LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 1, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 1, 1967

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Б. КВЕДАРАС

В статье [1] была рассмотрена краевая задача с интегральными условиями для систем дифференциальных уравнений первого порядка. Были найдены некоторые достаточные условия существования и единственности решения для нелинейных систем. В настоящей статье рассматривается аналогичная задача для систем второго порядка.

Для линейных систем получены необходимые и достаточные условия существования и единственности решения. Они аналогичны известным (см., напр., [2]) условиям разрешимости точечных краевых задач. Построен сопряженный оператор и доказан аналог альтернативы Фредгольма.

Для нелинейных систем, выработанными в статьях [1, 3] методами, получены некоторые достаточные условия существования и единственности решения краевой задачи.

§ 1. Обобщенные нормированные пространства

В n-мерном векторном пространстве E_n с элементами $\xi=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ введем полуупорядоченность соотношением:

$$\xi\leqslant\eta, \text{ если } \xi_i\leqslant\eta_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Линейное множество E элементов x назовем обобщенным линейным нормированным пространством, если каждому элементу $x\in E$ можно поставить в соответствие неотрицательный вектор $\|x\|^{(n)}=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ из n-мерного векторного пространства E_n, называемый вектор-нормой элемента x и обладающий свойствами:

1. $\|x\|^{(n)}=0$, *эквивалентно* $x=0$;
2. $\|\lambda x\|^{(n)}=|\lambda|\,\|x\|^{(n)}$ *при любом комплексном числе* λ;
3. $\|x+y\|^{(n)}\leqslant\|x\|^{(n)}+\|y\|^{(n)}$.

Пусть S^1 и S^2 две квадратные матрицы с элементами s_{ij}^1 и s_{ij}^2 $(i, j=1, 2, \ldots, n)$. Будем говорить, что $S^1\leqslant S^2$, если $s_{ij}^1\leqslant s_{ij}^2$ при всех $i, j=1, 2, \ldots, n$. В частности, если $S\geqslant 0\,(S>0)$ то матрицу S назовем неотрицательной (положительной).

Пусть A — линейный оператор в E. Верхней гранью оператора A называется неотрицательная матрица S, удовлетворяющая условию

$$\|Ax\|^{(n)}\leqslant S\,\|x\|^{(n)}.$$

Наименьшая из верхних граней (если такая существует) называется *матрицей-нормой оператора* A ($\|A\|^{(n)}=\inf S$).

Матрицу S с неотрицательными элементами, все собственные числа которой меньше единицы, назовем a-матрицей.

Лемма 1. *Для того, чтобы неотрицательная матрица S была а-матрицей, необходимо и достаточно, чтобы главные миноры матрицы $I-S$ были положительными (I единичная матрица).*

Лемма 2. *Пусть S является а-матрицей. Тогда в векторном пространстве E_n можно ввести такое скалярное произведение $(\xi, \eta)^{(0)}$, чтобы им порожденная числовая норма $\|\cdot\|^{(0)}$ обладала свойствами:*

1. $\|S\xi\|^{(0)} \leqslant q\|\xi\|^{(0)}$ $(q<1)$

и

2. *если* $0 \leqslant \xi \leqslant \eta$, *то* $\|\xi\|^{(0)} \leqslant \|\eta\|^{(0)}$.

Доказательство первой леммы очевидно, а второй можно найти в [3].

Введем обозначения:

$C^{(n)}$ – обобщенное нормированное пространство непрерывных на отрезке $[0, T]$ вектор-функций $x(t)=\left(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\right)$ с вектор-нормой

$$\|x(t)\|_C^{(n)}=\left(\max_{0\leqslant t\leqslant T}|x_1(t)|, \ldots, \max_{0\leqslant t\leqslant T}|x_n(t)|\right);$$

$H_p^{(n)}$ – обобщенное нормированное пространство вектор-функций $x(t)$ с компонентами $x_i(t)$, определенными и суммируемыми с $p_i \geqslant 1$ степенью на отрезке $[0, T]$ функциями и вектор-нормой

$$\|x\|_p^{(n)}=\left(\left[\int_0^T |x_1(t)|^{p_1}dt\right]^{\frac{1}{p_1}}, \ldots, \left[\int_0^T |x_n(t)|^{p_n}dt\right]^{\frac{1}{p_n}}\right).$$

Результат применения линейного функционала α из сопряженного пространства E^* к элементу x из обобщенного нормированного пространства E обозначим через $\langle x, \alpha\rangle$. Очевидно, что пространство E^* тоже является обобщенным нормированным пространством. В частности, сопряженным к $H_p^{(n)}$ суть пространство $H_{p'}^{(n)}$, где

$$p=(p_1, \ldots, p_n),\ p'=(p'_1, \ldots, p'_n),\ \frac{1}{p_i}+\frac{1}{p'_i}=1,\ 1\leqslant p_i<\infty,$$

причем

$$\langle x, \alpha\rangle=\sum_{i=1}^{n}\int_0^T x_i(t)\overline{\alpha_i(t)}\,dt.$$

§ 2. Линейные системы

1. Постановка вопроса. Пусть на отрезке $[0, T]$ задано n^2 измеримых и ограниченных функций $a_{ij}(t)$ $(i, j=1, 2, \ldots, n)$. $A(t)$ – квадратная матрица с элементами $a_{ij}(t)$. Рассмотрим векторное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2}-A(t)x=f(t). \tag{1}$$

Предполагая, что $f(t)\in H_p^{(n)}$, будем искать решения $x(t)$ этого уравнения, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned}&\langle x, \alpha^k\rangle=0,\\ &\langle x, \beta^k\rangle=0,\end{aligned} \tag{2}$$

где α^k и β^k $(k=1, 2, \ldots, n)$ линейно независимые функционалы определенные на $H_p^{(n)}$, т.е. функции из пространства $H_{p'}^{(n)}$.

Пусть $H_{p2}^{(n)}$ – линейное множество пространства $H_p^{(n)}$, состоящее из всех абсолютно непрерывных функций $x(t)$, имеющих абсолютно непрерывные первые и принадлежащие пространству $H_p^{(n)}$ вторые производные. Очевидно, то $H_{p2}^{(n)}$ всюду плотно в $H_p^{(n)}$.

На множестве $D(L)$, состоящем из функций $x(t) \in H_{p2}^{(n)}$ и удовлетворяющих условиям (2), определим оператор L формулой

$$Lx = \frac{d^2 x}{dt^2} - A(t)x.$$

Легко видеть, что оператор L замкнут, а его область определения – множество $D(L)$ не плотно в $H_p^{(n)}$.

2. Условия разрешимости. Из определения оператора L непосредственно вытекает, что задача (1) – (2) эквивалентна операторному уравнению

$$Lx = f, \tag{3}$$

поэтому в дальнейшем мы не будем различать решения задачи (1) – (2) от решений уравнения (3).

Пусть $\varphi^i(t)$, $\psi^i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ – фундаментальная система решений однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - A(t)x = 0. \tag{4}$$

Через $X(t)$ и $Y(t)$ обозначим матрицы, столбцами которых являются вектор-функции $\varphi^i(t)$ и $\psi^i(t)$ соответственно. Общее решение уравнения (3) имеет вид:

$$x(t) = X(t)c + Y(t)c', \tag{5}$$

где c и c' произвольные постоянные векторы.

Пусть $X(0) = \dot{Y}(0) = I$, $\dot{X}(0) = Y(0) = 0$. Обозначим:

$$Z(t,s) = Y(t)Y^{-1}(s) - X(t)X^{-1}(s),$$

$$Z(t) = \dot{Y}(t)Y^{-1}(t) - \dot{X}(t)X^{-1}(t),$$

$$V(t_1 s) = \begin{cases} \frac{1}{2} Z(t,s)Z^{-1}(s), & \text{если } s \leqslant t, \\ -\frac{1}{2} Z(t,s)Z^{-1}(s), & \text{если } s \geqslant t. \end{cases}$$

Тогда, методом вариации постоянных (см., напр., [4]), из (5) получаем любое решение уравнения (1). Оно имеет вид:

$$x(t) = X(t)c + Y(t)c' + \int_0^T V(t,s)f(s)\,ds. \tag{6}$$

Потребуем, чтобы это решение удовлетворяло условиям (2). Применяя к нему функционалы α^k и β^k получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных c и c':

$$\langle Xc + Yc' + Vf, \ \alpha^k \rangle = 0,$$

$$\langle Xc + Yc' + Vf, \ \beta^k \rangle = 0$$

или

$$\langle c, \ X^* \alpha^k \rangle + \langle c', \ Y^* \alpha^k \rangle + \langle Vf, \ \alpha^k \rangle = 0,$$

$$\langle c, \ X^* \beta^k \rangle + \langle c', \ Y^* \beta^k \rangle + \langle Vf, \ \beta^k \rangle = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Запишем ее в развернутой форме

$$\sum_{i=1}^{n} \langle \varphi^i, \alpha^k \rangle c_i + \sum_{i=1}^{n} \langle \psi^i, \alpha^k \rangle c_i' + \langle Vf, \alpha^k \rangle = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \langle \varphi^i, \beta^k \rangle c_i + \sum_{i=1}^{n} \langle \psi^i, \beta^k \rangle c_i' + \langle Vf, \beta^k \rangle = 0. \qquad (7)$$

Матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных c_i и c'_i, обозначим через B, а расширенную матрицу с добавлением столбца из элементов $\langle Vf, \alpha^k \rangle$ и $\langle Vf, \beta^k \rangle$ – через $\tilde{B}$. Через Δ обозначим определитель системы (7), т.е. $\Delta = \det B$.

Так как (см., напр., [5]) разрешимость задачи (1) – (2) эквивалентна разрешимости системы (7), то очевидными рассуждениями получаем утверждения.

Теорема 1. *Для однозначной разрешимости уравнения* (3) *необходимо и достаточно, чтобы определитель* Δ *был отличен от нуля.*

Теорема 2. *Для разрешимости уравнения* (3) *необходимо и достаточно, чтобы ранги матриц* B *и* $\tilde{B}$ *были одинаковыми.*

Установим один признак равенства рангов матриц B и $\tilde{B}$.

Теорема 3. *Ранги матриц* B *и* $\tilde{B}$ *равны тогда и только тогда, когда любая линейная комбинация функций* $\alpha^k(t)$ *и* $\beta^k(t)$, *ортогональная ко всем решениям уравнения* (4), *одновременно ортогональна и к функции*

$$v(t) = \int_0^T V(t, s) f(s) ds.$$

Доказательство. Если $\Delta \neq 0$, то $\operatorname{rang} B = \operatorname{rang} \tilde{B} = 2n$. В этом случае только тождественно равная нулю комбинация функций $\alpha^k(t)$ и $\beta^k(t)$ ортогональна ко всем решениям уравнения (3) и к функции $v(t)$. Поэтому, пусть $\Delta = 0$ и $r = \operatorname{rang} B$. Тогда строки матрицы B линейно зависимы. Пусть числа $c_1^l, c_2^l, \ldots, c_{2n}^l$ $(l = 1, 2, \ldots, 2n-r)$ такие, что

$$\sum_{k=1}^{n} [c_k^l \langle \varphi^i, \alpha^k \rangle + c_{n+k}^l \langle \varphi^i, \beta^k \rangle] = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} [c_k^l \langle \psi^i, \alpha^k \rangle + c_{n+k}^l \langle \psi^i, \beta^k \rangle] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (8)$$

Следовательно, существуют $2n - r$ функции из $H_p^{(n)}$

$$\gamma^l(t) = \sum_{k=1}^{n} [\bar{c}_k^l \alpha^k(t) + \bar{c}_{n+k}^l \beta^k(t)] \qquad (l = 1, 2, \ldots, 2n-r), \qquad (9)$$

ортогональные ко всем решениям уравнения (4), т.е.

$$\langle \varphi^i, \gamma^l \rangle = 0, \ \langle \psi^i, \gamma^l \rangle = 0.$$

Если они ортогональны и к $v(t)$, то выполняются равенства:

$$\langle v, \gamma^l \rangle = \langle Vf, \gamma^l \rangle = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, 2n-r). \qquad (10)$$

Отсюда следует, что $\operatorname{rang} \tilde{B} \leqslant r$. С другой стороны $\operatorname{rang} B \leqslant \operatorname{rang} \tilde{B}$, поэтому $\operatorname{rang} \tilde{B} = \operatorname{rang} B$.

Обратно, если $\operatorname{rang} B = \operatorname{rang} \tilde{B}$, то любое решение системы (8) удовлетворяет соотношениям (10), т. е. любая функция $\gamma^l(t)$ вида (9), ортогональная к $\varphi^i(t)$ и $\psi^i(t)$, ортогональна и к функции $v(t)$. Теорема доказана.

Из соотношений (10), между прочим, вытекает, что функция $\gamma^l(t)$ ортогональна к $v(t)$ тогда и только тогда, когда правая часть уравнения (1), функция $f(t)$, ортогональна к функции

$$w^l(t) = \int_0^T V^*(s,\ t)\gamma^l(s)\,ds.$$

Отсюда и из последних двух теорем получается

Теорема 4. *Для разрешимости уравнения* (3) *неодходимо и достаточно, чтобы функция* $f(t)$ *была ортогональной ко всем функциям*

$$w^l(t) = \int_0^T V^*(s,\ t)\gamma^l(s)\,ds \qquad (l = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n-r),$$

где $\gamma^l(t)$ — *функции вида* (9), *ортогональные к* $\varphi^i(t)$ *и* $\psi^i(t)$.

3. Функция Грина задачи (1) — (2). Пусть определитель Δ системы (7) отличен от нуля. Тогда, по теореме 1, оператор L имеет обратный оператор L^{-1}, который является интегральным оператором. Ядро этого оператора называется функцией Грина задачи (1) — (2), к построению которой сейчас приступаем.

Через $B_{ki}^{(1)}$, $B_{ki}^{(2)}$, $B_{ki}^{(3)}$, $B_{ki}^{(4)}$, обозначим алгебраические дополнения соответственно к элементам $\langle\varphi^i,\ \alpha^k\rangle$, $\langle\varphi^i,\ \beta^k\rangle$, $\langle\psi^i,\ \alpha^k\rangle$ и $\langle\psi^i,\ \beta^k\rangle$ матрицы B. Так как $\Delta \neq 0$, то система (7) имеет единственное решение

$$c_i = -\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}\left[\langle Vf,\ \alpha^k\rangle B_{ki}^{(1)} + \langle Vf,\ \beta^k\rangle B_{ki}^{(2)}\right],$$

$$c_i' = -\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}\left[\langle Vf,\ \alpha^k\rangle B_{ki}^{(3)} + \langle Vf,\ \beta^k\rangle B_{ki}^{(4)}\right].$$

Подставив найденные значения c_i и c_i' в выражение (6), находим

$$x(t) = -\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}\left[\langle Vf,\ \alpha^k\rangle B_{ki}^{(1)} + \langle Vf,\ \beta^k\rangle B_{ki}^{(2)}\right]\varphi^i(t) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}\left[\langle Vf,\ \alpha^k\rangle B_{ki}^{(3)} + \langle Vf,\ \beta^k\rangle B_{ki}^{(4)}\right]\psi^i(t)\right\} + \int_0^T V(t,\ s)f(s)\,ds =$$

$$= -\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}\left\{\langle Vf,\ \alpha^k\rangle \sum_{i=1}^{n}\left[B_{ki}^{(1)}\varphi^i(t) + B_{ki}^{(3)}\psi^i(t)\right] + \right.$$

$$\left. + \langle Vf,\ \beta^k\rangle \sum_{i=1}^{n}\left[B_{ki}^{(2)}\varphi^i(t) + B_{ki}^{(4)}\psi^i(t)\right]\right\} + \int_0^T V(t,\ s)\,f(s)\,ds.$$

Нетрудно видеть, что суммы

$$\sum_{i=1}^{n}\left[B_{ki}^{(l)}\varphi_j^i(t) + B_{ki}^{(l+2)}\psi_j^i(t)\right] \qquad (l = 1,\ 2;\ k,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

представляют собой разложения определителей $2n$-ого порядка. Эти определителели отличаются от определителя Δ k-ой строкой, если $l=1$ и $n+k$-ой, если $l=2$. В них k-ая ($n+k$-ая) строка состоит из функций

$$\varphi_j^1(t), \ \ldots, \ \varphi_j^n(t), \ \psi_j^1(t), \ \ldots, \ \psi_j^n(t).$$

Обозначим полученные определители через $\Delta_{kj}^{(l)}(t)$ и введем векторы

$$\Delta_k^{(l)}(t)=\left(\Delta_{k1}^{(l)}(t), \ \ldots, \ \Delta_{kn}^{(l)}(t)\right) \qquad (l=1, \ 2; \ k=1, \ 2, \ \ldots, \ n).$$

Если в них строку, состоящую из функции $\varphi^i(t)$ и $\psi^i(t)$ поставим первой, то получим

$$x(t)=-\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}[(-1)^{k-1}\Delta_k^{(1)}(t)\langle Vf, \ \alpha^k\rangle+(-1)^{n+k-1}\Delta_k^{(2)}(t)\langle Vf, \ \beta^k\rangle]+$$
$$+\int_0^T V(t, \ s)f(s)\,ds=\frac{1}{\Delta}\left\{\sum_{k=1}^{n}[(-1)^k\Delta_k^{(1)}(t)\langle Vf, \ \alpha^k\rangle+\right.$$
$$\left.+(-1)^{n+k}\Delta_k^{(2)}(t)\langle Vf, \ \beta^k\rangle]+\Delta\int_0^T V(t, \ s)f(s)\,ds\right\}.$$

Следовательно для каждой компоненты вектор-функции $x(t)$ имеем

$$x_i(t)=\frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{n}\int_0^T\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[(-1)^k\Delta_{ki}^{(1)}(t)\sum_{l=1}^{n}\int_0^T v_{lj}(\tau, \ s)\overline{\alpha_l^k(\tau)}\,d\tau+\right.\right.$$
$$\left.\left.+(-1)^{n+k}\Delta_{ki}^{(2)}(t)\sum_{l=1}^{n}\int_0^T v_{lj}(\tau, \ s)\overline{\beta_l^k(\tau)}\,d\tau\right]+\Delta v_{ij}(t, \ s)\right\}f_j(s)\,ds,$$

где $v_{ij}(t, \ s)$ — элементы матрицы $V(t, \ s)$.

Выражение в фигурных скобках суть разложение некоторого определителя $2n+1$-ого порядка. Обозначим его через $\Delta\cdot G_{ij}(t, \ s)$. Тогда

$$G_{ij}(t, s)=$$
$$=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \varphi_i^1(t) \ \ldots & \varphi_i^n(t) & \psi_i^1(t) \ \ldots & \psi_i^n(t) & v_{ij}(t, \ s) \\ \langle\varphi^1, \ \alpha^1\rangle \ \ldots & \langle\varphi^n, \ \alpha^1\rangle & \langle\psi^1, \ \alpha^1\rangle \ldots & \langle\psi^n, \ \alpha^1\rangle & \sum_{l=1}^{n}\int_0^T v_{lj}(\tau, \ s)\overline{\alpha_l^1(\tau)}\,d\tau \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle\varphi^1, \ \alpha^n\rangle \ \ldots & \langle\varphi^n, \ \alpha^n\rangle & \langle\psi^1, \ \alpha^n\rangle \ldots & \langle\psi^n, \ \alpha^n\rangle & \sum_{l=1}^{n}\int_0^T v_{lj}(\tau, \ s)\overline{\alpha_l^n(\tau)}\,d\tau \\ \langle\varphi^1, \ \beta^1\rangle \ \ldots & \langle\varphi^n, \ \beta^1\rangle & \langle\psi^1, \ \beta^1\rangle \ \ldots & \langle\psi^n, \ \beta^1\rangle & \sum_{l=1}^{n}\int_0^T v_{lj}(\tau, \ s)\overline{\beta_l^1(\tau)}\,d\tau \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle\varphi^1, \ \beta^n\rangle \ \ldots & \langle\varphi^n, \ \beta^n\rangle & \langle\psi^1, \ \beta^n\rangle \ \ldots & \langle\psi^n, \ \beta^n\rangle & \sum_{l=1}^{n}\int_0^T v_{lj}(\tau, \ s)\overline{\beta_l^n(\tau)}\,d\tau \end{vmatrix} \quad (11)$$

и

$$x_i(t)=\sum_{j=1}^{n}\int_0^T G_{ij}(t, \ s)f_j(s)\,ds.$$

Обозначим через $G(t, s)$ матрицу, элементами которой являются функции $G_{ij}(t, s)$ $(i, j=1, 2, \ldots, n)$. Тогда матрица $G(t, s)$ и будет искомой функцией Грина задачи (1) – (2). Она однозначно определена, если $\Delta \neq 0$ и, как нетрудно проверить, обладает свойствами:

1. *Функция $G(t, s)$ абсолютно непрерывна по совокупности переменных s, t в квадрате $0 \leqslant s, t \leqslant T$.*

2. *Частные производные $\frac{\partial G(t, s)}{\partial t}$ и $\frac{\partial G(t, s)}{\partial s}$ абсолютно непрерывны при $t \neq s$ $(0 \leqslant s, t \leqslant T)$ и обладают свойствами:*

$$\frac{\partial G(t, t-0)}{\partial t} - \frac{\partial G(t, t+0)}{\partial t} = \frac{\partial G(s+0, s)}{\partial s} - \frac{\partial G(s-0, s)}{\partial s} = I.$$

3. *Существует почти всюду вторая частная производная по t, причем почти всюду*

$$\frac{\partial^2 G(t, s)}{\partial t^2} = A(t) G(t, s).$$

4. *Выполняются соотношения*

$$\int_0^T G^*(s, t) \alpha^k(s)\, ds = \int_0^T G^*(s, t) \beta^k(s)\, ds = 0.$$

Из этих свойств вытекает [5], *что при $\Delta \neq 0$ решение задачи* (1) – (2) *однозначно представимо в виде*

$$x(t) = \int_0^T G(t, s) f(s)\, ds, \tag{12}$$

т.е. обратный к L оператор выражается формулой

$$L^{-1} f = \int_0^T G(t, s) f(s)\, ds.$$

4. Сопряженный оператор. Так как область определения $D(L)$ оператора L не плотна в $H_p^{(n)}$, то сопряженный с ним оператор L^*, вообще говоря, не существует. В этом случае существует бесконечно много операторов, удовлетворяющих соотношению $\langle Lx, y\rangle = \langle x, L^* y\rangle$. Однако, наложив соответствующие условия на область значений $R(L^*)$ оператора L^*, сопряженный оператор определяется однозначно, если условия (2), порождающие $D(L)$, входят в некоторый класс, определенный ниже.

Определение. *Условия* (2) *назовем регулярными, если хотя бы при одном* (*комплексном*) *числе* λ *уравнение*

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \lambda x = 0$$

имеет лишь тривиальное решение, удовлетворяющее условиям (2).

Предположим, что условия (2) регулярные и построим для L сопряженный оператор. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \lambda x = f(t). \tag{13}$$

Пусть $\lambda=\lambda_0$, то значение, при котором однородная задача имеет лишь тривиальное решение. Тогда при этом λ для задачи (13) – (2) существует функция Грина, т.е. соответствующий определитель

$$\Delta(\lambda_0)=\begin{vmatrix} \int\limits_0^T e^{\sqrt{\lambda_0}\,t}\,\overline{\alpha_1^1(t)}\,dt & \dots & \int\limits_0^T e^{-\sqrt{\lambda_0}\,t}\,\overline{\alpha_n^1(t)}\,dt \\ \dots & \dots & \dots \\ \int\limits_0^T e^{\sqrt{\lambda_0}\,t}\,\overline{\beta_1^n(t)}\,dt & \dots & \int\limits_0^T e^{-\sqrt{\lambda_0}\,t}\,\overline{\beta_n^n(t)}\,dt \end{vmatrix}$$

отличен от нуля и, по теореме 1, задача (13) – (2) разрешима при любой правой части $f(t)\in H_p^{(n)}$.

Теперь приступим к описанию области определения $D(L^*)$ оператора L^*. Как известно [6], функция $y(t)\in D(L^*)$, если существует такая функция $\omega(t)$ из $H_{p'}^{(n)}$, что

$$\langle Lx,\ y\rangle=\langle x,\ \omega\rangle \tag{14}$$

при любом $x\in D(L)$.

Следовательно,

$$\left\langle \frac{d^2x}{dt^2}-Ax,\ y\right\rangle=\langle x,\ \omega\rangle$$

или

$$\left\langle \frac{d^2x}{dt^2},\ y\right\rangle=\langle x,\ \omega+A^*y\rangle. \tag{15}$$

Пусть $h(t)$ – любая функция из $H_p^{(n)}$. Пусть задача (13) – (2) разрешима при $\lambda=\lambda_0$. Тогда функция

$$x(t)=\int\limits_0^T G(t,s;\ \lambda_0)\,h(s)\equiv Gh$$

принадлежит множеству $D(L)$ и

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}=\lambda_0\,x(t)+h(t).$$

Для таких $x(t)\in D(L)$ равенство (15) можно переписать в виде:

$$\langle h,\ y\rangle=\left\langle \frac{d^2x}{dt^2}-\lambda_0x,\ y\right\rangle=\langle x,\ \omega+A^*y-\bar\lambda_0y\rangle=\langle Gh,\ \omega+A^*y-\bar\lambda_0y\rangle=$$

$$=\langle h,\ G^*\omega+G^*A^*y-\bar\lambda_0G^*y\rangle,$$

которое выполняется при любой $h(t)\in H_p^{(n)}$.

Таким образом

$$y=G^*\omega+G^*A^*y-\bar\lambda_0G^*y. \tag{16}$$

Из свойств функции Грина, в силу того, что $G^*(t,\ s)=[\overline{G(s,\ t)}]'$ вытекает, что $y\in H_{p'}^{(n)}{}_2$. Далее, из выражения (11) и определения матрицы $V(t,\ s)$ очевидным образом получаем

$$G(t,\ 0)=G(t,\ T)=\frac{\partial G(t,\ 0)}{\partial s}=\frac{\partial G(t,\ T)}{\partial s}=0.$$

Отсюда и из представления (16) следует, что если $y(t)\in D(L^*)$, то

$$y(0)=y(T)=\dot y(0)=\dot y(T)=0. \tag{17}$$

Таким образом, если $y(t)\in D(L^*)$, то $y(t)\in H_{p'}^{(n)}{}_2$ и удовлетворяет условиям (17). Обратное очевидно. Поэтому $D(L^*)$ состоит из функций $y(t)$, принадлежащих $H^{(n)}_{p,2}$ и удовлетворяющих условиям (17). Значит выражение $\langle Lx,\ y\rangle$ можно интегрировать по частям. Принимая во внимание (17), получаем

$$\langle Lx,\ y\rangle=\frac{dx(t)}{dt}\,\overline{y(t)}\,\Big|_0^T-x(t)\,\overline{\frac{dy(t)}{dt}}\,\Big|_0^T+\left\langle x,\ \frac{d^2y}{dt^2}-A^*y\right\rangle=$$

$$=\left\langle x,\ \frac{d^2y}{dt^2}-A^*y\right\rangle=\left\langle x,\ \frac{d^2y}{dt^2}-A^*y+\sum_{k=1}^{n}[c_k\alpha^k+c_k'\beta^k]\right\rangle.$$

Сравнивая это с (14), находим

$$\omega(t)=\frac{d^2y}{dt^2}-A^*(t)y+\sum_{k=1}^{n}[c_k\alpha^k(t)+c_k'\beta^k(t)],\tag{18}$$

т.е. функция $\omega(t)$ определяется с точностью до $2n$ произвольных постоянных.

По определению сопряженного оператора $\omega=L^*y$, поэтому оператор L^* неоднозначно определяется формулой (18).

Выберем $2n$ вектор-функций $\mu^k(t)$, $\nu^k(t)$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ таких, чтобы выполнялись соотношения

$$\langle\alpha^i,\ \mu^k\rangle=\delta_{ik},\quad \langle\alpha^i,\ \nu^k\rangle=0,$$

$$\langle\beta^i,\ \mu^k\rangle=0,\quad \langle\beta^i,\ \nu^k\rangle=\delta_{ik}\qquad (i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где δ_{ik} – символ Кроннекера.

Потребуем, чтобы область значений $R(L^*)$ оператора L^* была ортогональной ко всем функциям $\mu^k(t)$ и $\nu^k(t)$. Тогда

$$0=\langle L^*y;\ \mu^k\rangle=\left\langle\frac{d^2y}{dt^2}-A^*y+\sum_{i=1}^{n}[c_i\alpha^i+c_i'\beta^i],\ \mu^k\right\rangle=\left\langle\frac{d^2y}{dt^2}-A^*y,\ \mu^k\right\rangle+c_k,$$

$$0=\langle L^*y,\ \nu^k\rangle=\left\langle\frac{d^2y}{dt^2}-A^*y+\sum_{i=1}^{n}[c_i\alpha^i+c_i'\beta^i],\ \nu^k\right\rangle=\left\langle\frac{d^2y}{dt^2}-A^*y,\ \nu^k\right\rangle+c_k'.$$

Отсюда

$$c_k=-\left\langle\frac{d^2y}{dt^2}-A^*y,\ \mu^k\right\rangle,$$

$$c_k'=-\left\langle\frac{d^2y}{dt^2}-A^*y,\ \nu^k\right\rangle\qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Введем оператор

$$P\cdot=\sum_{k=1}^{n}[\langle\cdot,\ \mu^k\rangle\,\alpha^k(t)+\langle\cdot,\ \nu^k\rangle\,\beta^k(t)].$$

Легко видеть, что это проекционный оператор ($P^2=P$), действующий в $H^{(n)}_{p}$, причем $P\alpha^k=\alpha^k$, $P^k_\beta=\beta^k$. С его помощью сопряженный оператор можно представить однозначно формулой

$$L^*y=\frac{d^2y}{dt^2}-A^*(t)y-P\left[\frac{d^2}{dt^2}-A^*\right]y.\tag{19}$$

Его область определения $D(L^*)$ описана выше, а область значений $R(L^*)$ суть подпространство пространства $H^{(n)}_{p}$, ортогональное к линейной оболочке функции $\mu^k(t)$ и $\nu^k(t)$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

Заметим, что оператор $P\left[\frac{d^2}{dt^2}-A^*\right]$, вообще говоря, неограничен. Однако, если $\mu^k(t)$, $\nu^k(t)\in H_{p2}^{(n)}$, то можно интегрировать по частям члены $\left\langle\frac{d^2}{dt^2};\ \mu^k\right\rangle$ и $\left\langle\frac{d^2}{dt^2};\ \nu^k\right\rangle$ и тогда он становится ограниченным.

5. Аналог альтернативного принципа. Из одной, довольно общей теоремы Фикера [7], можно вывести, что для операторов L и L^* верен альтернативный принцип. Мы же докажем его непосредственно.

Лемма 3. *Пусть функция* $\gamma(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}[c_k\alpha^k(t)+c_{n+k}\beta^k(t)]$ *удовлетворяет условиям*

$$\langle\gamma,\ \varphi^i\rangle=0,$$

$$\langle\gamma,\ \psi^i\rangle=0\qquad(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).\tag{20}$$

Тогда функция

$$w(t)=\int\limits_0^T V^*(s,\ ,)\gamma(s)\,ds$$

является решением уравнения $L^*y=0$.

Обратно, если функция $y_0(t)$ *является решением уравнения* $L^*y=0$, *то она удовлетворяет уравнению*

$$y(t)=\int\limits_0^T V^*(s,\ t)P\left[\frac{d^2}{dt^2}-A^*\right]y(s)\,ds\tag{21}$$

и условиям

$$\left\langle P\left[\frac{d^2}{dt^2}-A^*\right]y_0,\ \varphi^i\right\rangle=\left\langle P\left[\frac{d^2}{dt^2}-A^*\right]y_0,\ \psi^i\right\rangle=0.$$

Доказательство. Так как $\gamma(t)\in H_p^{(n)}$, то из определения функции $w(t)$ и свойств матрицы $V^*(s,\ t)$ непосредственно вытекает, что $w(t)\in H_{p}^{(n)}{}_2$ Далее,

$$w(0)=\int\limits_0^T V^*(s,\ 0)\gamma(s)\,ds=\frac{1}{2}\int\limits_0^T Y^*(s)\gamma(s)\,ds,$$

$$w(T)=\frac{1}{2}\,Z^{*-1}(T)\left[X^{*-1}(T)\int\limits_0^T X^*(s)\gamma(s)\,ds-Y^{*-1}(T)\int\limits_0^T Y^*(s)\gamma(s)\,ds\right],\tag{22}$$

$$\dot w(0)=-\frac{1}{2}\int\limits_0^T X^*(s)\gamma(s)\,ds,$$

$$\dot w(T)=\frac{1}{2}\,X^{*-1}(T)\int\limits_0^T[X^*(s)-\dot X^*(T)Z^{*-1}(T)Z^*(T,\ s)]\gamma(s)\,ds.$$

С другой стороны, векторы $\int\limits_0^T X^*(s)\gamma(s)\,ds$ и $\int\limits_0^T Y^*(s)\gamma(s)\,ds$ состоят из координат $\langle\gamma,\ \varphi^i\rangle$ и $\langle\gamma,\ \psi^i\rangle$ соответственно. Поэтому если условия (20) выполнены, то $w(0)=w(T)=w(0)=\dot w(T)=0$. Значит $w(t)\in D(L^*)$. Применив к $w(t)$ оператор L^* и воспользовавшись соотношениями

$$\frac{d^2w(t)}{dt^2}-A^*(t)\,w(t)=\gamma(t),\ \ P\alpha^k=\alpha^k,\ \ P\beta^k=\beta^k,$$

получаем

$$L^* w = \frac{d^2 w(t)}{dt^2} - A^*(t) w(t) - P\left[\frac{d^2}{dt^2} - A^*\right] w(t) = \gamma(t) - P\gamma(t) = \gamma(t) - \gamma(t) = 0,$$

т.е. функция $w(t)$ удовлетворяет уравнению $L^* y = 0$.

Пусть $y_0(t)$ является решением уравнения $L^* y = 0$. Тогда, очевидно, $y_0(t)$ удовлетворяет уравнению (21). Так как $y_0(t) \in D(L^*)$, то из (21) следует, что выполняются соотношения (22), где вместо $\gamma(s)$ будет стоять $P\left[\frac{d^2}{dt^2} - A^*\right] y_0(s)$, а левые части равны нулю. Отсюда сразу вытекает, что $P\left[\frac{d^2}{dt^2} - A^*\right] y_0(t)$ ортогональна к $\varphi^i(t)$ и $\psi^i(t)$. Лемма полностью доказана.

Из этой леммы и теоремы 4 получается альтернативный принцип, который сформулируем в виде теоремы.

Теорема 5. *Для того, чтобы уравнение* (3) *имело решение необходимо и достаточно, чтобы $f(t)$ была ортогональной ко всем решениям уравнения $L^* y = 0$.*

В частности для разрешимости уравнения (3) *при любой правой части из $H_p^{(n)}$ необходимо и достаточно, чтобы уравнение $L^* y = 0$ имело лишь тривиальное решение.*

§ 3. Нелинейные системы

В этом параграфе результаты статьи [1], для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, перенесены на нелинейные системы второго порядка.

1. Постановка задачи. Пусть x и $\dot{x}$ векторы n-мерного евклидова пространства E_n. Функции $f_i(t, x, \dot{x})$ определены при $0 \leqslant t \leqslant T$, x, $\dot{x} \in E_n$, измеримы по t, при всех фиксированных x и $\dot{x}$ и непрерывны по совокупности x, $\dot{x}$ почти при всех $t \in [0, T]$. Рассмотрим векторное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = f(t, x, \dot{x}). \tag{23}$$

Будем искать решения этого уравнения, удовлетворяющие условиям

$$\int_0^T x_i(t) \overline{\alpha_i^i(t)}\, dt = 0,$$

$$\int_0^T x_i(t) \overline{\beta_i^i(t)}\, dt = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{24}$$

где $\alpha_i^i(t)$ и $\beta_i^i(t)$ суммируемы с p_i'-ой степени и

$$\Delta_i = \int_0^T \overline{\alpha_i^i(t)}\, dt \int_0^T t\, \overline{\beta_i^i(t)}\, dt - \int_0^T t\, \overline{\alpha_i^i(t)}\, dt \int_0^T \overline{\beta_i^i(t)}\, dt \neq 0. \tag{25}$$

Если ввести векторы $\alpha^i(t)$ и $\beta^i(t)$, у которых i-ая координата равна $\alpha_i^i(t)$ и $\beta_i^i(t)$ соответственно, а все остальные равны нулю, то условия (24) можно записать в виде (2).

2. Сведение к интегральным уравнениям. Предположим, что правая часть уравнения (23) не зависит от x и $\dot{x}$. Таким образом приходим к уравнению

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = f(t), \tag{26}$$

которое является частным случаем уравнения (1) $\left(A(t)\equiv 0\right)$. Для задачи (26) – (24) мы умеем строить функцию Грина. Нетрудно видеть, что определитель Δ системы (7), соответствующей задаче (26) – (24), распадается на n множителей Δ_i, данных формулой (25). Поэтому функция Грина определяется однозначно и каждое решение рассматриваемой задачи представляется в виде:

$$x(t)=\int_0^T G(t,\ s)f(s)\,ds\equiv Gf, \tag{27}$$

причем, $G(t,\ s)$ является диагональной матрицей с элементами

$$G_{ii}(t,\ s)=\frac{1}{\Delta_i}\begin{vmatrix} 1 & t & v(t,\ s) \\ \int_0^T \overline{\alpha_i^i(t)}\,dt & \int_0^T t\,\overline{\alpha_i^i(t)}\,dt & \int_0^T v(t,\ s)\,\overline{\alpha_i^i(t)}\,dt \\ \int_0^T \overline{\beta_i^i(t)}\,dt & \int_0^T t\,\overline{\beta_i^i(t)}\,dt & \int_0^T v(t,\ s)\,\overline{\beta_i^i(t)}\,dt \end{vmatrix}, \tag{28}$$

где

$$v(t,\ s)=\begin{cases} \dfrac{t-s}{2} & \text{при } s\leqslant t, \\ \dfrac{s-t}{2} & \text{при } s\geqslant t. \end{cases}$$

Все сказанное непосредственно вытекает из рассуждений и формул предыдущего параграфа.

Очевидно, что

$$\dot{x}(t)=\int_0^T \frac{\partial G(t,\ s)}{\partial t}f(s)\,ds\equiv G_t'f. \tag{29}$$

Таким образом приходим к выводу, что задачу (23) – (24) можно свести к системе интегральных уравнений

$$x(t)=\int_0^T G(t,\ s)f\left(s,\ x(s),\ \dot{x}(s)\right)ds,$$

$$\dot{x}(t)=\int_0^T \frac{\partial G(t,\ s)}{\partial t}f\left(s,\ x(s),\ \dot{x}(s)\right)ds. \tag{30}$$

Обратно, каждое решение системы (30) является решением задачи (23) – (24), так что *задача* (23) – (24) *эквивалентна системе* (30). В частности, если правая часть уравнения (23) не зависит от $\dot{x}$, то задача (23) – (24) эквивалентна уравнению

$$x(t)=\int_0^T G(t,\ s)f\left(s,\ x(s)\right)ds. \tag{31}$$

Исходя из этого мы вместо задачи (23) – (34) будем рассматривать уравнения (30) или (31).

3. Оценки операторов. Найдем оценки операторов, определенных формулами (27) и (29) в обобщенных нормированных пространствах $C^{(n)}$ и $H_p^{(n)}$.

Пусть $f(t)\in C^{(n)}$. Тогда операторы G и G'_t действуют в $C^{(n)}$. Если $f(t)\in H_p^{(n)}$, то они будут действовать в $H_p^{(n)}$. Заметим (см., напр., [8]), что операторы G и G'_t вполне непрерывны. Итак пусть $f(t)\in C^{(n)}$. Тогда G действует в $C^{(n)}$ и

$$\|Gf\|_C^{(n)}=\left(\max_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int_0^T G_1(t,\ s)f_1(s)\,ds\right|,\ \ldots\ \max_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int_0^T G_n(t,\ s)f_n(s)\,ds\right|\right).$$

Зафиксируем некоторое $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ и найдем оценку на i-ую компоненту вектор-нормы элемента Gf. Имеем

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int_0^T G_i(t,\ s)f_i(s)\,ds\right|\leqslant\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^T|G_i(t,\ s)|\,ds\max_{0\leqslant s\leqslant T}|f_i(s)|.$$

Из формулы (27), раскрывая определитель (28) и применяя элементарные преобразования, получаем

$$\int_0^T|G_i(t,\ s)|\,ds\leqslant\frac{1}{4|\Delta_i|}\int_0^T|t-\tau|\,|\alpha_i^i(\tau)|\,d\tau\int_0^T[(T-\tau)^2+\tau^2]\,|\beta_i^i(\tau)|\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{4|\Delta_i|}\int_0^T|t-\tau|\,|\beta_i^i(\tau)|\,d\tau\int_0^T[(T-\tau)^2+\tau^2]\,|\alpha_i^i(\tau)|\,d\tau+\frac{(T-t^2)+t^2}{4}=\gamma_i(t).$$

Нетрудно проверить, что $\gamma_i(t)\geqslant 0$ и $\gamma_i''(t)>0$. Поэтому функция $\gamma_i(t)$ выпукла и наибольшее значение принимает на концах отрезка $[0,\ T]$. Следовательно

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^T G_i(t,\ s)\,|\,ds\leqslant\max_{0\leqslant t\leqslant T}\gamma_i(t)=\max\{\gamma_i(0),\ \gamma_i(T)\}.$$

Элементарный подсчет показывает, что

$$\max\{\gamma_i(0),\ \gamma_i(T)\}\leqslant\frac{T^2}{4}+\frac{T^3}{2|\Delta_i|}\int_0^T|\alpha_i^i(t)|\,dt\int_0^T|\beta_i^i(t)|\,dt.$$

Обозначим

$$h_i=\frac{T}{|\Delta_i|}\int_0^T|\alpha_i^i(t)|\,dt\int_0^T|\beta_i^i(t)|\,dt.$$

Тогда

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^T|G_i(t,\ s)|\,ds\leqslant\frac{2h_i+1}{4}\,T^2.$$

Следовательно

$$\|Gf\|_C^{(n)}\leqslant\frac{T^2}{4}\,Q\,\|f(t)\|_C^{(n)}, \tag{32}$$

где Q — диагональная матрица с элементами $2h_i+1$.

Из выражения (29), продифференцировав (28), таким же образом получаем

$$\|G_t'f\|_C^{(n)}\leqslant\frac{T}{2}\,Q_1\,\|f(t)\|_C^{(n)}, \tag{33}$$

где Q_1 — диагональная матрица с элементами h_i+1.

Если $f(t)\in H_1^{(n)}$, то из (27) и (29) находим

$$\|Gf\|_1^{(n)}\leqslant\frac{T^2}{4}Q\|f(t)\|_1^{(n)},\tag{34}$$

$$\|Gf\|_1^{(n)}\leqslant\frac{T}{2}Q\|f(t)\|_1^{(n)}.\tag{35}$$

Пусть $f(t)\in H_p^{(n)}$, $p=(p_1,\ \ldots,\ p_n)$, $1\leqslant p_i<\infty$. Так как нормы элементов Gf и $G_t'f$ в пространстве $H_\infty^{(n)}$ равны нормам в пространстве $C^{(n)}$, то из неравенств (32) – (35) с помощью интерполяционной теоремы М. Рисса [9] нетрудно получить оценки на G и G_t' в пространствах $H_p^{(n)}$. В частности можно положить:

$$\|G\|_p^{(n)}\leqslant\frac{T^2}{4}Q,\quad \|G_t'\|_p^{(n)}\leqslant\frac{T}{2}Q.$$

4. Теоремы существования и единственности. Установим несколько достаточных условий существования и единственности решения задачи (23) – (24).

Теорема 6. *Пусть функции $f_i(t,\ x,\ \dot x)$ непрерывны по совокупности переменных $t\in[0,\ T]$, x, $\dot x\in E_n$.*

Пусть выполнено неравенство

$$|f(t,\ x,\ \dot x)|\leqslant A|x|+B|\dot x|+\gamma(t),\tag{36}$$

где A и B неотрицательные матрицы, $\gamma(t)$ неотрицательная непрерывная вектор-функция, определенная на отрезке $[0,\ T]$.

Если матрица

$$S=\begin{pmatrix}\frac{T^2}{4}QA & \frac{T^2}{4}QB\\ \frac{T}{2}Q_1A & \frac{T}{2}Q_1B\end{pmatrix}\tag{37}$$

является a-матрицей, то задача (23) – (24) *имеет по крайней мере одно решение $x^*(t)\in C^{(n)}$. Это решение удовлетворяет оценке*

$$\begin{pmatrix}\|x^*(t)\|_C^{(n)}\\ \|\dot x^*(t)\|_C^{(n)}\end{pmatrix}\leqslant(I-S)^{-1}\left|\left|\left|\begin{matrix}\left\|\int\limits_0^T|G(t,\ s)|\gamma(s)ds\right\|_C^{(n)}\\ \left\|\int\limits_0^T|G_t'(t,\ s)|\gamma(s)ds\right\|_C^{(n)}\end{matrix}\right|\right|\right|.$$

Доказательство. В силу сказанного в п. 2 настоящего параграфа разрешимость задачи (23) – (24) будет доказана, если покажем, что система (30) интегральных уравнений имеет решение.

Так как $f(t,\ x,\ \dot x)$ непрерывна, то операторы G и G_t' действуют в C'^n. Из первого уравнения системы (30) в силу (36) находим

$$\|Gf(x,\ \dot x)\|_C^{(n)}=\left\|\int\limits_0^T G(t,\ s)f\left(s,\ x(s),\ \dot x(s)\right)ds\right\|_C^{(n)}\leqslant$$

$$\leqslant\left\|\int\limits_0^T|G(t,\ s)|\left|f\left(s,\ x(s),\ \dot x(s)\right)\right|ds\right\|_C^{(n)}\leqslant$$

$$\leqslant\left\|\int\limits_0^T|G(t,\ s)|[A|x(s)|+B|\dot x(s)|+\gamma(s)]ds\right\|_C^{(n)}\leqslant$$

$$\leqslant \left\| \int_0^T |G(t, s)|A|x(s)|ds \right\|_C^{(n)} + \left\| \int_0^T |G(t, s)|B|\dot{x}(s)|ds \right\|_C^{(n)} + \\ + \left\| \int_0^T |G(t, s)|\gamma(s)ds \right\|_C^{(n)}.$$

Отсюда и из оценки (32) получаем

$$\| Gf(x, \dot{x}) \|_C^{(n)} \leqslant \frac{T^2}{4} Q \| A|x(s)| \|_C^{(n)} + \frac{T^2}{4} Q \| B|\dot{x}(s)| \|_C^{(n)} + \left\| \int_0^T |G(t, s)|\gamma(s)ds \right\|_C^{(n)}.$$

Так как A и B неотрицательные матрицы, то

$$\| A|x(t)| \|_C^{(n)} \leqslant A \| x(t) \|_C^{(n)}, \quad \| B|\dot{x}(s)| \|_C^{(n)} \leqslant B \| \dot{x}(s) \|_C^{(n)},$$

поэтому

$$\| Gf(x, \dot{x}) \|_C^{(n)} \leqslant \frac{T^2}{4} Q \left(A \| x(t) \|_C^{(n)} + B \| \dot{x}(t) \|_C^{(n)} + \left\| \int_0^T |G(t, s)|\gamma(s)ds \right\|_C^{(n)}. \quad (38)$$

Аналогично из второго уравнения системы (30) в силу неравенства (36) и оценки (33) находим, что

$$\| G'_t f(x, \dot{x}) \|_C^{(n)} \leqslant \frac{T}{2} Q_1 \left(A \| x(t) \|_C^{(n)} + B \| \dot{x}(t) \|_C^{(n)} + \left\| \int_0^T |G'_t(t, s)|\gamma(s)ds \right\|_C^{(n)}. \quad (39)$$

Введем пространство $C^{(2n)}$, элементы которого суть пары $\{x(t), y(t)\}$ элементов x и y из $C^{(n)}$. Если $\|x\|_C^{(n)} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ $\|y\|_C^{(n)} = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, то положим

$$\| \{x(t), y(t)\} \|_C^{(2n)} = (\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n).$$

Таким образом пространство $C^{(2n)}$ становится обобщенным нормированным пространством с элементами $z(t) = \{x(t), y(t)\}$.

Система уравнений (30) определяет оператор

$$Kg(y) = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & G'_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(y) \\ f(y) \end{pmatrix}, \quad y = \{x, \dot{x}\},$$

действующий в пространстве $C^{(2n)}$. Из оценок (38) и (39) в силу (37) получаем оценку на норму оператора Kg:

$$\| Kg(y) \|_C^{(2n)} \leqslant S \| y \|_C^{(2n)} + \left\| \int_0^T |K(t, s)|\chi(s)ds \right\|_C^{(2n)}, \quad (40)$$

где $\chi(t) = \{\gamma(t), \gamma(t)\}$.

Введем в $2n$-мерном пространстве E_{2n} числовую норму $\|\cdot\|^{(0)}$, о существовании которой идет речь в лемме 2.

Положим

$$\| y(t) \|_C = \| \, \| y(t) \|_C^{(2n)} \|^{(0)}.$$

В новой норме пространство $C^{(2n)}$ превращается в пространство $C^{(0)}$ непрерывных $2n$-мерных вектор-функций $y(t)$. В этой норме неравенство (40) в силу леммы 2 переходит в числовое неравенство

$$\| Kg(y) \|_C \leqslant q \| y \|_C + \left\| \int_0^T |K(t, s)|\chi(s)ds \right\|_C,$$

причем $q < 1$, так как по предположению S является a-матрицей.

Из последнего неравенства следует, что оператор Kg любой шар радиуса $r \geqslant r_0 = \frac{\| K\chi \|}{1-q}$ в пространстве $C^{(0)}$ переводит в себя. Очевидно, что оператор Kg вполне непрерывен в $C^{(0)}$. Таким образом из принципа Шаудера [10] вытекает, что в пространстве $C^{(0)}$ оператор Kg имеет хотя бы одну неподвижную точку. Пусть $y^* = Kg(y^*)$. Следовательно функция $y^*(t) = \{x^*(t), \dot{x}^*(t)\}$ является решением системы уравнений (30). Оценка на это решение следует из оценки (40). Теорема доказана.

Теорема 7. *Пусть правая часть уравнения* (23) *не зависит от* $\dot{x}$ *и удовлетворяет условиям теоремы* 6, *причем в неравенстве* (36) *матрица* $B=0$.

Тогда для существования хотя бы одного решения задачи (23) – (24) *достаточно, чтобы при некотором* α $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ *и всех* $i=1, 2, \ldots, n$ *выполнялись соотношения*

$$\frac{4}{T^2} - (2h_i+1)a_{ii} > \Big[\sum_{j \neq i} a_{ij}(2h_i+1)\Big]^{\alpha} \Big[\sum_{j \neq i} a_{ji}(2h_j+1)\Big]^{1-\alpha}. \tag{41}$$

Доказательство. Так как функция $f(t, x, \dot{x})$ не зависит от $\dot{x}$, то задача (23) – (24) эквивалентна уравнению (31). Из того что $B=0$ и оценки (38) получаем

$$\| Gf(x) \|_C^{(n)} \leqslant \frac{T^2}{4} QA \| x(t) \|_C^{(n)} + \Big\| \int_0^T | G(t, s) | \gamma(s) ds \Big\|_C^{(n)}.$$

Если выполнены условия (41), то по теореме Островского [11] у матрицы $I - \frac{T^2}{4} QA$ все главные миноры положительны. Тогда по лемме 1 $\frac{T^2}{4} QA$ является a-матрицей. Применив теорему 6 получаем требуемое доказательство.

Если функции $f_i(t, x, \dot{x})$ удовлетворяют условиям, наложенным в начале параграфа, то операторы G и G'_t, вообще говоря, действуют в некотором $H_p^{(n)}$. В этом случае теорема 6 остается в силе, если входящая в неравенство (36) функция $\gamma(t)$ принадлежит $H_p^{(n)}$, а матрица

$$S = \begin{pmatrix} \frac{T^2}{4} QA & \frac{T^2}{4} QB \\ \frac{T}{2} QA & \frac{T}{2} QB \end{pmatrix}$$

является a-матрицей.

Теорема 8. *Пусть функции* $f_i(t, x, \dot{x})$ *измеримы по* t *при каждом фиксированном* x, $\dot{x} \in E_n$ *и непрерывны по совокупности* x, $\dot{x}$ *при каждом* $t \in [0, T]$ *и удовлетворяют неравенствам*

$$| f(t, x, \dot{x}) - f(t, y, \dot{y}) | \leqslant A | x-y | + B | \dot{x} - \dot{y} |,$$

$$| f(t, 0, 0) | \leqslant \gamma(t),$$

где A *и* B *неотрицательные постоянные матрицы, функция* $\gamma(t) \in H_p^{(n)}$ *тоже неотрицательна.*

Если

$$S = \begin{pmatrix} \frac{T^2}{4} QA & \frac{T^2}{4} QB \\ \frac{T}{2} QA & \frac{T}{2} QB \end{pmatrix}$$

является а-матрицей, то задача (23) – (24) *имеет единственное решение* $x^*(t) \in H_{p2}^{(n)}$, *которое можно получить методом последовательных приближений, отправляясь от любого элемента* $x^0(t) \in H_p^{(n)}$. *Решение* $x^*(t)$ *удовлетворяет оценке теоремы* 6.

Доказательство в общих чертах совпадает с доказательством теоремы 6. Различие состоит в том, что оператор Kg действует в $H_p^{(2n)}$ и оценивается норма разности $Kg(\tilde{y}) - Kg(y)$. В оценке

$$\| Kg(\tilde{y}) - Kg(y) \|_p^{(2n)} \leqslant S \| \tilde{y}(t) - y(t) \|_p^{(2n)}.$$

S является a-матрицей. Поэтому по лемме 2 можно ввести скалярную норму, в которой Kg является оператором сжатия. Следовательно, уравнение $y - Kg(y) = 0$ в $H_p^{(0)}$ имеет единственное решение и верен принцип последовательных приближений.

Аналогичную теорему можно формулировать и в $C^{(n)}$. Более того, можно было предполагать, что элементы матриц A и B суть неотрицательные функции из какого-либо функционального пространства. В этом случае теоремы, аналогичные теоремам 6, 7 и 8, будут справедливы при требовании, что

$$S = \left\| \begin{matrix} \left\| \int\limits_0^T |G(t, s)| A(s) ds \right\|^{(n)} & \left\| \int\limits_0^T |G(t, s)| B(s) ds \right\|^{(n)} \\ \left\| \int\limits_0^T |G'_t(t, s)| A(s) ds \right\|^{(n)} & \left\| \int\limits_0^T |G'_t(t, s)| B(s) ds \right\|^{(n)} \end{matrix} \right\|$$

является a-матрицей.

Отметим, что если вектор-функции $\alpha^i(t)$ и $\beta^i(t)$, порождающие интегральные условия (24), имеют более одной ненулевой координаты, то при определении операторов G и G'_t пришлось бы решить задачу (1) – (2) с некоторой матрицей (напр., с $A = 0$). Найти же такую матрицу A, чтобы фундаментальная система решений однородного уравнения

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - Ax = 0$$

была биортогональной к функциям $\alpha^k(t)$ и $\beta^k(t)$, порождающим интегральные условия (2), в общем случае невозможно. Поэтому определитель Δ не распадается на простые множители Δ_i и элементы $G_{ij}(t, s)$ функции Грина $G(t, s)$ рассматриваемой задачи суть определители $2n+1$ порядка, которые очень трудно оценивать. Поэтому мы ограничились весьма специальным случаем интегральных условий, для которого удалось получить обозримые оценки.

В заключение заметим, что общую краевую задачу

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = f(t, x, \dot{x}),$$

$$x_i(a_i) = 0, \quad x_i(b_i) = 0, \quad 0 \leqslant a_i < b_i \leqslant T, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{42}$$

можно свести к задаче (23) – (24).

В самом деле, пусть $\alpha_i^i(t) = \delta(t - a_i)$, $\beta_i^i(t) = \delta(t - b_i)$, где $\delta(t)$ – это дельта-функция Дирака (см., напр., [12]). Тогда условия (42) запишутся в интегральном виде:

$$\int\limits_0^T x_i(t)\,\delta(t - a_i)\,dt = 0, \qquad \int\limits_0^T x_i(t)\,\delta(t - b_i)\,dt = 0.$$

Определители Δ_i удовлетворяют условиям (25), так как

$$\Delta_i = b_i - a_i > 0.$$

Следовательно, функция Грина для задачи (26) – (42) существует и полученные результаты верны для общей краевой задачи, а также и для задачи со смешанными краевыми условиями, если только выполнено условие (25).

В заключение автор выражает глубокую благодарность проф. С. Г. Крейну за ценные советы и внимание к работе.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
26.IX.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Кведарас, А. В. Кибенко, А. И. Перов, О некоторых краевых задачах, Лит. мат. сб., V, № 1, 1965.
2. Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Физматгиз, 1961.
3. А. И. Перов, О задаче Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, Прибл. методы решения обыкн. диф. уравнений, 2, Наукова думка, Киев, 1964.
4. Л. С. Понтрягин, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Физматгиз, 1961.
5. J. D. Tamarkin, Some general problems of the theory of ordinary linear differential equation and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions, Math. Zeit. XXVII, 1927.
6. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, том V, Физматгиз, 1959.
7. Г. Фикера, К единой теории краевых задач для эллиптикопараболических уравнений второго порядка, Математика сб. перев. ин. статей, 7, № 6, 1963.
8. Л. В. Канторович и Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, 1959.
9. А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, том II, Мир, 1965.
10. С. Г. Крейн, под ред., Функциональный анализ, СМБ, Наука, 1964.
11. М. Пароди, Локализация характеристических чисел матриц и ее применения, ИЛ, 1960.
12. Г. Е. Шилов, Математический анализ. Второй специальный курс, Наука, 1965.

APIE KRAŠTINĮ UŽDAVINĮ SU INTEGRALINĖMIS SĄLYGOMIS ANTROS EILĖS DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SISTEMOMS

B. KVEDARAS

(Reziumė)

Straipsnyje apibrėžiamos apibendrintos tiesinės normuotos erdvės. Šiose erdvėse tiesinėms diferencialinių lygčių sistemoms gautos būtinos ir pakankamos kraštinio uždavinio su integralinėmis sąlygomis sprendinio egzistencijos ir vienetinumo sąlygos, sukonstruota Grino funkcija ir sujungtinis operatorius bei įrodytas alternatyvaus principo analogas. Netiesinėms sistemoms gauta keletas pakankamų sprendinio egzistencijos ir vienetinumo sąlygų įvairiose apibendrintose tiesinėse normuotose erdvėse. Parodyta, kad šios sąlygos galioja uždaviniui su kraštinėmis sąlygomis taškuose.

ON THE BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR THE SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF SECOND ORDER

B. KVEDARAS

(Summary)

In this paper generalized normed linear spaces are defined. On these spaces necessary and sufficient conditions for the existence and uniquiness of the solution of the boundary value problem with integral conditions for the systems of linear differential equations are given. The Green function and conjugate operator are constructed, also the alternative principle is proved. Some sufficient conditions for the existence and uniquiness of the solution for the non-linear systems are obtained on diverses generalized normed linear spaces. It is proved that these conditions hold also for the multipoints boundary value problems.