a_1^{(k)} a_2^{(k)} b_3^{(k)} + \cdots + a_1^{(k)} \ldots a_{r-1}^{(k)} b_r^{(k)} \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

для любого $z \in D'$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$. Так как $S_1^{(k)} S_2^{(k)} \ldots S_r^{(k)} = E$, то из (8) следует (7).

Если система (1) совместна в D', то (7) равенство должно выполняться в какой либо полузамкнутой фундаментальной области R' для произвольных функций $f(z)$, а это возможно только при выполнении равенств (4) и (5).

Пусть теперь удовлетворены равенства (4) и (5) и пусть $\varphi(z)$ – произвольная функция, определенная в полузамкнутой фундаментальной области R'_0. Определим $f(z) = \varphi(z)$ для $z \in R'_0$. Пусть z_1 – произвольная точка области D' и пусть z_0 – точка из R'_0, конгруэнтная точке z_1. Определим функцию $f(z)$ в точке z_1 следующим образом. Соединим точки z_0 и z_1 жордановой кривой l', лежащей в области D' и пересекающей в конечном числе точек границы фундаментальных областей. Пусть кривая l', переходя из R'_0 в лимитропную фундаментальную область R'_α, пересекает сторону γ'_1 области R_0 и пусть S'_1 — преобразование, соответствующее стороне γ'_1 (т. е. отображающее сторону, сопряженную с γ'_1, в γ'_1). Тогда $S'_1 R'_0 = R'_{\alpha_1}$. Определим значения функции $f(z)$ в области R'_{α_1} с помощью одного равенства из системы (1):

$$f(S'_1 z) = a'_1 f(z) + b'_1, \qquad z \in R'_0, \tag{9}$$

где $a'_1 = a_k$, $b'_1 = b_k$, если $S'_1 = S_k$, т. е. равенство (9) совпадает с k-тым равенством из системы (1), или $a'_1 = \frac{1}{a_k}$, $b'_1 = -\frac{b_k}{a_k}$, если $S'_1 = S_k^{-1}$, т. е. равенство (9) совпадает с равенством, получаемым из k-того равенства системы (1) заменой z на $S_k^{-1} z$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Будем называть таким образом определенные в R'_{α_1} значения функции $f(z)$ „временными". Пусть дальше кривая l', переходя из области R'_{α_1} в лимитропную область R'_{α_2}, пересекает сторону области R_{α_1}, соответствующую стороне γ'_2 области R_0 (т. е. сторону $S'_1 \gamma'_2$) и пусть стороне γ'_2 соответствует преобразование S'_2. Тогда преобразование $S'_1 S'_2$ отображает R'_0 в R'_{α_2}. Определим временные значения функции $f(z)$ в области R'_{α_2} с помощью двух равенств: равенства (9) и одного равенства из системы (1), которое соответствует преобразованию S'_2, т. е.

$$f(S'_1 S'_2 z) = a'_1 f(S'_2 z) + b'_1 = a'_1 [a'_2 f(z) + b'_2] + b'_1 = a'_1 a'_2 f(z) + b'_1 + a'_1 b'_2, \tag{10}$$

где $a'_2 = a_l$, $b'_2 = b_l$, если $S'_2 = S_l$ и $a'_2 = \frac{1}{a_l}$, $b'_2 = -\frac{b_l}{a_l}$, если $S'_2 = S_l^{-1}$ $(1 \leqslant l \leqslant n)$. Пусть дальше кривая l' переходя из области R'_{α_2} в лимитропную область R'_{α_3}, пересекает сторону области R_{α_2}, соответствующую стороне γ'_3 области R_0 (т. е. сторону $S'_1 S'_2 \gamma'_3$) и пусть стороне γ'_3 соответствует преобразование S'_3. Тогда $S'_1 S'_2 S'_3 R'_0 = R'_\alpha$. Определим временные значения $f(z)$ в R'_{α_3} с помощью равенства (10) и одного равенства из системы (1):

$$\begin{aligned} f(S'_1 S'_2 S'_3 z) &= a'_1 a'_2 f(S'_3 z) + b'_1 + a'_1 b'_2 = a'_1 a'_2 [a'_3 f(z) + b'_3] + b'_1 + a'_1 b'_2 = \\ &= a'_1 a'_2 a'_3 f(z) + b'_1 + a'_1 b'_2 + a'_1 a'_2 b'_3, \qquad z \in R'_0, \end{aligned} \tag{11}$$

где $a'_3 = a_m$, $b'_3 = b_m$, если $S'_3 = S_m$, и $a'_3 = \frac{1}{a_m}$, $b'_3 = -\frac{b_m}{a_m}$, если $S'_3 = S_m^{-1}$ $(1 \leqslant m \leqslant n)$. Таким образом последовательно опеделяя временные значения функции $f(z)$ в полузамкнутых фундаментальных областях, через которые проходит кривая l', после конечного числа шагов определим временные значения функции $f(z)$ в полузамкнутой фундаментальной области

$$R'_{\alpha_q} = S'_1 S'_2 \ldots S'_q R'_0,$$

содержащей точку z_1:

$$\left.\begin{aligned} &f(S'_1 S'_2 \ldots S'_q z) = \\ &= a'_1 \ldots a'_q f(z) + b'_1 + a'_1 b'_2 + a'_1 a'_2 b'_3 + \cdots + a'_1 \ldots a'_{q-1} b'_q = \\ &= a' f(z) + b', \qquad z \in R'_0, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

где $a'_k = a_j$, $b'_k = b_j$, если $S'_k = S_j$, и $a'_k = \frac{1}{a_j}$, $b'_k = -\frac{b_j}{a_j}$, если $S'_k = S_j^{-1}$ $(1 \leqslant k \leqslant q$, $1 \leqslant j \leqslant n)$.

Описанный способ определения значения $f(z_1)$ будем называть продолжением функции вдоль кривой l'. Полученное временное значение $f(z_1)$ определяется как значение (уже не временное) $f(z_1)$. После этого все временные значения $f(z)$ „отбрасываются", т. е. $f(z)$ считаетстя не определенной в тех точках, в которых определили только временные значения.

Покажем, что описанное определение $f(z_1)$ не зависит от выбранного пути продолжения функции $f(z)$.

Выбираем произвольно на кривой l' две точки: ζ_1 и ζ_2. Дугу кривой l' между ζ_1 и ζ_2 обозначаем σ'. Заменим дугу σ' другой жордановой дугой $\boldsymbol{\sigma}'$, соединяющей точки ζ_1 и ζ_2 и не имеющей других общих точек с дугой σ', так, чтобы внутренность кривой $\sigma' + \boldsymbol{\sigma}'$ не содержала вершин фундаментальных областей. Полученную из l' заменой σ' на σ' кривую обозначим $\bar{l}'$. Очевидно, что значение функции $f(z_1)$, полученное продолжением функции $f(z)$ вдоль кривой $\bar{l}'$, совпадает со значением функции, полученным продолжением вдоль l'. Описанное изменение кривой назовем допустимым изменением.

Пусть теперь l'' – другая жорданова кривая, соединяющая z_0 с z_1 ($l'' \subset D'$). Заменим какую нибудь дугу σ'' кривой l'' другой дугой $\bar{\sigma}''$ так, чтобы: 1) σ'' и $\bar{\sigma}''$ имели общие концы, 2) σ'' и $\bar{\sigma}''$ не имели других общих точек, 3) внутренность замкнутой кривой $\sigma'' + \boldsymbol{\sigma}''$ содержала ровно одну вершину какой либо фундаментальной области. Такое изменение кривой l'' назовем элементарным изменением. Очевидно, кривую l'' с помощью конечного числа допустимых и элементарных изменений можно заменить кривой l'.

Остается доказать, что значение функции $f(z_1)$, получаемое продолжением функции $f(z)$ вдоль кривой l'' не изменится, если заменить кривую l'' новой кривой $\bar{l}''$, получаемой из l'' с помощью элементарного изменения.

Пусть $\bar{l}''$ получается из l'' заменой дуги σ'' на $\bar{\sigma}''$ и внутри замкнутой кривой $\sigma'' + \bar{\sigma}''$ находится вершина c какой либо фундаментальной области. Пусть временные значения $f(z)$ определены вдоль общей части кривых l'' и $\bar{l}''$ до начальной точки ζ_1 дуг σ'' и $\bar{\sigma}''$. Продолжим $f(z)$ вдоль дуги $\bar{\sigma}''$ до конечной точки ζ_2 и получим значение $f(\zeta_2)$. Дальше продолжим $f(z)$ вдоль σ'' от ζ_2 до ζ_1. Если полученное новое временное значение $f(z)$ в точке ζ_1 совпадает с исходным значеннием в этой точке, то и продолжая в обратном направлении $f(z)$ вдоль дуги σ'' от ζ_1 до ζ_2 (с помощью тех же равенств (1), как и при продолжении от ζ_2 до ζ_1) мы получим прежнее значение функции $f(z)$ в точке ζ_1, т. е. продолжение $f(z)$ не будет зависеть от того, продолжаем мы вдоль σ'', или вдоль $\bar{\sigma}''$.

Остается показать, что продолжая $f(z)$ от точки ζ_1 вдоль замкнутой дуги $\sigma'' + \bar{\sigma}''$ мы придем к исходному значению $f(\zeta_1)$. С помощью допустимого изменения кривую $\sigma'' + \bar{\sigma}''$ можем заменить окружностью ω с центром в точке c и достаточно малым радиусом.

Пусть $c = Sc_k$, где $S \in G$ и c_k – одна из вершин области R_0' и пусть в некоторой точке Sz ($z \in R_0'$) окружности ω, а, тем самым, и во всей полузамкнутой области SR_0', уже определены значения функции $f(z)$. Так как значения $f(z)$ в области SR_0' определяются равенствами вида (12), то

$$f(Sz) = a_S f(z) + b_S, \qquad z \in R_0',$$

где a_S и b_S — некоторые определенные константы. Продолжая дальше функцию $f(z)$ вдоль окружности ω получим:

$$f(SS_1^{(k)}z)=a_S a_1^{(k)}f(z)+b_S+a_S b_1^{(k)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{aligned} f(SS_1^{(k)}\ldots S_r^{(k)}z)&=a_S a_1^{(k)}\ldots a_r^{(k)}f(z)+b_S+a_S b_1^{(k)}+\cdots+a_S a_1^{(k)}\ldots a_{r-1}^{(k)}b_r^{(k)}=\\ &=a_S[a_1^{(k)}\ldots a_r^{(k)}f(z)+b_1^{(k)}+\cdots+a_1^{(k)}\ldots a_{r-1}^{(k)}b_r^{(k)}]+b_S, \end{aligned}$$

$(z\in R_0')$, где $f(SS_1^{(k)}\ldots S_r^{(k)}z)$ означает новое значение функции $f(z)$, полученное после однократного обхода вершины c. Но из (4) и (5) получается, что $f(SS_1^{(k)}\ldots S_1^{(k)}z)=f(Sz)$, т. е. значение $f(z)$ после однократного продолжения вдоль ω остается таким же, как исходное значение $f(z)$. Отсюда и следует, что элементарные изменения кривой l'' не изменяют значения $f(z_1)$.

Таким образом, определение функции $f(z)$ в области D' не зависит от пути, вдоль которого определяем значения $f(z)$.

Остается доказать, что определенная нами функция $f(z)$ удовлетворяет системе (1).

Пусть $z\in SR_0'$ и $z=Sz_0$ $(z_0\in R_0')$. Докажем, что

$$f(S_k z)=a_k f(z)+b_k,\qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Так как определение функции $f(z)$ не зависит от пути продолжения, то можно считать, что значения функции $f(z)$ в точке $S_k z$ области $S_k SR_0'$ получены продолжением функции $f(z)$ из R_0' вдоль кривой l, проходящей последовательно области: R_0', $S_k R_0'$, $S_k S_1' R_0'$, $S_k S_1' S_2' R_0'$, $\ldots$, $S_k S_1' S_2'\ldots S_q' R_0'$, где $S_1' S_2'\ldots S_q'=S$. Тогда

$$\begin{aligned} f(S_k z)&=f(S_k Sz_0)=f(S_k S_1' S_2'\ldots S_q' z_0)=\\ &=a_k a_1' a_2'\ldots a_q' f(z_0)+b_k+a_k b_1'+a_k a_1' b_2'+\cdots+a_k' a_1'\ldots a_{q-1}' b_q'=\\ &=a_k[a_1' a_2'\ldots a_q' f(z_0)+b_1'+a_1' b_2'+\cdots+a_1'\ldots a_{q-1}' b_q']+b_k=\\ &=a_k f(Sz_0)+b_k=a_k f(z)+b_k. \end{aligned}$$

Этим и заканчивается доказательство теоремы.

Замечание. Если для какого либо $k=k_0$ не удовлетворяется равенство (4), то равенство (7) определяет функцию $f(z)$. Если ни одна функция $f(z)$, определенная из равенств (7), не является решением системы (1), то однозначные решения не существуют.

Следует объяснить, почему в определении совместной системы вершины фундаментальных областей исключаются. Это объясняется тем, что в вершине c, которая является неподвижной точкой эллиптического преобразования S группы G, решения системы (1) должны удовлетворять некоторым условиям:

$$f(c)=f(Sc)=a_S f(c)+b_S,$$

т. е. не могут быть выбраны произвольно. Однако, так как нас интересуют мероморфные решения системы (1), то этим дополнительным условиям всегда можно удовлетворить, полагая, что решение $f(z)$ системы (1) в точке c имеет полюс.

3. Рассмотрим мероморфную в фундаментальной области R_0 функцию $f(z)$. Граничными значениями функции $f(z)$ в точке $t \in \gamma$ (γ — контур R_0) будем называть число

$$f^+(t) = \lim_{\substack{z \to t \\ z \in R_0}} f(z),$$

если предельное значение не зависит от пути, вдоль которого $z \to t$.

Лемма 1. *Пусть в фундаментальной области R_0 определена мероморфная функция $F(z)$, которая в каждой точке границы γ области R_0, за исключением конечного числа точек $t_1, t_2, \ldots, t_m \in \gamma$ (среди которых находятся и все вершины области R_0) имеет конечные граничные значения, а в точках t_j удовлетворяет условиям:*

$$F(z) = O(|z - t_j|^{-\alpha_j}), \quad z \in R_0, \quad \alpha_j > 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{13}$$

Если для граничных значений функции $F(z)$ справедливы равенства:

$$F^+(S_k t) = a_k F^+(t) + b_k, \quad t \in \gamma_{k+n}, \quad t \neq t_j, \tag{14}$$

($k = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$), *и числа a_k и b_k удовлетворяют условиям совместности* (4) *и* (5), *то существует единственное мероморфное в области D решение $f(z)$ системы* (1), *совпадающее с функцией $F(z)$ в области R_0. Если, кроме того, в соотношениях* (13) $0 < \alpha_j < 1$ ($j = 1, 2, \ldots, m$) *и $F(z)$ — голоморфная в области R_0, то существует единственное голоморфное в области D решение $f(z)$ системы* (1), *совпадающее с функцией $F(z)$ в области R_0.*

Доказательство. Определим $f(z) = F(z)$ для $z \in R_0$ и $f(t) = F^+(t)$ для $t \in \gamma$, $t \neq t_j$ ($j = 1, 2, \ldots, m$). Таким образом определенная функция будет непрерывной (в широком смысле) в замкнутой области $\overline{R_0}$, за исключением, быть может, точек t_j ($j = 1, 2, \ldots, m$). Так как условия совместности удовлетворены, то решение системы (1) определяется во всей области D, за исключением, быть может, точек t_j и точек, конгруэнтных t_j, равенствами вида $f(Sz) = a' f(z) + b'$ ($z \in R_0'$, $S \in G$) где a и b' — константы, определяемые как в равенстве (12) и зависящие от выбора преобразования s.

Рассмотрим какую либо фундаментальную область $S_k R_0$, лимитропную с R_0, т. е. имеющую общую сторону γ_k с R_0. Тогда $f(S_k z) = a_k f(z) + b_k$, и, так как функция, записанная в правой части равенства — мероморфная (или голоморфная) в точках $z \in R_0$, то и функция в левой части равенства — мероморфная (или голоморфная) в области $S_k R_0$. Кроме того, для любой точки $t \in \gamma_k$, $t \neq t_j$ ($j = 1, 2, \ldots, m$) из равенства (14), очевидно, получается:

$$\lim_{\substack{z \to t \\ z \in S_k R_0}} f(z) = \lim_{\substack{z \to t \\ z \in R_0}} f(z).$$

Следовательно $f(z)$ — мероморфная (или голоморфная) и на дуге γ_{n+k}, за исключением, быть может, точек t_j. Аналогично устанавливается мероморфность (голоморфность) функции $f(z)$ в любой замкнутой фундаментальной области $\overline{SR_0}$ за изключением, быть может, точек t_j и точек, конгруэнтных t_j. Итак, $f(z)$ — мероморфная (голоморфная) и однозначная в области D, за исключением, быть может, точек St_j $(j=1, 2, \ldots, m;\ S\in G)$.

Точки $St_j\,(S\in G)$ являются изолированными особыми точками однозначной аналитической функции. Но любая точка St_j не может быть существенно особой точкой, так как $f(z)=O(|z-t_j|^{-\alpha_j})$, $\alpha_j>0$ и $f(Sz)=a'f(z)+b'$. Следовательно точка St_j — полюс или поправимая особая точка функции $f(z)$. Таким образом $f(z)$ — мероморфное решение системы (1), совпадающее с $F(z)$ в области R_0.

Если, кроме того, $0<\alpha_j<1$ и $F(z)$ — голоморфная в области R_0, то точка St_j не может быть и полюсом, так как

$$\lim_{z\to St_j}(z-St_j)f(z)=0$$

и, следовательно, в точке St_j существует конечный предел $\lim\limits_{z\to St_j} f(z)$. Определяя, как обычно, $f(St_j)=\lim\limits_{z\to St_j} f(z)$, получим голоморфную в области D функцию $f(z)$, удовлетворяющую системе (1) в области D, за исключением точек St_j. Переходя к пределу в равенствах (1), когда $z\to St_j$, можно убедиться, что функция $f(z)$ удовлетворяет равенствам (1) и в точках St_j.

Единственность решения, совпадающего в R_0 с заданной функцией $F(z)$, очевидна.

Таким образом, задача отыскания всех мероморфных решений системы (1) эквивалентна задаче отыскания всех мероморфных в области R_0 функций $F(z)$, удовлетворяющих на границе γ условиям леммы 1. Задачу отыскания таких функций перефразируем следующим оброзом.

Введем обозначения:

$$\alpha(t)=\begin{cases} S_k t, & \text{если } t\in\gamma_{n+k} \\ S_k^{-1} t, & \text{если } t\in\gamma_k, \quad k=1, 2, \ldots, n, \end{cases} \tag{15}$$

$$G(t)=\begin{cases} a_k, & \text{если } t\in\gamma_{n+k}, \\ \dfrac{1}{a_k}, & \text{если } t\in\gamma_k, \quad k=1, 2, \ldots, n, \end{cases} \tag{16}$$

$$g(t)=\begin{cases} b_k, & \text{если } t\in\gamma_{n+k}, \\ -\dfrac{b_k}{a_k}, & \text{если } t\in\gamma_k, \quad k=1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{17}$$

Теперь задачу можно сформулировать так: *найти мероморфные в области R_0 функции $F(z)$, удовлетворяющие на границе γ условиям*:

$$F^+[\alpha(t)]=G(t)\,F^+(t)+g(t), \quad t\in\gamma, \tag{18}$$

за исключением конечного числа точек t_j границы γ, в которых

$$F(z)=O(|z-t_j|^{-\alpha_j}), \quad \alpha_j>0.$$

Так сформулированная задача является граничной задачей, называемой в литературе задачей Карлемана (библиографию и исторические справки см. в [15] и [16]), однако функции $\alpha(t)$, $G(t)$ и $g(t)$ не удовлетворяют обычным для этой задачи условиям гладкости. Эту задачу можно привести к задаче решения интегрального уравнения со сдвигом, кусочно-гладкими коэффициентами и кусочно-гладким ядром.

4. Из определения функций $\alpha(t)$, $G(t)$ и $g(t)$ следуют такие легко проверяемые соотношения:

$$\alpha[\alpha(t)] \equiv t, \tag{19}$$

$$G[\alpha(t)] \cdot G(t) \equiv 1, \tag{20}$$

$$G(t)\, g[\alpha(t)] + g(t) \equiv 0, \qquad t \in \gamma, \quad t \neq t_j. \tag{21}$$

В рассматриваемом случае задачи Карлемана основная лемма, с помощью которой в статье [14] решается эта задача для гладкой $\alpha(t)$ (с производной, удовлетворяющей условию Гельдера) и непрерывных $G(t)$ и $g(t)$, следует из простых свойств автоморфных функций. Сформулируем эту лемму для рассматриваемого случая задачи.

Лемма 2. *Если голоморфная в фундаментальной области R_0 группы G функция $F(z)$ для всех точек t, принадлежащих границе γ области R_0, за исключением конечного числа точек t_j $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ t_j \in \gamma)$, удовлетворяет граничному условию:*

$$F^+[\alpha(t)] = F^+(t) \tag{22}$$

(где $\alpha(t)$ определяется равенством (15)), *а в точках t_j — условию $F(z) = O(|z-t_j|^{-\alpha_j})$, $0 < \alpha_j < 1$, то она равна постоянной.*

Доказательство. Очевидно, условия совместности (4) и (5) соответствующей системы (1) $(a_k = 1,\ b_k = 0,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ выполнены, и решением этой системы, в силу леммы 1, будет однозначная голоморфная во всей области, D группы G автоморфная функция, совпадающая с $F(z)$ в области R_0. Но голоморфная в D автоморфная функция тождественно равна постоянной, следовательно и $F(z) \equiv c$.

Дальше будем рассматривать, для простоты, случай, когда фундаментальная область R_0 группы G и ее граница γ не содержат бесконечно удаленной точки и предельных точек группы. Пусть $F(z)$ — мероморфное решение системы (1) и, тем самым, граничной задачи (18). Так как γ не содержит предельных точек группы, то $F(z)$ может иметь лишь конечное число полюсов в области R_0, поэтому существует такая рациональная функция $R(z)$, что $F(z) - R(z)$ будет голоморфной в R_0 и на γ. Следовательно,

$$F(z) = R(z) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\, d\tau, \tag{23}$$

где функция $\varphi(\tau) = F(\tau) - R(\tau)$ — непрерывная (в узком смысле) на контуре γ.

Пусть теперь условия совместности (4) и (5) системы (1) удовлетворены, но решение задачи (18) не известно. Будем искать решения в форме (23), считая $R(z)$ — произвольно заданной рациональной функцией, а $\varphi(\tau)$ —

искомой функцией. Подставляя предельные граничные значения функции (23), получаемые из формул Сохоцкого—Племеля, в (18) получим:

$$\frac{1}{2} G(t)\varphi(t)-\frac{1}{2}\varphi[\alpha(t)]+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\left[\frac{G(t)}{\tau-t}-\frac{1}{\tau-\alpha(t)}\right]\varphi(\tau)\,d\tau=$$

$$=R[\alpha(t)]-G(t)\,R(t)-g(t), \tag{24}$$

для $t\in\gamma$, $t\neq t_j$ $(j=1, 2, \ldots, m)$. Если $\varphi(t)$ — решение уравнения (24) в классе H^* (определение класса H^* см. в [15]), то функция

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,dt$$

будет удовлетворять в точках t_j условиям $f(z)=O(|z-t_j|^{-\alpha_j})$, $0<\alpha_j<1$, и функция $F(z)=R(z)+f(z)$ — условиям леммы 1. Следовательно, будет существовать решение системы (1), совпадающее с $F(z)$ в области R_0. И наоборот: если $F(z)$ — решение системы (1), то $F(z)$ удовлетворяет равенству (18) и, тем самым, функция $\varphi(t)=F(t)-R(t)$ удовлетворяет уравнению (24). Следовательно, совместная система (1) эквивалентна сингулярному интегральному уравнению (24).

Вильнюсский Государственный университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию 30.VI.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Poincaré. Théorie des groupes fuchsiens, Acta Math., 1882, t. 1.
2. Л. Р. Форд, Автоморфные функции, М.—Л., 1936.
3. H. Poincaré, Mémoire sur les fonctions zétafuchosiennes, Acta Math., t. 5, 1884.
4. P. J. Myrberg, Über eine Verallgemeinerung der linearen Differenzengleichungen, Annales Acad. sc. Fennicae, A, 24, Nr. 3, 1924.
5. P. J. Myrberg, Sur une généralisation des equations linéaires aux differences finies, C. R., 179, 1924.
6. P. J. Myrberg, Sur les fonctions automorphes à multiplicateurs exponentiels, Journal de mathématiques pures et appliquées, t. 35, f. 3, 1956.
7. P. Appel, E. Lacour, Principes de la théorie des fonctions eliptiques et applications, Paris, 1922.
8. А. Г. Нафталевич, О системе двух линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами, Мат. сб., т. 46 (88): 4, 1958.
9. А. Г. Нафталевич, О системе двух разностных уравнений, Мат. сб., т. 47 (89): 1, 1959.
10. А. Г. Нафталевич, Об одной системе разностных уравнений, Мат. сб. т. 51 (93): 3, 1960.
11. А. Г. Нафталевич, О системе линейных разностных уравнений, Мат. сб. т. 54 (96): 1, 1961.
12. А. Г. Нафталевич, Обобщение одной теоремы Эрмина, Лит. мат. сб., V. 4, 1965.
13. T. Carleman, Sur la theorie des équations intégrales et ses applications, Verhandlung des Internat. Math. Kongr., 1932, Zürich, Bd. I.
14. Д. А. Квеселава, Решение одной граничной задачи Т. Карлемана, Докл. АН СССР, т. 55, № 8, 1947.
15. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М., 1962.
16. Ф. Д. Гахов, Краевые задачи, М., 1963.

APIBENDRINTŲ AUTOMORFINIŲ FUNKCIJŲ EGZISTAVIMO SĄLYGOS IR KARLEMANO KRAŠTINIS UŽDAVINYS

V. KABAILA

(Reziumė)

Straipsnyje nagrinėjama sistema:

$$f(S_k z) = a_k f(z) + b_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

kur S_k — trupmeninės tiesinės transformacijos, generuojančios grupę G, a_k ir b_k — konstantos. Gaunamos būtinos ir pakankamos sąlygos, kad (1) sistema būtų suderinta, ir nurodomas sąryšis tarp (1) sistemos ir Karlemano kraštinio uždavinio. Gaunama ekvivalentiška (1) sistemai singuliarinė integralinė lygtis su netolydiniais koeficientais ir su argumento postūmiu.

DIE EXISTENZBEDINGUNGEN DER VERALLGEMEINERTEN AUTOMORPHEN FUNKTIONEN UND EINE RANDWERTAUFGABE CARLEMANS

V. KABAILA

(Zusammenfassung)

In der Arbeit wird folgendes Gleichungssystem untersucht:

$$f(S_k z) = a_k f(z) + b_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

wo $S_k z = \dfrac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}$ — die linearen Transformationen, die eine Gruppe generieren, a_k und b_k — gegebene Konstanten sind. Die Arbeit enthält die notwendigen und hinreichenden Bedingugen für die Existenz einer Lösung des Systems (1) und eine Integralgleichung die ein Äquivalent des Systems (1) ist.