LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 1, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 1, 1967

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ НОРМАЛЬНОГО ЗАКОНА СВОЙСТВОМ НЕЦЕНТРАЛЬНОГО ХИ-КВАДРАТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

А. М. КАГАН, О. В. ШАЛАЕВСКИЙ

Пусть $X_1, \ldots, X_n$, $n \geqslant 2$, – независимые случайные величины, распределенные по одному и тому же нормальному закону с параметрами $(0, \sigma^2)$. Известно, что в этом случае распределение нецентральной хи-квадрат статистики

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i + a_i)^2$$

зависит от $a_1, \ldots, a_n$ только через параметр нецентральности $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2$.

Ю. В. Линник высказал предположение о том, что сформулированное выше свойство нормального закона является характеристическим. Нижеследующая теорема показывает, что это действительно так.

Теорема. *Если для независимых одинаково распределенных величин $X_1, \ldots, X_n$, $n \geqslant 2$, распределение статистики $\chi^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (X_i + a_i)^2$ зависит только от $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2$, где $a_i \in R^1$, то величины X_i нормальны.*

Доказательство. Введем функцию

$$\psi(a) = Ee^{-(X_i + a)^2}. \tag{1}$$

Очевидно, $\psi(a) > 0$ и $\psi(a)$ дважды дифференцируема при всех a. По условию теоремы

$$Ee^{-\sum\limits_{i=1}^{n} (X_i + a_i)^2} = \prod_{i=1}^{n} Ee^{-(X_i + a_i)^2} = \prod_{i=1}^{n} \psi(a_i) = \Psi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right). \tag{2}$$

Пусть $h(a) = \ln \psi(a)$, $H(a) = \ln \Psi(a)$. Из (2) получаем

$$\sum_{i=1}^{n} h(a_i) = H\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right). \tag{3}$$

Дифференцируя это равенство по a_1, а затем по a_2, мы будем иметь при всех $a_1, \ldots, a_n$

$$H''\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) = 0.$$

Таким образом

$$H(a) = c_1 a + c_2$$

и поэтому из (1) и (3)

$$\psi(a)=\int e^{-(x+a)^2}dF(x)=e^{c_1a^2+c_3}, \tag{4}$$

где

$$F(x)=P(X_i<x).$$

Теперь положим

$$e^{-x^2}dF=dG. \tag{5}$$

Тогда (4) запишется в виде

$$\int e^{-2ax}dG(x)=e^{c_4a^2+c_3}.$$

Отсюда по теореме единственности для преобразования Лапласа

$$dG=c_5e^{c_6x^2}dx$$

при некоторых c_5 и c_6. Но тогда из (5) следует, что и $F(x)$ – функция распределения нормального закона. Теорема доказана.

Авторы признательны Ю. В. Линнику за постановку задачи, а также А. А. Зингеру за полезное замечание, упростившее первоначальное доказательство.

Ленинград

Поступило в редакцию
10.X.1966

NORMALINIO DĖSNIO CHARAKTERIZAVIMAS NECENTRINIO χ^2-PASISKIRSTYMO SAVYBĖS PAGALBA

A. KAGANAS, O. ŠALAJEVSKIS

(Reziumė)

Įrodoma, kad necentrinės χ^2-statistikos pasiskirstymas priklauso nuo parametro necentrališkumo tiktai tada, jei nepriklausomas pavyzdys yra paimtas iš normalinės generalinės aibės.

CHARACTERIZATION OF NORMAL LAW BY A PROPERTY OF THE NON-CENTRAL χ^2- DISTRIBUTION

A. KAGAN, O. SHALAEVSKY

(Summary)

It is proved that the distribution of non-central χ^2-statistic depends on non-central parameter only if the independent sample is drawn from a normal population.