LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 1, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 1, 1967

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЙ ИНДИКАТОР ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ НУЛЯМИ

А. А. КОНДРАТЮК

Мы будем рассматривать целые функции $f(z)$ с положительными нулями $0<a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots$ конечного положительного порядка ρ. Обозначим через $n_{f(r)}$ число нулей функции $f(re^{i\varphi})$ на сегменте $[0, r]$, а через $N_f(r)$ – величину

$$N_f(r)=\int\limits_0^r n_f(t)\,d\ln t=An_f(t).^{*)} \tag{1}$$

Пусть $\rho(r)$ – некоторый уточненный порядок [1], $\rho(r)\to\rho$ при $r\to\infty$, такой, что $0<\Delta_f<\infty$, где

$$\Delta_f=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N_f(r)}{r^{\rho(r)}}. \tag{2}$$

Обозначим через $G\big(\Delta,\ \rho(r)\big)=G(\Delta)$ класс целых функций с положительными нулями порядка ρ, у которых верхняя плотность нулей Δ_f, измеренная с помощью функции $r^{\rho(r)}$, не превосходит положительного числа Δ.

В настоящей статье мы находим точную оценку сверху для индикаторов целых функций [1] из класса $G(\Delta)$.

Аналогичную задачу, в которой Δ_f определялось как

$$\Delta_f=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n_f(r)}{r^{\rho(r)}}$$

решил А. А. Гольдберг [2], [3], [4] (в [3] изложена история вопроса). Функция $N_f(r)$, хотя и более сложная, чем $n_f(r)$, однако более употребительна в неванлинновской теории (см., например, [5]). Кроме того, в силу известной формулы Иенсена равенство (2) можно переписать в виде

$$\Delta_f=\overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-\rho(r)}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi,$$

и нашу задачу можно интерпретировать так: зная рост среднего значения $\ln|f(z)|$ на окружности $|z|=r$, оценить рост $\ln|f(z)|$ на каждом луче $\arg z=\varphi$.

Через a^+ будем обозначать число $\frac{1}{2}(a+|a|)$, а через a^- – число $(-a)^+$.

Автор выражает глубокую признательность А. А. Гольдбергу за внимательное руководство и непосредственную помощь в работе.

*) Через A будем вообще обозначать оператор, переводящий неотрицательную функцию $\alpha(t)$, заданную на $(0, \infty)$, такую, что интеграл от $\alpha(t)/t$ существует на $(0, a)$ при любом a, в функцию

$$\int\limits_0^r \alpha(\tau)\,d\ln\tau,\quad 0<r<\infty.$$

§ 1. Целые функции нецелого порядка. Предварительные замечания

В § § 1—5 мы будем рассматривать целые функции нецелого порядка $\rho > [\rho] = p$. Индикаторы будем измерять относительно того же уточненного порядка $\rho(r)$, с помощью которого вводится верхняя плотность нулей (2), таким образом

$$h_f(\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho(r)}}, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi. \tag{1.1}$$

Мы докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Для всякой целой функции $f(z) \in G(\Delta)$ выполняется неравенство*

$$h_f(\varphi) \leqslant \Delta\rho l(\varphi,\ \rho), \tag{1.2}$$

где $l(\varphi,\ \rho)$ — некоторая непрерывная функция от φ, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

Существует целая функция $f(z) \in G(\Delta)$, такая, что

$$h_f(\varphi) = \Delta\rho l(\varphi,\ \rho) \tag{1.3}$$

для всех φ, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

Вид функции $l(\varphi,\ \rho)$ дан в конце § 4.

Известно [1], что всякая функция $f(z) \in G(\Delta)$ представима в виде $f(z) = \exp\{P(z)\}g(z)$, где $g(z)$ — каноническое произведение рода p, а $P(z)$ — многочлен степени не выше p. Так как $\ln|\exp\{P(z)\}| = 0(|z|^p) = 0(|z|^{\rho(|z|)})$, то $h_f(\varphi) = h_g(\varphi)$. Поэтому мы, не уменьшая общности, будем в § § 1—5 считать, что

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_n},\ p\right),$$

где $E(u,\ p)$ — первичный множитель Вейерштрасса рода p.

Всюду далее будем считать $0 < \varphi < 2\pi$. Справедливость результата для $\varphi = 0$ будет следовать по непрерывности. В обозначениях N_f, n_f, h_f будем иногда опускать значок f.

Представим $\ln|f(re^{i\varphi})|$ интегралом Стилтьеса (см., например, [2]) и, интегрируя по частям, получим:

$$\ln|f(re^{i\varphi})| = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left|E\left(\frac{z}{a_n},\ p\right)\right| = \int_0^{\infty} \ln\left|E\left(\frac{r}{\tau}e^{i\varphi},\ p\right)\right| dn(\tau) =$$

$$= \int_0^{\infty} n(\tau)K_1(r,\ \tau,\ \varphi,\ p)\left(\frac{r}{\tau}\right)^{p+1} d\tau = \int_0^{\infty} N(\tau)L_1(r,\ \tau,\ \varphi,\ p)\left(\frac{r}{\tau}\right)^{p+1} d\tau =$$

$$= \int_0^{\infty} n(rt)K(1,\ t,\ \varphi,\ p)\,dt = \int_0^{\infty} N(rt)L(1,\ t,\ \varphi,\ p)\,dt =$$

$$= F\Big(n(rt)\Big) = F_1\Big(N(rt)\Big). \tag{1.4}$$

Здесь

$$K(r,\ t,\ \varphi,\ p) = \left(\frac{r}{t}\right)^{p+1} K_1(r,\ t,\ \varphi,\ p) = \left(\frac{r}{t}\right)^{p+1} \frac{r\cos p\varphi - t\cos(p+1)\varphi}{r^2 - 2rt\cos\varphi + t^2} =$$

$$= -\frac{d}{dt}\ln\left|E\left(\frac{r}{t}e^{i\varphi},\ p\right)\right|; \tag{1.5}$$

$$L_1(r,\ t,\ \varphi,\ p)=p\,K_1(r,\ t,\ \varphi,\ p)-t\,\frac{\partial K_1(r,\ t,\ \varphi,\ p)}{\partial t}=$$
$$=p\,\frac{r\cos p\varphi-t\cos(p+1)\varphi}{r^2-2rt\cos\varphi+t^2}-$$
$$-t\,\frac{r^2\cos(p-1)\varphi-2rt\cos p\varphi+t^2\cos(p+1)\varphi}{(r^2-2rt\cos\varphi+t^2)^2}; \qquad (1.5')$$

$$\frac{d^2}{(d\ln t)^2}\ln\left|E\left(\frac{r}{t}e^{i\varphi},\ p\right)\right|=\frac{d}{d\ln t}(-tK)=tL;\quad L=\left(\frac{r}{t}\right)^{p+1}L_1. \qquad (1.5'')$$

Ограничимся сначала случаем $\rho(r)\equiv\rho$. От этого ограничения мы освободимся в § 5.

Если $f(z)\in G(\Delta)$, то без уменьшения общности можем считать, что для всех r, $0<r<\infty$, и произвольно малого $\varepsilon>0$ выполняется

$$N_f(r)=An_f(r)\leqslant(\Delta+\varepsilon)r^{\rho}. \qquad (1.6)$$

Этого можно добиться, разделив $f(z)$ на некоторый многочлен, что не повлияет ни на индикатор, ни на верхнюю плотность нулей.

Из [1.1] и [1.4] следует, что при фиксированном φ, $0<\varphi<2\pi$, для некоторой последовательности $r_k\to\infty$ и произвольно малого $\varepsilon>0$ существует k_0, такое, что при $k>k_0$ справедливо неравенство

$$h_f(\varphi)-\varepsilon\leqslant r_k^{-\rho}F\left(n_f(r_k t)\right). \qquad (1.7)$$

Мы рассмотрим класс $R(\delta)$ неотрицательных неубывающих функций $\nu(t)$, $0<t<\infty$, $\delta>0$,

$$R(\delta)=\{\nu(t):A\nu(t)=H(\ln t)\leqslant\delta t^{\rho}\}. \qquad (1.8)$$

Определим функционалы F и F_1 при $\nu(t)\in R(\delta)$ следующим образом: $F\left(\nu(t)\right)=\int\limits_0^{\infty}\nu(t)K(r,\ t,\ \varphi,\ p)\,dt$ и $F_1\left(H(\ln t)\right)=\int\limits_0^{\infty}H(\ln t)\,L\,(r,\ t,\ \varphi,\ p)\,dt$. Мы будем находить $\sup\limits_{\nu(rt)\in R((\Delta+\varepsilon)r^{\rho})}F\left(\nu(rt)\right)$.

В § 5 мы докажем теорему 1, где в правых частях (1.2) и (1.3) стоит

$$\sup_{\nu(t)\in R(\Delta)}F\left((\nu(t)\right)=\rho\Delta I(\varphi,\ \rho).$$

Равные почти всюду функции из класса $R(\delta)$ будем считать эквивалентными. Обозначим далее $R(1)$ через R.

§ 2. Исследование функций $K_1(1,\ t,\ \varphi,\ p)$, $L_1(1,\ t,\ \varphi,\ p)$

В дальнейшем в K_1, L_1, K, L будем обозначать зависимость лишь от t и φ или лишь от одного переменного t, в $E(u,\ p)$ не будем отмечать зависимость от p.

Множество точек φ, $0<\varphi<2\pi$, для которых функция $K_1(t,\ \varphi)$ как функция от t, имеет при $0<t<\infty$ ровно i нулей, $i=0,\ 1$, и положительна (отрицательна) в достаточно малой окрестности $t=0$, будем обозначать через $\Phi_i(+)\left(\Phi_i(-)\right)$. Эти множества зависят от p, причем, некоторые из них могут оказаться пустыми для фиксированного p. Очевидно функция $K_1(t,\ \varphi$ может обращаться в нуль при $0<t<\infty$ лишь в точке

$$t=\frac{\cos p\varphi}{\cos(p+1)\varphi}=c(\varphi).$$

Элементарный анализ (см. [2]) показывает, что

2_1) при $\varphi \in \Phi_0(+)$ выполняются неравенства: $\cos p\varphi \geqslant 0$ и $\cos(p+1)\varphi \leqslant 0$, $K_1(t) > 0$ для всех $t \in (0, \infty)$;

2_2) при $\varphi \in \Phi_0(-)$ выполняются неравенства: $\cos p\varphi \leqslant 0$ и $\cos(p+1)\varphi \geqslant 0$, $K_1(t) < 0$ для всех $t \in (0, \infty)$;

2_3) при $\varphi \in \Phi_1(+)$ выполняются неравенства: $\cos p\varphi > 0$ и $\cos(p+1)\varphi > 0$, $\ln\left|E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right)\right| > 0$ для $0 < t < e_0(\varphi)$, $\ln\left|E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right)\right| < 0$ для $e_0(\varphi) < t < +\infty$, $e_0(\varphi) < c(\varphi)$, а также справедливы соотношения: $\ln\left|E\left(\frac{e^{i\varphi}}{e_0(\varphi)}\right)\right| = 0$, $\ln\left|E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right)\right| \to \infty$ при $t \to 0$, $\ln\left|E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right)\right| \to 0$ при $t \to \infty$, причем $\ln\left|E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right)\right|$ убывает при $t \in \big(0, c(\varphi)\big)$ и возрастает при $t \in \big(c(\varphi), \infty\big)$ монотонно;

2_4) при $\varphi \in \Phi_1(-)$ выполняются неравенства: $\cos p\varphi < 0$ и $\cos(p+1)\varphi < 0$

Очевидно, указанные множества не пересекаются и

$$\bigcup_{i=0}^{1}\big(\Phi_i(+) + \Phi_i(-)\big) = \{0 < \varphi < 2\pi\}.$$

Нули функции $\frac{\partial K_1(t)}{\partial t} = K_1'(t)$ как функции от t определяются формулой (при $\cos(p+1)\varphi \neq 0$)

$$\varkappa_{1,2}(\varphi) = \varkappa_{1,2} = \frac{\cos p\varphi \pm |\sin\varphi|}{\cos(p+1)\varphi}. \tag{2.1}$$

Причем при $0 < t < \infty$ для положительных $\varkappa_{1,2}$ справедливо соотношение

$$\varkappa_1 < c(\varphi) < \varkappa_2, \tag{2.1'}$$

ибо если $\sin\varphi = 0$, $0 < \varphi < 2\pi$, то $\varphi = \pi$, и $\varkappa_{1,2}(\pi) = -1$.

Легко проверить, что при $\cos(p+1)\varphi \neq 0$, $\varphi \neq \pi$, 0, справедливо

$$\varkappa_2 > \cos\varphi.$$

Покажем это, например, для случая, когда $\cos(p+1)\varphi < 0$. Тогда наше неравенство равносильно следующим:

$$\frac{\cos p\varphi - |\sin\varphi|}{\cos(p+1)\varphi} > \cos\varphi,$$

$$\cos p\varphi\cos^2\varphi - \sin p\varphi\sin\varphi\cos\varphi > \cos\varphi - |\sin\varphi|,$$

$$-\sin\varphi\sin(p+1)\varphi > -|\sin\varphi|,$$

$$\pm\sin(p+1)\varphi > -1.$$

Положим в (1.5') $r = 1$. После приведения к общему знаменателю в (1.5') в числителе будет стоять многочлен по t, который мы обозначим через $P_3(\varphi, t)$,

$$P_3(\varphi, t) = p\big(\cos p\varphi - t\cos(p+1)\varphi\big)(1 - 2t\cos\varphi + t^2) -$$

$$- t\big(\cos(p-1)\varphi - 2t\cos p\varphi + t^2\cos(p+1)\varphi\big).$$

Точки на положительной полуоси, в которых многочлен $P_3(\varphi, t)$ меняет знак, если они существуют, будем обозначать через $t_1(\varphi) = t_1$, $t_2(\varphi) = t_2$, $t_3(\varphi) = t_3$ в порядке их возрастания. Мы будем использовать тот факт, что $\cos p\varphi$ и $\cos(p+1)\varphi$ не равны нулю одновременно.

Пусть $p \geqslant 1$. Множество тех $\varphi \in \Phi_i(+)\big(\Phi_i(-)\big)$, для которых функция $L_1(t, \varphi)$, $0<t<\infty$, j раз меняет знак и положительна (отрицательна) в достаточно малой правосторонней окрестности точки $t=0$, обозначим через $\Phi_{ij}(+)$ $\big($через $\Phi_{ij}(-)\big)$.

$2_1'$) Пусть $\varphi \in \Phi_0(+)$. Тогда $P_3(\varphi,\ 0)>0$, если $\cos p\varphi>0$. Если же $\cos p\varphi=0$, то

$$P_3(\varphi,\ t)=-t\cos(p+1)\varphi\{p-1-2pt\cos\varphi+t^2\}.$$

Следовательно, $P_3(\varphi,\ t)>0$ в достаточно малой окрестности $t=0$, так как $\cos(p+1)\ \varphi<0$. Для достаточно больших t многочлен $P_3\ (\varphi,\ t)>0$. Это сразу видно, если $\cos(p+1)\varphi<0$. Если же $\cos(p+1)\varphi=0$, то справедливость этого следует из неравенства $\cos p\varphi>0$. Следовательно, для положительных t функция $L_1(t)$ или ни разу не меняет знака, или дважды меняет знак. Таким образом, мы получили разбиение множества $\Phi_0(+)$ на два непересекающихся подмножества $\Phi_{00}(+)$ и $\Phi_{02}(+)$.

$2_2'$) Пусть $\varphi \in \Phi_0(-)$. Из рассуждений, совершенно аналогичных только что проведенным, вытекает, что множество $\Phi_0(-)$ представляется как сумма непересекающихся подмножеств $\Phi_{00}(-)$, $\Phi_{02}(-)$.

$2_3'$) Пусть $\varphi \in \Phi_1(+)$. Так как $\cos(p+1)\varphi>0$ и $\cos p\varphi>0$, то $P_3(\varphi,\ t)<0$ для достаточно больших t, $P_3(\varphi,\ 0)>0$. Следовательно, функция $L_1\ (t)$, $0<t<\infty$, может иметь одну или три перемены знака. Из неравенства $K_1'\big(c(\varphi)\big)<0$, которое легко проверить, учитывая соотношение (2.1′), следует, что $P_3\big(\varphi,\ c(\varphi)\big)>0$, но $P_3(\varphi,\ t)<0$ для $t\geqslant \varkappa_2$. Следовательно, при $\varphi\in\Phi_{1j}$, $j=1,\ 3$, выполняется неравенство

$$\varkappa_2>t_j>c(\varphi).$$

2_4) Пусть $\varphi \in \Phi_1(-)$. Рассуждая как в $2_3'$), получим разбиение множества $\Phi_1(-)$ на непересекающиеся подмножества $\Phi_{11}(-)$ и $\Phi_{13}(-)$. При этом выполняется неравенство (2.2).

Покажем, что при $\varphi \in \Phi_{13}(-) \cup \Phi_{13}(+)$ справедливо соотношение

$$t_1<t_2<c(\varphi), \tag{2.3′}$$

которое вместе с неравенством (2.2) дает:

$$t_1<t_2<c(\varphi)<t_3. \tag{2.3}$$

Обозначим $Q_p=Q_p(\varphi,\ t)=\cos(p-1)\varphi-2t\cos p\varphi+t^2\cos(p+1)\varphi$. Нули многочлена $Q_p=(\varphi,\ t)$ равны $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$. Мы будем использовать тождества $\sin^2\varphi=$ $=\cos^2 p\varphi-\cos(p+1)\varphi\cos(p-1)\varphi$ и $\cos(p+1)\varphi=2\cos\varphi\cos p\varphi-\cos(p-1)\varphi$. Так как

$$\big(\cos p\varphi-t\cos(p+1)\varphi\big)(1-2t\cos\varphi+t^2)=-t^3\cos(p+1)\varphi+$$
$$+t^2\Big[\big(2\cos\varphi\cos(p+1)\varphi-\cos p\varphi\big)+2\cos p\varphi\Big]-t\Big[\big(2\cos\varphi\cos p\varphi-$$
$$-\cos(p+1)\varphi\big)+2\cos(p+1)\varphi\Big]+\cos p\varphi=-t\,Q_p+Q_{p+1},$$

то $P_3(\varphi,\ t)=pQ_{p+1}-(p+1)tQ_p$ и уравнение $P_3(\varphi,\ t)=0$ перепишется в виде

$$\frac{Q_{p+1}}{Q_p}=\frac{p+1}{p}\,t. \tag{2.4}$$

Так как выражения $P_3\left(\varphi,\ c(\varphi)\right)$ и $P_3(\varphi,\ t)$ при $t \geqslant \varkappa_2$ разных знаков, то соотношение (2.3′) будет доказано, если мы покажем, что уравнение (2.4) имеет при $c(\varphi) \leqslant t < \varkappa_2$ только один корень. Последнее утверждение будет следовать из неравенства

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{Q_{p+1}}{Q_p}\right) > \frac{p+1}{p} \quad \text{при} \quad c(\varphi) \leqslant t < \varkappa_2. \tag{2.5}$$

Обозначая $I(\varphi,\ t) = 1 - 2t\cos\varphi + t^2$, имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{Q_{p+1}}{Q_p}\right) = \frac{\sin^2\varphi\, I}{Q_p^2} = I_p(\varphi,\ t).$$

Действительно,

$$\frac{1}{2}\left(Q'_{p+1}Q_p - Q'_pQ_{p+1}\right) = t^2\sin^2\varphi + t\Big[\cos(p-1)\varphi\Big(2\cos\varphi\cos(p+1)\varphi -$$

$$-\cos p\varphi\Big) - \cos p\varphi\left(2\cos\varphi\cos p\varphi - \cos(p-1)\varphi\right)\Big] + \sin^2\varphi = \sin^2\varphi\, I.$$

Многочлен $\left(Q_p(\varphi,\ t)\right)^2$ убывает при $\varkappa_2 > t \geqslant \cos\varphi$, многочлен $I(\varphi,\ t)$ возрастает при $t > \cos\varphi$ и $I_p\left(\varphi,\ c(\varphi)\right) = 1$. Следовательно, неравенство (2.5) доказано для тех $\varphi \in \Phi_{13}(-) \cup \Phi_{13}(+)$, при которых выполняется неравенство

$$\cos\varphi \leqslant c(\varphi).$$

Пусть $\cos\varphi > c(\varphi)$. Так как $I_p(\varphi,\ \cos\varphi) = \cos^{-2}(p+1)\varphi > 1$, то неравенство (2.5) достаточно доказать для $c(\varphi) \leqslant t \leqslant \cos\varphi$. Обозначим

$$\tau(\alpha) = c(\varphi) + \alpha\frac{|\sin\varphi|}{|\cos(p+1)\varphi|}, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1. \tag{2.6}$$

Ясно, что $\tau(1) = \varkappa_2$. Поэтому $\tau(\alpha_0) = \cos\varphi$ при $0 < \alpha_0 < 1$,

$$\alpha_0 = \frac{\cos\varphi - c(\varphi)}{|\sin\varphi|}\,|\cos(p+1)\varphi|. \tag{2.6′}$$

Неравенство (2.5) перепишется для $c(\varphi) \leqslant t \leqslant \cos\varphi$ следующим образом:

$$I_p\left(\varphi,\ \tau(\alpha)\right) = \frac{(1+\alpha^2)\sin^2\varphi + 2\alpha\,|\sin\varphi|\,|\cos(p+1)\varphi|\,[c(\varphi) - \cos\varphi]}{(\alpha^2-1)^2\sin^2\varphi} =$$

$$= \frac{\alpha^2 - 2\alpha\alpha_0 + 1}{(1-\alpha^2)^2} \geqslant \frac{p+1}{2p}, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0 < 1. \tag{2.5′}$$

Но

$$\min_{0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0} I_p\left(\varphi,\ \tau(\alpha)\right) = \frac{1}{2\left(1 - \sqrt{1-\alpha_0^2}\right)}.$$

Из равенства (2.6′) находим, что $1 - \alpha_0^2 = \cos^2(p+1)\varphi$. Неравенство (2.5′), таким образом, будет следовать из неравенства

$$|\cos(p+1)\varphi| > \frac{1}{p+1}. \tag{2.7}$$

Пусть $\varphi \in \Phi_{13}(-)$. Рассмотрим множество Φ_c тех $\varphi \in \Phi_{13}(-)$, которые удовлетворяют условиям $0 < c(\varphi) \leqslant 1$ и $\cos\varphi > 0$. Это множество содержится в интервалах $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ и $\left(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right)$. Рассмотрим интервал $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$. Множество точек $\varphi \in \Phi_c$, содержащихся в интервале $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$, состоит из всех интервалов вида $\left(\frac{\pi(2k+1)}{2p}, \frac{4(k+1)\pi}{4p+1}\right)$, $k=0, 1, \ldots, \left[\frac{p-2}{2}\right]$, где левый и правый концы этих интервалов найдены нами соответственно из следующих уравнений.

$$\cos p\varphi_k=0 \text{ и } \cos p\varphi_k=\cos(p+1)\varphi_k, \quad \frac{\pi(2k+1)}{2p}<\varphi_k<\frac{(k+1)\pi}{p}.$$

Пусть

$$\varphi\in\left(\frac{\pi(2k+1)}{2p}, \frac{4(k+1)\pi}{4p+1}\right).$$

Тогда

$$\cos(p+1)\varphi<\max\left\{\cos\frac{p+1}{2p}\pi(2k+1), \cos\left((p+1)\frac{4(k+1)\pi}{4p+1}\right)\right]. \tag{2.8}$$

Мы будем использовать неравенство $\sin\beta>\frac{2}{\pi}\beta$ при $\beta\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Нетрудно показать, что при $k=0, 1, \ldots, \left[\frac{p-2}{2}\right]$ справедливы неравенства

$$\cos\left(\frac{p+1}{2p}\pi(2k+1)\right)\leqslant\cos\frac{(p+1)\pi}{2p}=-\sin\frac{\pi}{2p}<-\frac{1}{p+1},$$

$$\cos\frac{4(p+1)(k+1)\pi}{4p+1}=\cos\left((k+1)\pi-\frac{3(k+1)\pi}{4p+1}\right)=-\sin\frac{3(k+1)\pi}{4p+1}<-\frac{1}{p+1}.$$

Из последних соотношений и неравенства (2.8) следует неравенство (2.7) для точек $\varphi\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Чтобы получить неравенство (2.7) для точек $\varphi\in\Phi_c$, содержащихся в интервале $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, рассуждаем аналогично, прибавив $\frac{3\pi}{2}$ к аргументу φ. Таким образом, неравенство (2.7) для $\varphi\in\Phi_{13}(-)$ доказано. При $\varphi\in\Phi_{13}(+)$ мы придем к доказательству неравенства

$$\cos(p+1)\varphi>\frac{1}{p+1}. \tag{2.9}$$

для тех $\varphi\in\Phi_{13}(+)$, которые удовлетворяют условиям $0<c(\varphi)\leqslant 1$ и $\cos\varphi>0$. Учитывая структуру указанного множества точек φ, как и в предыдущем случае приходим к неравенству (2.9). Тем самым доказательство соотношения (2.3) завершено.

Пусть теперь $p=0$. Запишем равенство

$$(0, 2\pi)=\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]\cup\left\{\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)\right\}.$$

Первое из этих множеств есть $\Phi_{00}(+)=\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Множество $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\cup$ $\cup\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ обозначим через Φ_{12}. При $p>0$ будем считать, что Φ_{12} пустое множество. Легко видеть, что при $\varphi\in\Phi_{12}$ справедливы соотношения: $\cos\varphi>$ >0, $L_1(t)<0$ в достаточно малой окрестности точки $t=0$, $L_1(t_2)=L_1(t_3)=0$, где

$$0<t_2=\frac{1-|\sin\varphi|}{\cos\varphi}<c(\varphi)=\frac{1}{\cos\varphi}<\frac{1+|\sin\varphi|}{\cos\varphi}=t_3<\infty, \quad e_0\varphi=\frac{1}{2\cos\varphi}. \tag{2.10}$$

Выводы относительно числа нулей, взаимного их расположения, знака функции $L_1(t)\left(K_1(t)\right)$, очевидно, справедливы и для ядра $L(t)\left(K(t)\right)$.

Итак, в этом параграфе мы получили разбиение интервала $(0,\ 2\pi)$ на непересекающиеся подмножества Φ_{12}, $\Phi_{ij}(+)$, $\Phi_{ij}(-)$, $i=0,\ 1$, $j=i,\ i+2$, которые зависят от p, такие, что

$$\Phi_{12}\bigcup_{i,j}\Phi_{ij}(+)\cup\Phi_{ij}(-)=\{0<\varphi<2\pi\}.$$

Здесь первый индекс означает число нулей ядра $K(t)$, второй — число перемен знака ядра $L(t)$, $0<t<\infty$. Значок $(+)$ или $(-)$ показывает положительны или отрицательны $K(t)$ и $L(t)$ в достаточно малой окрестности $t=0$.

Через $\Phi_{11}^0(+)$ обозначим объединение множества тех $\varphi\in\Phi_{13}(+)$, для которых выполняется неравенство $e_0(\varphi)\leqslant t_1(\varphi)$, и множества $\Phi_{11}(+)$, через $\Phi_{13}^0(+)$ — множество тех $\varphi\in\Phi_{13}(+)$, для которых выполняется неравенство $e_0(\varphi)>t_1(\varphi)$.

§ 3. Определение и свойства операторов B_k

Оператор A переводит класс $R=R$ (1) (см. (1.8)) функций $\nu(t)$, $0<t<\infty$ в класс выпуклых функций $H(x)=A\nu(e^x)$, который мы обозначим через S. Далее, $\ln t=x$. Для каждой функции $H(x)\in S$ и произвольных чисел $a\leqslant b\leqslant c$ справедливы соотношения

$$0\leqslant H(x)\leqslant e^{\rho x}, \tag{3.1}$$

$$\frac{H(b)-H(a)}{b-a}\leqslant\frac{H(c)-H(b)}{c-b}. \tag{3.2}$$

Здесь (3.1) следует из (1.8), а (3.2) — из выпуклости функции $H(x)$.

Через $y(a,\ b;\ x)$ и $l(s;\ x)$ обозначим следующие линейные функции:

$$y(a,\ b;\ x)=\frac{x-a}{b-a}H(b)+\frac{b-x}{b-a}H(a),$$

$$l(s;\ x)=\rho e^{\rho s}(x-s)+e^{\rho s},\quad l(-\infty,\ x)\equiv 0.$$

Из выпуклости $H(x)$ следуют неравенства

$$H(x)\leqslant y(a,\ b;\ x)\quad\text{при}\quad x\in[a,\ b], \tag{3.3}$$

$$H(x)\geqslant y(a,\ b;\ x)\quad\text{при}\quad x\,\overline{\in}\,(a,\ b). \tag{3.4}$$

Пусть $-\infty\leqslant x_1<x_2<x_3\leqslant+\infty$ — некоторые числа, $t_i=\exp x_i$, $i=1,\ 2,\ 3$. Определим на S оператор $B_1=B_1(x_i)$ следующим образом. При $H(x)\in S$ положим

$$B_1H(x)=H_1(x)=\begin{cases} e^{\rho x} & \text{для } x\in(-\infty,\ s_i),\\ l(s_i;\ x) & \text{для } x\in(s_i,\ +\infty),\end{cases} \tag{3.5}$$

где s_i — такая точка оси x, что

$$H(x_i)=l(s_i;\ x_i),\quad -\infty\leqslant s_i\leqslant x_i. \tag{3.6}$$

Из простых геометрических соображений следует, что точка s_i, удовлетворяющая соотношению (3.6), единственна, поскольку $y=l(s;\ x)$ как функция от x представляет уравнение касательной к кривой $y=e^{\rho x}$ с точкой касания $(s,\ e^{\rho s})$. При этом, положив $\xi_i=\exp s_i$, имеем:

$$0\leqslant\xi_i\leqslant t_i. \tag{3.7}$$

Заметим, что при разных $H(x)$ точка ξ_i может лежать в любой точке сегмента $[0,\ t_i]$. Аналогичные замечания будут справедливы в соответствующих случаях и в дальнейшем, но мы не будем это специально отмечать.

Покажем, что

$$H(x) \leqslant H_1(x) \text{ при } -\infty < x \leqslant x_i, \tag{3.8}$$

$$H(x) \geqslant H_1(x) \text{ при } x_i \leqslant x < +\infty. \tag{3.9}$$

Из соотношения (3.6) находим, что

$$l(s_i;\ x) \equiv \frac{x-s_i}{x_i-s_i} H(x_i) + \frac{x_i-x}{x_i-s_i} e^{\rho s_i}. \tag{3.10}$$

Учитывая (3.1) и (3.5), и положив $a=s_i$, $b=x_i$ из (3.10) и (3.3) находим (3.8), из (3.10) и (3.4) находим (3.9). Действительно, при $x \in [s_i,\ x_i]$

$$H(x) \leqslant \frac{x-s_i}{x_i-s_i} H(x_i) + \frac{x_i-x}{x_i-s_i} H(s_i) \leqslant \frac{x-s_i}{x_i-s_i} H(x_i) + \frac{x_i-x}{x_i-s_i} e^{\rho s_i} = H_1(x),$$

при $x \in [x_i,\ +\infty]$

$$H(x) \leqslant \frac{x-s_i}{x_i-s_i} H(x_i) + \frac{x_i-x}{x_i-s_i} H(s_i) \geqslant \frac{x-s_i}{x_i-s_i} H(s_i) + \frac{x_i-x}{x_i-s_i} e^{\rho s_i} = H_1(x).$$

Оператор $B_2 = B_2(x_i)$ определим на S следующим образом. При $H(x) \in s$ положим:

$$B_2 H(x) = H_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \in \left(-\infty,\ s_i - \frac{1}{\rho}\right), \\ l(s_i;\ x) & \text{для } x \in \left[s_i - \frac{1}{\rho},\ s_i\right], \\ e^{\rho x} & \text{для } x \in (s_i,\ +\infty), \end{cases} \tag{3.11}$$

где s_i определено соотношением

$$H(x_i) = l(s_i;\ x_i),\quad s_i \geqslant x_i. \tag{3.6'}$$

Из соотношений (3.1) и (3.6′) находим, что $(s_i = \ln \xi_i)$

$$x_i \leqslant s_i \leqslant x_i + \frac{1}{\rho},\quad t_i \leqslant \xi_i \leqslant t_i e^{\frac{1}{\rho}}. \tag{3.12}$$

Покажем, что справедливы также соотношения

$$H(x) \leqslant H_2(x) \text{ для } x \in [x_i,\ +\infty), \tag{3.13}$$

$$H(x) \geqslant H_2(x) \text{ для } x \in (-\infty,\ x_i). \tag{3.14}$$

Действительно, из соотношения (3.6′) следует тождество (3.10) и, учитывая (3.1) и (3.11) и положив $a=x_i$, $b=s_i$, получаем неравенство (3.13) из (3.10) и (3.3), неравенство (3.14) из (3.10) и (3.4)

Определим теперь на S оператор $B_3 = B_3(x_1,\ x_2)$.

Положим

$$B_3 H(x) = H_3(x) = \begin{cases} B_1(x_1) H(x) & \text{при } x \leqslant s_0, \\ B_2(x_2) H(x) & \text{при } x > s_0, \end{cases} \tag{3.15}$$

где s_0 удовлетворяет следующему уравнению по x: $l(s_1;\ x) = l(s_2;\ x)$, т. е.

$$s_0 = s_0(s_1,\ s_2) = \frac{e^{\rho s_2}(1-\rho s_2) - a^{\rho s_1}(1-\rho s_1)}{\rho\,(e^{\rho s_1} - e^{\rho s_2})}, \tag{3.16}$$

здесь s_1 и s_2 удовлетворяют соотношениям (3.6) и (3.6′) соответственно.

Обозначая $\xi_i=\exp s_i$, $i=0,\ 1,\ 2$, получим, что справедливы соотношения (3.7) и (3.13), а также

$$\xi_0=\xi_0(\xi_1,\ \xi_2)=\exp\frac{\xi_2^\rho(1-\rho\ln\xi_2)-\xi_1^\rho(1-\rho\ln\xi_1)}{\rho(\xi_1^\rho-\xi^\rho)}. \tag{3.16$'$}$$

Учитывая (3.15), из неравенств (3.8) и (3.13) находим, что

$$H(x)\leqslant H_3(x) \text{ для } x\,\overline{\in}\,(x_1,\ x_2). \tag{3.17}$$

Из неравенств (3.9) и (3.14) аналогично получаем, что

$$H(x)\geqslant H_3(x) \text{ для } x\in[x_1,\ x_2]. \tag{3.18}$$

Перейдем к определению на S оператора $B_4=B_4(x_1,\ x_2,\ x_3)$. Уравнение по x

$$e^{\rho x}=y(x_2,\ x_3;\ x) \tag{3.19}$$

или не имеет ни одного корня, или имеет два корня (они могут совпадать), которые лежат в промежутке $[x_2,\ x_3]$. Действительно, обозначая через $h(x)$ разность $e^{\rho x}-y(x_2,\ x_3;\ x)$, имеем:

$$h(x_i)=e^{\rho x_i}-H(x_i)\geqslant 0,\ i=2,\ 3.$$

Если уравнение (3.19) не имеет корней, то положим

$$B_4H(x)=H_4(x)=\begin{cases} B_1(x_1)H(x) \text{ при } x\leqslant\lambda, \\ y(x_2\ x_3;\ x) \text{ при } x>\lambda, \end{cases} \tag{3.20}$$

где λ удовлетворяет следующему соотношению:

$$l(s_1;\ \lambda)=y(x_2,\ x_3;\ \lambda), \tag{3.20$'$}$$

здесь s_1 удовлетворяет равенству (3.6) с $i=1$.

Учитывая соотношения (3.2) и (3.9) из простых геометрических соображений заключаем, что $x_1\leqslant\lambda\leqslant x_2$. Если уравнение (3.19) имеет два корня, то для чисел s_2 и s_3, удовлетворяющих соотношениям

$$H(x_2)=l(s_2;\ x_2),\ s_2\geqslant x_2$$

и

$$H(x_3)=l(s_3;\ x_3),\ s_3\leqslant x_3,$$

соответственно, справедливо неравенство $s_2\leqslant s_3$. Это также следует из элементарных геометрических соображений. В случае, когда уравнение (3.19) имеет два корня, полагаем

$$B_4H(x)=H_4(x)=\begin{cases} B_3(x_1,x_2)H(x) \text{ при } x\leqslant s_3, \\ l(s_3;\ x) \text{ при } x>s_3. \end{cases} \tag{3.21}$$

Справедливы соотношения:

$$H(x)\leqslant H_4(x) \text{ для } x\in(-\infty,\ x_1)\cup(x_1\ x_3), \tag{3.22}$$

$$H(x)\geqslant H_4(x) \text{ для } x\in[x_1,\ x_2]\cup[x_3,\ \infty). \tag{3.23}$$

Действительно, если $H_4(x)$ определяется по (3.20), то последние соотношения для $x\leqslant\lambda$ следуют из соотношений (3.8) и (3.9), для $x>\lambda$ из (3.3) и (3.4). Если же имеет место соотношение (3.21), то объединяя аналогичные неравенства для операторов $B_3(x_1,\ x_2)$ и $B_1(x_3)$ при $x\leqslant s_3$ и при $x>s_3$, сотвественно, приходим к (3.22) и (3.23).

Определим оператор $B_5(x_2, x_3)$ в классе S, положив

$$B_5(x_2, x_3)\,H(x)=H_5(x)=B_4(-\infty, x_2, x_3)\,H(x). \tag{3.24}$$

Тогда из неравенства (3.22) и (3.23) следует, что

$$H(x)\leqslant H_5(x) \text{ для } x\in(x_2, x_3), \tag{3.22'}$$

$$H(x)\geqslant H_5(x) \text{ для } x\in(-\infty, x_1]\cup[x_3, \infty). \tag{3.23'}$$

Очевидно, оператор B_k, $k=1, 2, \ldots, 5$, переводит класс функций S в подкласс $S_k\subset S$. Через R_k обозначим класс функций $\left\{\nu(t)=A^{-1}H_k(\ln t)=\right.$ $\left.=A^{-1}B_k H(\ln t)\right\}$, где A^{-1} – оператор, обратный к A, $H_k(x)\in S_k$. Очевидно также, что

$$R_k\subset R. \tag{3.25}$$

Некоторые другие операторы будут определены в следующем параграфе.

§ 4. Нахождение максимума функционала F

Пусть действительные функции $h(t)$, $\delta(t)$ и $\tau(t)$ определены при $0<t<\infty$, $\delta(t)>0$, $F\big(h(t)\big)$ – некоторый линейный функционал, оцределенный на некотором классе T_0 функций $h(t)$, такой, что для $0<r<\infty$ из соотношения $h(t)\in T_0$ следуют соотношения $h(rt)\in T_0$ и $rh(t)\in T_0$. Класс функций $h(t)\in T_0$, удовлетворяющих для некоторого числа $\delta>0$ условию

$$h(t)\leqslant\delta\tau(t)$$

обозначим через $T(\delta)$, $T(1)=T$.

Лемма 1. *Если для некоторого* $r>0$ *и функции* $h(t)\in T_0$ *выполняется неравенство*

$$h(rt)\leqslant\delta(r)\,\tau(t),$$

то

$$h(rt)\in T\big(\delta(r)\big)$$

и

$$\sup_{h(rt)\in T(\delta(r))} F\big(h(rt)\big)=\delta(r)\sup_{h(t)\in T} F\big(h(t)\big). \tag{4.1}$$

Доказательство. Запишем очевидное равенство

$$\sup_{h(t)\in T} F\big(h(t)\big)=\sup_{\delta h(t)\in T} F\big(\delta h(t)\big). \tag{4.2}$$

Очевидно также, что если $h(t)\in T(\delta)$, то

$$\frac{1}{\delta}h(t)\in T.$$

Отсюда, учитывая (4.2), получаем, что

$$\sup_{h(t)\in T(\delta)} F\big(h(t)\big)=\sup_{\frac{1}{\delta}h(t)\in T} F\big(h(t)\big)=\sup_{\delta\frac{1}{\delta}h(t)\in T} F\big(\delta h(t)\big)=$$

$$=\sup_{h(t)\in T} F\big(\delta h(t)\big)=\delta\sup_{h(t)\in T} F\big(h(t)\big). \tag{4.1'}$$

Функция $h_r(t)=h(rt)$ определена при $0<t<\infty$, по свойству класса T_0 выполняется соотношение $h_r(t)\in T_0$. Следовательно, по условию леммы 1 $h_r(t)\in T\left(\delta(r)\right)$, и из (4.1′) вытекает (4.1).

Будем теперь находить $\sup\limits_{\nu(t)\in R} F\left(\nu(t)\right)$ (см. (1.4)). Через $\nu_{эк}(t)$ обозначим функцию (если она существует) из класса R, для которой выполняется равенство

$$\sup_{\nu(t)\in R} F\left(\nu(t)\right)=F\left(\nu_{эк}(t)\right).$$

Далее, $x=\ln t$, $t_i=t_i(\varphi)$ – нуль ядра $L(t,\ \varphi)$, $0<t_i<\infty$, $x_i=x_i\ \varphi=\ln t_i(\varphi)$, $i=1,\ 2,\ 3$, $A\nu_{эк}(t)=H_{эк}(\ln t)$.

Рассмотрим следующие случаи:

1. $\varphi\in\Phi_{00}(-)\cup\Phi_{02}(-)$.

Так как $K(t,\ \varphi)<0$, $0<t<\infty$, то, очевидно, $\nu_{эк}(t)\equiv 0$ и

$$\sup_{\nu(t)\in R} F\left(\nu(t)\right)=0.$$

2. $\varphi\in\Phi_{00}(+)$.

В этом случае $L(t,\ \varphi)>0$, $0<t<\infty$. Ясно, что $H_{эк}(\ln t)=A\,\nu_{эк}(t)=t^{\rho}$ и

$$\sup_{\nu(t)\in R} F\left(\nu(t)\right)=\int\limits_0^{\infty} t^{\rho} L(t,\ \varphi)\,dt.$$

3. $\varphi\in\Phi_{11}(+)$.

По определению множества $\Phi_{11}(+)$ имеем $L(e^x,\ \varphi)>0$ при $x<x_1=\ln t_1$, $L(e^x,\ \varphi)<0$ при $x>x_1$. Отсюда и из соотношений (3.8) и (3.9) получаем, что

$$F\left(\nu(t)\right)=F_1\left(H(x)\right)\leqslant F_1\left(B_1 H(x)\right)=F\left(A^{-1} H_1(\ln t)\right).$$

Из последнего неравенства и соотношения (3.25) следует, что

$$\sup_{\nu(t)\in R} F\left(\nu(t)\right)=\sup_{\nu(t)\in R_1} F\left(\nu(t)\right). \tag{4.3}$$

Заметим, что если производная от $H(x)$ в точке x существует, то

$$A^{-1} H(x)=\frac{d H(x)}{d x}.$$

Теперь из (3.5) находим:

$$A^{-1} H_1(\ln t)=\begin{cases} \rho\, t^{\rho} & \text{для } t\in(0,\ \xi_1],\\ \rho\,\xi_1^{\rho} & \text{для } t\in[\xi_1,\ +\infty). \end{cases}$$

Отсюда, учитывая соотношения (3.7) и (4.3), получаем:

$$\sup_{\nu(t)\in R} F\left(\nu(t)\right)=\max_{0\leqslant\xi_1\leqslant t_1}\rho\left(\int\limits_0^{\xi_1} t^{\rho} K(t)\,dt+\xi_1^{\rho}\int\limits_{\xi_1}^{\infty} K(t)\,dt\right)=\rho\max_{0\leqslant\xi_1\leqslant t_1} Y_1(\xi_1).$$

Учитывая определение $K(t)$, находим:

$$\frac{d}{d\xi_1} Y_1(\xi_1)=Y_1'(\xi_1)=\xi_1^{\rho} K(\xi_1)+\rho\,\xi_1^{\rho-1}\int\limits_{\xi_1}^{\infty} K\,dt-\xi_1^{\rho} K(\xi_1)=\rho\ln\left|E\left(\frac{e^{i\varphi}}{\xi_1}\right)\right|.$$

Из 2_3), учитывая неравенства (2.2), заключаем, что

$$Y_1'(\xi_1)=\ln\left|E\left(\frac{e^{i\varphi}}{\xi_1}\right)\right|\to+\infty,\ \text{когда}\ \xi_1\to 0,$$

$$Y_1'(t_1)=\ln\left|E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t_1}\right)\right|<0,$$

и точку максимума функции $Y_1(\xi_1)$ на промежутке $[0,\ t_1]$ можем найти из необходимого условия

$$Y_1'(\xi_1)=\ln\left|E\left(\frac{e^{i\varphi}}{\xi_1}\right)\right|=0.$$

Из 2_3) следует, что корень последнего уравнения единственный и равен $e_0(\varphi)$. Следовательно,

$$\sup_{\nu(t)\in R}F\bigl(\nu(t)\bigr)=\rho\Bigl(\int\limits_0^{e_0(\varphi)}t^\rho K(t)\,dt+e_0^\rho(\varphi)\int\limits_{e_0(\varphi)}^{\infty}K(t)\,dt\Bigr)=\rho\int\limits_0^{e_0(\varphi)}t^\rho K(t)\,dt, \tag{4.4}$$

причем, $e_0(\varphi)>0$.

Заметим, что так как $e_0(\varphi)<c(\varphi)<t_1(\varphi)$, то $e_0(\varphi)\to 0$ при $t_1(\varphi)\to 0$.

4. $\varphi\in\Phi_1(-)=\Phi_{11}(-)\cup\Phi_{13}(-)$.

Пусть

$$\nu_c(t)=\begin{cases}0 & \text{для}\ 0<t<c(\varphi),\\ \nu(t) & \text{для}\ c(\varphi)\leqslant t<\infty.\end{cases}$$

По определению $\Phi_1(-)$ (см. 2_4) имеем:

$$F\bigl(\nu(t)\bigr)\leqslant F\bigl(\nu_c(t)\bigr). \tag{4.5}$$

Пусть $\varphi\in\Phi_{1j}(-)$. Очевидно для $t<c(\varphi)$ выполняется $H_c(\ln t)=A\,\nu_c(t)=0$ и

$$B_2^j H_c(\ln t)=B_2(x_j)H_c(\ln t)=0\ \text{при}\ t<c(\varphi). \tag{4.5$'$}$$

Из (2.3) следует, что $L(t,\ \varphi)<0$ для $c(\varphi)<t<t_j$ и $L(t,\ \varphi)>0$ для $t_j<t<+\infty$, $j=1,\ 3$. Отсюда и из соотношений (4.5), (3.13) и (3.14) получаем:

$$F\bigl(\nu(t)\bigr)\leqslant F\bigl(\nu_c(t)\bigr)=F_1\bigl(H_c(\ln t)\bigr)\leqslant F_1\bigl(B_2^j H_c(\ln t)\bigr)=F\bigl(A^{-1}B_2^j A\,\nu_c(t)\bigr). \tag{4.6}$$

Из (3.11) находим:

$$A^{-1}B_2^j A\,\nu_c(t)=\begin{cases}0 & \text{для}\ t\in(0,\ e^{-\frac{1}{\rho}}\xi_j),\\ \rho\,\xi_j^\rho & \text{для}\ t\in[e^{-\frac{1}{\rho}}\xi_j,\ \xi_j),\\ \rho\, t^\rho & \text{для}\ t\in[\xi_j,\ +\infty).\end{cases}$$

При этом из (3.12) и (4.5$'$) вытекает, что

$$\ln c(\varphi)+\frac{1}{\rho}\leqslant s_j\leqslant\ln t_j+\frac{1}{\rho},\quad e^{\frac{1}{\rho}}c(\varphi)\leqslant\xi_j\leqslant e^{\frac{1}{\rho}}t_j. \tag{4.7}$$

Обозначим сегмент $[e^{\frac{1}{\rho}}c(\varphi),\ e^{\frac{1}{\rho}}t_j]$ через D_j. Далее, в случае, когда $\varphi\in\Phi_{1j}(-)$, в обозначениях s_j, ξ_j, D_j мы будем опускать индекс j. В силу (3.25), (4.6) и (4.7) имеем:

$$\sup_{\nu(t)\in R} F\Bigl(\nu(t)\Bigr)=\sup_{\nu(t)\in R_1} F\Bigl(\nu(t)\Bigr)=\max_{\xi\in D}\Biggl\{\xi^{\rho}\int\limits_{e^{-\frac{1}{\rho}}\xi}^{\xi} K(t)\,dt+$$

$$+\int\limits_{\xi}^{\infty} t^{\rho} K(t)\,dt=\rho\max_{\xi\in D} Y_2(\xi),$$

и

$$\frac{dY_2}{d\xi}=Y_2'(\xi)=-\xi^{\rho-1}\Biggl\{\rho\ln\left|E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right)\right|\Bigg|_{t=e^{-\frac{1}{\rho}}\xi}^{t=\xi}+e^{-\frac{1}{9}}\xi K(e^{-\frac{1}{\rho}}\xi)\Biggr\}.$$

При обозначениях $\ln t=x$, $\ln\left|E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right)\right|=\psi\,(x)$ имеем:

$$-e^{x}K(e^{x})=\psi'(x), \tag{4.9}$$

$$e^{x}L(e^{x})=\psi''(x). \tag{4.10}$$

Рассмотрим уравнение

$$Y_2'(\xi)=0, \tag{4.11}$$

или

$$\rho\left(\psi(s)-\psi\left(s-\frac{1}{\rho}\right)\right)-\psi'\left(s-\frac{1}{\rho}\right)=0.$$

Полагая $s-\frac{1}{\rho}=\omega$ и учитывая соотношение (4.7), имеем

$$\ln c(\varphi)\leqslant\omega\leqslant\ln t_j=x_j.$$

Тогда уравнение (4.11) принимает вид

$$\psi\,(\omega)=\psi\left(\omega+\frac{1}{\rho}\right)-\frac{1}{\rho}\,\psi'(\omega)-\psi\,(\omega)=0. \tag{4.11''}$$

Корень $\bar{\omega}$ уравнения (4.11) имеет следующий простой геометрический смысл: касательная к кривой $\psi\,(x)$ в точке $\bar{M}\,\bigl(\bar{\omega},\ \psi\,(\bar{\omega})\bigr)$ является хордой с концами в точках M и $M\left(\bar{\omega}+\frac{1}{\rho},\ \psi\left(\bar{\omega}+\frac{1}{\rho}\right)\right)$.

Обращаясь к 2_4) и $2_4'$) видим, что: а) $\psi'(x)<0$, б) $\Psi(x)>0$ для $x>\ln c(\varphi)$, в) $\psi(x)\to 0$, когда $x\to+\infty$, монотонно для $x\in\bigl(\ln c(\varphi),\ +\infty\bigr)$, г) функция $\psi\,(x)$ выпукла вверх на промежутке $[\ln c(\varphi),\ x_j]$ и $\psi'(x)$ убывает монотонно для этих x; $\psi(x)$ выпукла вниз на промежутке $[x_j,\ +\infty)$ и $\psi'(x)\to 0$, когда $x\to+\infty$, монотонно на указанном промежутке. Отсюда, в частности, следует, что

$$Y_2'\left(e^{\frac{1}{\rho}}c(\varphi)\right)=-\rho\left(e^{\frac{1}{\rho}}c(\varphi)\right)^{\rho-1}\Psi\bigl(\ln c(\varphi)\bigr)=$$

$$=-\rho\left[c(\varphi)e^{\frac{1}{\rho}}\right]^{\rho-1}\left\{\psi\left(\ln c(\varphi)+\frac{1}{\rho}\right)-\psi\bigl(\ln c(\varphi)\bigr)\right\}>0. \tag{4.12}$$

Так как x_j — точка перегиба функции $\psi(x)$, и $\psi(x)$ выпукла вниз на промежутке $[x_j+\infty)$, то угловой коэффициент хорды с концами в точках x_j и $x_j+\frac{1}{\rho}$ больше $\Psi'(x_j)$, т. е.

$$\frac{\psi\left(x_j+\frac{1}{\rho}\right)-\psi\,(x_j)}{\frac{1}{\rho}}-\psi'(x_j)=\rho\,\Psi\,(x_j)>0.$$

Следовательно,

$$Y_2'(e^{\frac{1}{\rho}}\,t_j)<0. \tag{4.13}$$

Учитывая (4.12) и (4.13), приходим к выводу, что точку максимума функции $Y_2(\xi)$ можем находить, записав необходимое условие максимума, т. е. решив уравнение (4.11).

Уравнение касательной к кривой $\psi(x)$ в точке $x=\omega$ имеет вид

$$y=\psi'(\omega)(x-\omega)+\psi(\omega). \tag{4.14}$$

Так как функция $\psi(x)$ выпукла вверх на промежутке $[\ln c(\varphi),\ x_j]$, то

$$\psi'(\omega)(x_j-\omega)+\psi(\omega)\geqslant\psi(x_j),$$

Учитывая соотношения: $\psi'(\omega)<0$ при $\omega\in(\ln c(\varphi), x_j]$, $\psi(x)]>0$ при $x>x_j$, заключаем отсюда в силу строгой выпуклости вниз функции $\psi(x)$ на промежутке $[x_j+\infty)$, что существует единственная точка пересечения прямой $\psi'(\omega)(x-\omega)+\psi(\omega)$ с кривой $\psi(x)$ для $x\geqslant x_j$, $\omega\in\left(\ln c(\varphi),\ x_j\right]$. Эту точку мы обозначим через $\Theta=\Theta(\omega)$. Пусть $\ln c(\varphi)<\omega_1<\omega_2\leqslant x_j$. Тогда в силу выпуклости функции $\psi(x)$ вверх на промежутке $[\ln c(\varphi),\ x_j]$, получаем, что корень уравнения по x

$$\psi'(\omega_1)(x-\omega_1)+\psi(\omega_1)=\psi'(\omega_2)(x-\omega_2)+\psi(\omega_2),$$

который мы обозначим через ω^*, лежит в промежутке $(\omega_1,\ \omega_2)$. Функция

$$\psi^*(x)=\begin{cases}\psi'(\omega_2)\,(x-\omega_2)+\psi\,(\omega_2) & \text{при } x\leqslant\Theta\,(\omega_2),\\ \psi(x) & \text{при } x>\Theta\,(\omega_2)\end{cases} \tag{4.15}$$

выпукла вниз и $\psi^*(x)>0$ для всех x. Рассмотрим уравнение

$$\psi^*(x)=\psi'(\omega_1)(x-\omega_1)+\psi(\omega_1). \tag{4.16}$$

Так как $\psi'(\omega_2)<\psi'(\omega_1)$, то в силу выпуклости вниз и положительности функции $\psi^*(x)$ это уравнение имеет два корня. Один из них равен, очевидно, ω^*, второй находится из уравнения (см. (4.15))

$$\psi(x)=\psi'(\omega_1)(x-\omega_1)+\psi(\omega_1),\quad x>\Theta(\omega_2).$$

Отсюда заключаем, что второй корень уравнения (4.16) равен $\Theta(\omega_1)$ (см. определение $\Theta(\omega)$) и $\Theta(\omega_1)>\Theta(\omega_2)$. Таким образом, мы показали, что $\Theta(\omega)$, $\omega\in[\ln c(\varphi),\ x_j]$, — строго монотонно убывающая функция. Рассмотрим разность $\overline{\Theta}(\omega)=\Theta(\omega)-\omega$, которая также является строго монотонно убывающей функцией при $\omega\in(\ln c(\varphi),\ x_j]$. Из определения $\Theta(\omega)$ следует, что

$$\lim_{\omega\to\ln c(\varphi)+}\Theta(\omega)=+\infty,$$

так как $\psi'\left(\ln c(\varphi)\right)=0$, а также $\overline{\Theta}(x_j)=0$, т. е. функция $\overline{\Theta}(\omega)$ строго монотонно убывает от $+\infty$ до 0, когда ω меняется от $\ln c(\varphi)$ до x_j. Следовательно, существует обратная функция $\overline{\Theta}^{-1}(y)$, которая строго монотонно убывает, когда y меняется от 0 до $+\infty$. Значение этой функции в точке $\frac{1}{\rho}$, т. е. $\overline{\omega}=\overline{\Theta}^{-1}\left(\frac{1}{\rho}\right)$ – искомый корень уравнения (4.11″). Тем самым доказана единственность корня ξ^* также для уравнения (4.11), причем,

$$0<\max\left(t_j e^{-\frac{1}{\rho}},\ c(\varphi)\right)<\xi^*<t_j. \tag{4.16}$$

5. $\varphi\in\Phi_{02}(+)$.

Учитывая определение $\Phi_{02}(+)$ (см. $2_1'$), а также (3.17), (3.18) и (3.25), получаем

$$F\left(\nu(t)\right)=F_1\left(H(x)\right)\leqslant F_1\left(B_3H(x)\right)=F\left(A^{-1}H_3(\ln t)\right) \tag{4.17}$$

и

$$\sup_{\nu(t)\in R} F\left(\nu(t)\right)=\sup_{\nu(t)\in R_3} F\left(\nu(t)\right). \tag{4.17'}$$

Из (3.15) находим:

$$A^{-1}H_3(\ln t)=\begin{cases}\rho t^\rho & \text{для } t\in[0,\ \xi_1),\\ \rho\xi_1^\rho & \text{для } t\in[\xi_1,\ \xi_0),\\ \rho\xi_2^\rho & \text{для } t\in[\xi_0,\ \xi_2),\\ \rho t^\rho & \text{для } t\in[\xi_2,\ +\infty),\end{cases}$$

где $\xi_i=\exp s_i$ и s_i, $i=0,\ 1,\ 2$, взяты нами из равенств (3.16), (3.6) и (3.6′) соответственно. Отсюда, учитывая (4.17′), (3.7) и (3.12), получаем:

$$\sup_{\nu(t)\in R} F\left(\nu(t)\right)=\max_{t_1\leqslant\xi_0\leqslant t_0}\rho\left\{\int_0^{\xi_1} t^\rho K(t)\,dt+\xi_1^\rho\int_{\xi_1}^{\xi_0} K\,dt+\right.$$

$$\left.+\xi_2^\rho\int_{\xi_0}^{\xi_2} K\,dt+\int_{\xi_2}^{\infty} t^\rho K\,dt\right\}=\rho\max_{t_1\leqslant\xi_0\leqslant t_0} Y_3(\xi_1,\ \xi_2). \tag{4.18}$$

Далее,

$$\frac{\partial\xi_0}{\partial\xi_1}=\frac{\partial}{\partial\xi_1}\exp\left\{\frac{\xi_2(1-\ln\xi_2^\rho)-\xi_1^\rho(1-\ln\xi_1^\rho)}{\rho(\xi_1^\rho-\xi_2^\rho)}\right\}=$$

$$=\xi_0^\rho\frac{1}{\rho}\left\{\frac{[-\rho\xi_1^{\rho-1}(1-\ln\xi_1^\rho)+\rho\xi_1^{\rho-1}](\xi_1^\rho-\xi_2^\rho)}{(\xi_1^\rho-\xi_2^\rho)^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\rho\xi_1^\rho[\xi_2^\rho(1-\ln\xi_2^\rho)-\xi_1^\rho(1-\ln\xi_1^\rho)]}{(\xi_1^\rho-\xi_2^\rho)^2}\right\}=$$

$$=\rho\xi_0^\rho\frac{\xi_1^{\rho-1}}{\xi_1^\rho-\xi_2^\rho}(\ln\xi_1-\ln\xi_0). \tag{4.19}$$

Аналогично,

$$\frac{\partial\xi_0}{\partial\xi_2}=\rho\xi_0\frac{\xi_2^{\rho-1}}{\xi_1^\rho-\xi_2^\rho}(\ln\xi_0-\ln\xi_2). \tag{4.20}$$

Поэтому

$$\frac{\partial Y_3}{\partial \xi_1} = \xi_1^\rho K(\xi_1) + \xi_1^\rho \left[K(\xi_0) \frac{\partial \xi_0}{\partial \xi_1} - K(\xi_1) \right] -$$

$$- \xi_2^\rho K(\xi_0) \frac{\partial \xi_0}{\partial \xi_1} + \rho \xi_1^{\rho-1} \int_{\xi_1}^{\xi_0} K\, dt =$$

$$= K(\xi_0) \frac{\partial \xi_0}{\partial \xi_1} (\xi_1^\rho - \xi_2^\rho) - \rho \xi_1^{\rho-1} \ln \left| E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right) \right| \Bigg|_{t=\xi_1}^{t=\xi_0} =$$

$$= \rho \xi_1^{\rho-1} \left\{ \xi_0 K(\xi_0) (\ln \xi_1 - \ln \xi_0) - \ln \left| E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right) \right| \Bigg|_{t=\xi_1}^{t=\xi_0} \right\},$$

аналогично,

$$\frac{\partial Y_3}{\partial \xi_2} = \rho \xi_2^{\rho-1} \left\{ \xi_0 K(\xi_0) (\ln \xi_0 - \ln \xi_2) - \ln \left| E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right) \right| \Bigg|_{t=\xi_0}^{t=\xi_2} \right\}.$$

Запишем систему уравнений

$$\frac{\partial Y_3}{\partial \xi_1} = 0, \quad \frac{\partial Y_3}{\partial \xi_2} = 0, \tag{4.21}$$

или, учитывая (4.9) и (4.10):

$$\frac{\psi(s_2) - \psi(s_0)}{s_2 - s_0} = \psi'(s_0), \quad \frac{\psi(s_0) - \psi(s_1)}{s_0 - s_1} = \psi'(s_0). \tag{4.22}$$

Рассмотрим функцию $Y_3(\xi_1, \xi_2)$, определенную формулой (4.18) в области $0 \leqslant \xi_1 < \xi_2$ и будем находить корни системы уравнений (4.22) в области $s_1 < s_2$. Решение (s_1, s_2) системы уравнений (4.22) будет иметь следующий геометрический смысл: касательная к кривой $\psi(x)$ в точке $x = s_0(s_1, s_2)$, которая определяется по (3.16), является хордой с концами в точках $x = s_1$ и $x = s_2$.

Используя 2_1) и $2_1'$), заметим, что функция $\psi(x)$ монотонно убывает от $+\infty$ до $-\infty$, когда x меняется от $-\infty$ до $+\infty$, выпукла вниз на промежутке $(-\infty, x_1]$, $[x_2, +\infty)$ и выпукла вверх на промежутке $[x_1, x_2]$, при этом ни на каком промежутке не равна тождественно линейной функции, $\psi'(x) < 0$ для всех x.

В силу сделанных замечаний, легко видеть, что касательная к кривой $\psi(x)$ может являться хордой и иметь три общих точки с кривой $\psi(x)$, две из которых лежат по разные стороны от точки касания, если ее точка касания $x = \omega$ принадлежит промежутку $[x_1, x_2]$, т. е. уравнение по x

$$\psi(x) = \psi'(\omega)(x - \omega) + \psi(\omega), \quad \omega \in [x_1, x_2] \tag{4.22'}$$

имеет два решения $\Theta_1 = \Omega_1(\omega)$, $\Theta_2 = \Omega_2(\omega)$, причем $\Theta_1^* \leqslant \Theta_1 \leqslant x_1$ и $\Theta_2^* \geqslant \Theta_2 \geqslant x_2$, где $\Theta_1^* = \Omega_1(x_2)$, $\Theta_2^* = \Omega_2(x_1)$. Как в п. 4, легко показать, что $\Omega_1(\omega)$ и $\Omega_2(\omega)$ — непрерывные строго монотонно убывающие функции на промежутке $[x_1, x_2]$. Тогда функции $\Omega_1^{-1}(\Theta_1)$, $\Theta_1^* \leqslant \Theta_1 \leqslant x_1$, и $\Omega_2^{-1}(\Theta_2)$, $x_2 \leqslant \Theta_2 \leqslant \Theta_2^*$, также строго монотонно убывают. Легко видеть, что функция $\Theta_2 = \Omega_2\left((\Omega_1^{-1}(\Theta_1)\right) = \Theta(\Theta_1)$, $\Theta_1^* \leqslant \Theta_1 \leqslant x_1$ строго монотонно возрастает. Полагая $\omega = \omega(\Theta_1, \Theta_2)$, где $\Theta_1 = \Omega_1(\omega)$ и $\Theta_2 = \Omega_2(\omega)$ удовлетворяют соотношению (4.22'), получим, что функция $\Omega(\Theta_1) = \omega\left(\Theta_1, \Theta(\Theta_1)\right)$ строго монотонно убывает для $\Theta_1^* \leqslant \Theta_1 \leqslant x_1$.

Рассмотрим функцию $s_0(s_1, s_2)$, определенную формулой (3.16) для $s_1<s_2$. Имеем:

$$s_0\left(\Theta_1^*, \Theta(\Theta_1^*)\right)=s_0(\Theta_1^*, x_2)<x_2=\omega\left(\Theta_1^*, \Theta(\Theta_1^*)\right), \tag{4.23}$$

$$s_0\left(x_1, \Theta(x_1)\right)>x_1=\omega\left(x_1, \Theta(x_1)\right). \tag{4.24}$$

Легко видеть, что $s_0\left(\Theta_1, \Theta(\Theta_1)\right)$ – монотонно возрастающая функция переменного $\Theta_1\in[\Theta_1^*, x_1]$.

Учитывая (4.23) и (4.24), а также тот факт, что функция $\omega\left(\Theta_1, \Theta(\Theta_1)\right)$ строго монотонно убывает на промежутке $[\Theta_1^*, x_1]$, находим, что значение s_1^*, удовлетворяющее соотношению

$$s_0\left(s_1^*, \Theta(s_1^*)\right)=\omega\left(s_1^*, \Theta(s_1^*)\right), \quad s_1^*\in[\Theta_1^*, x_1],$$

единственно. Обозначим $s_2^*=\Theta(s_1^*)$. Подставив значение $\omega(s_1^*, s_2^*)=$ $=s_0(s_1^*, s_2^*)$ в уравнение (4.22′), получим (4.22), где $s_1=s_1^*$, $s_2=s_2^*$. Тем самым показано, что соотношение (4.22) удовлетворяется для единственной пары значений (s_1^*, s_2^*), т. е. решение системы (4.21) существует и единственно при $0\leqslant\xi_1\leqslant\xi_2$.

Так как при $p>0$ справедливо $\ln E(u, p)=\ln(1-u)+u+\frac{u^2}{2}+\ldots+$ $+\frac{u^p}{p}$, то для $\xi_1\to0$ при $\cos p\varphi>0$ имеет место

$$\ln\left|E\left(\frac{e^{i\varphi}}{\xi_1}\right)\right|\geqslant\frac{1}{p}\,\frac{\cos p\varphi}{\xi_1^p}+o(\xi_1^{-p}).$$

Если же $\cos p\varphi=0$, то из неравенства $\cos(p+1)\varphi<0$ (см. 2_1)) следует, что $\cos(p-1)\varphi>0$, и при $p>1$ для $\xi_1\to0$ имеет место

$$\ln\left|E\left(\frac{e^{i\varphi}}{\xi_1}\right)\right|\geqslant\frac{1}{p-1}\,\frac{\cos(p-1)\varphi}{\xi_1^{p-1}}+o(\xi_1^{1-p}).$$

Отсюда заключаем, что при $\cos p\varphi>0$ выполняется $\xi_1^{1-p}\frac{\partial Y_3}{\partial\xi_1}\to+\infty$, когда $\xi_1\to0$ и $\frac{\partial Y_3}{\partial\xi_1}>0$ в достаточно малой окрестности точки $\xi_1=0$. Если $\cos p\varphi=0$ и $p=1$, то при $\xi_1\to0$

$$\ln\left|E\left(\frac{e^{i\varphi}}{\xi_1}, 1\right)\right|=\ln\left|1-\frac{e^{i\varphi}}{\xi_1}\right|=-\ln\xi_1+o(\ln\xi_1).$$

Но так как $\cos2\varphi>0$ и $t_1\leqslant\xi_0\leqslant t_2$, то

$$\left\{\xi_0K(\xi_0)-1\right\}\ln\xi_1=\left\{\cos2\varphi\frac{\xi_0^2}{1+\xi_0^2}-1\right\}\ln\xi_1\geqslant\frac{-\ln\zeta_1}{1+\xi_0^2}.$$

Следовательно, в этом случае

$$\frac{\partial Y_3}{\partial\xi_1}=\frac{-\ln\xi_1}{1+\xi_0^2}+o(\ln\xi_1)\to+\infty \text{ при } \xi_1\to0.$$

Таким образом, точка максимума (ξ_1^*, ξ_2^*) функции $Y_3(\xi_1, \xi_2)$ должна совпадать с найденной нами стационарной точкой этой функции, которая единственна, причем

$$0<\xi_1^*<t_1,\ t_2<\xi_2^*<e^{\frac{1}{2}}t_2. \tag{4.21′}$$

Заметим, что $s_1^* = \ln \xi_1^*$ и $s_2^* = \ln \xi_2^*$ зависят от φ, т. е. $s_1^* = s_1^*(\varphi)$ и $s_2^* = s_2^*(\varphi)$.

Легко видеть, что если последовательность точек $\varphi_k \in \Phi_{02}(+)$ такова, что $x_2(\varphi_k) - x_1(\varphi_k) \to 0$ при $k \to \infty$, то $\Omega_2\left(x_1(\varphi_k)\right) - \Omega_1\left(x_2(\varphi_k)\right) \to 0$ при $k \to \infty$. Отсюда находим, что и $s_2^*(\varphi_k) - s_1^*(\varphi_k) \to 0$ при $x_2(\varphi_k) - x_1(\varphi_k) \to 0$.

6. $\varphi \in \Phi_{13}(+)$.

Учитывая определение $\Phi_{13}(+)$ (см. $2_3'$)), а также (3.22) и (3.23), имеем:

$$F\left(\nu(t)\right) = F_1\left(H(\ln t)\right) \leqslant F_1\left(B_4 H(x)\right) = F\left(A^{-1} H_4(\ln t)\right), \tag{4.25}$$

и

$$\sup_{\nu(t) \in R} F\left(\nu(t)\right) = \sup_{\nu(t) \in R_4} F\left(\nu(t)\right). \tag{4.26}$$

Из (3.20) и (3.21) находим (в зависимости от того имеет ли корни уравнение (3.19) или нет) соответственно:

$$A^{-1} H_4(\ln t) = \begin{cases} \rho t^\rho & \text{при } t \in (0,\ \xi_1), \\ \rho \xi_1^\rho & \text{при } t \in [\xi_1,\ e^\lambda), \\ \rho \beta^\rho & \text{при } t \in [e^\lambda,\ +\infty), \end{cases} \tag{4.27}$$

где

$$\rho \beta^\rho = \frac{H(x_3) - H(x_2)}{x_3 - x_2},$$

и

$$A^{-1} H_4(\ln t) = \begin{cases} \rho t^\rho & \text{при } t \in (0,\ \xi_1), \\ \rho \xi_1^\rho & \text{при } t \in [\xi_1,\ \xi_0), \\ \rho \xi_2^\rho & \text{при } t \in [\xi_0,\ \xi_2), \\ \rho t^\rho & \text{при } t \in [\xi_2,\ \xi_3), \\ \rho \xi_3^\rho & \text{при } t \in [\xi_3,\ +\infty). \end{cases} \tag{4.28}$$

Так как

$$\ln\left|E\left(\frac{e^{i\varphi}}{e_0(\varphi)}\right)\right| = 0,$$

и

$$F\left(\nu(t)\right) = \int_0^{e_0(\varphi)} \ln\left|E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right)\right| d\nu(t) + \int_{e_0(\varphi)}^{\infty} \ln\left|E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right)\right| d\nu(t),$$

то полагая

$$\nu_e(t) = \begin{cases} \nu(t) & \text{при } 0 \leqslant t < e_0(\varphi), \\ c_\nu & \text{при } t \geqslant e_0(\varphi), \end{cases} \tag{4.29}$$

где c_ν — некоторая постоянная, такая, что $\nu_e(t) \in R$, и учитывая неравенство $\ln\left|E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right)\right| < 0$ при $t > e_0(\varphi)$ получим в силу определения интеграла Стилтьеса

$$\int_{e_0(\varphi)}^{\infty} \ln\left|E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right)\right| d\nu(t) \leqslant \int_{e_0(\varphi)}^{\infty} \ln\left|E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right)\right| dc_\nu = 0,$$

а также

$$F\left(\nu(t)\right) \leqslant F\left(\nu_e(t)\right). \tag{4.29'}$$

Через R_4^e обозначим класс функций $\nu(t)\in R_4$ вида (4.29), где выбор c_ν будет уточнен ниже.

Из (4.26) и (4.29′) заключаем, что

$$\sup_{\nu(t)\in R} F\left(\nu(t)\right)=\sup_{\nu(t)\in R_4^e} F\left(\nu(t)\right). \tag{4.30}$$

Пусть $\nu(t)\in R_4$. Выберем c_ν следующим образом.

Если $e_0(\varphi)\leqslant t_1$, то положим $c_\nu=\nu\left(e_0(\varphi)\right)$. Тогда из соотношений (4.27) и (4.28) получаем:

$$\nu_e(t)=\begin{cases}\rho t^\rho \text{ для } t\in(0,\ \xi_e),\\ \rho\xi_e^\rho \text{ для } t\in[\xi_e,\ \infty),\end{cases}$$

где

$$\xi_e=\min\left(\xi_1,\ e_0(\varphi)\right),\ 0\leqslant\xi_e<t_1.$$

Таким образом, $\sup\limits_{\nu(t)\in R_4^e} F\left(\nu(t)\right)$ в случае, когда $e_0(\varphi)\leqslant t_1$, будем находить так же, как в п. 3. Далее будем предполагать, что $e_0(\varphi)>t_1$, т. е. что $\varphi\in\Phi_{13}^0(+)$ (см. определение $\Phi_{13}^0(+)$ в конце § 2).

Если $t_1<e_0(\varphi)\leqslant e^\lambda$ при λ, удовлетворяющем соотношению (3.20′), или $t^\tau<e_0(\varphi)\leqslant\xi_0$, то положим $c_\nu=\rho\eta^\rho$, где η находится из уравнения

$$e_0(\varphi)=\xi_0(\xi_1,\ \eta). \tag{4.31}$$

Тогда из (3.27) и (3.28) находим:

$$\nu_e(t)=\begin{cases}\rho t^\rho \text{ при } 0\leqslant t\leqslant\xi_1,\\ \rho\xi_1^\rho \text{ при } \xi_1\leqslant t<\xi_0(\xi_1,\ \eta),\\ \rho\eta^\rho \text{ при } \xi_0(\xi_1,\ \eta)\leqslant t<\infty.\end{cases} \tag{4.32}$$

Если функция $\nu(t)\in R_4$ имеет вид (4.28) и $e_0(\varphi)>\xi_0$, то положив

$$\xi_3=\xi_3(\xi_2)=\begin{cases}e_0(\varphi) \text{ при } \xi_2\leqslant e_0(\varphi),\\ \xi_2 \text{ при } \xi_2>e_0(\varphi),\end{cases} \tag{4.33}$$

мы тем самым определим c_ν и будем иметь соотношение (4.29). Если функция $\nu(t)\in R_4$ имеет вид (4.27) и $e_0(\varphi)>e^\lambda$, то положим $c_\nu=\rho\beta^\rho$, т. е. $\nu_e(t)=$ $=\nu(t)$.

Пусть $H_4^e(x)=B_4A\nu_e(t)$. Класс функций $H_4^e(x)$ обозначим через S_4^e. Определим теперь на S_4^e оператор $B_6=B_6\left(\lambda,\ e_0(\varphi)\right)$. Пусть функция $\nu_e(t)\in R_4^e$ имеет вид (4.27), где $e^\lambda<e_0(\varphi)$ (во всех остальных случаях B_6 – единичный оператор), и пусть ζ удовлетворяет уравнению

$$\lambda=s_0(s_1,\ \zeta), \tag{4.34}$$

где s_1 удовлетворяет уравнению (3.6), а $s_0(s_1,\ s_2)$ – функция, определенная формулой (3.16).

Учитывая (3.20) и определение λ, перепишем уравнение (4.34) для определения ζ в виде соотношения

$$H_4^e(\lambda)=y(x_2,\ x_3;\ \lambda)=l(s_1,\ \lambda)=l(\zeta;\ \lambda),\ \zeta>\lambda.$$

Отсюда из простых геометрических соображений следует, что

$$\rho e^{\rho\zeta} \geqslant \frac{H_4^e(x_3) - H_4^e(x_2)}{x_3 - x_2} = \rho \beta^\rho \geqslant \rho e^{\rho s_1}. \tag{4.35}$$

При $e^\zeta \leqslant e_0(\varphi)$ положим

$$B_6 H_4^e(x) = H_6(x) = \begin{cases} H_4^e(x) & \text{для } x \leqslant \lambda, \\ l(\zeta;\ x) & \text{для } x > \lambda. \end{cases} \tag{4.36}$$

При $e^\zeta > e_0(\varphi)$ положим

$$B_6 H_4^e(x) = H_6(x) = \begin{cases} H_4^e(x) & \text{для } x \leqslant \lambda, \\ l(\zeta;\ x) & \text{для } \lambda \leqslant x \leqslant \zeta, \\ e^{\rho x} & \text{для } \zeta < x \leqslant \ln e_0(\varphi), \\ l(\ln e_0(\varphi);\ x) & \text{для } x \geqslant \ln e_0(\varphi). \end{cases} \tag{4.36'}$$

Покажем, что

$$F\left(A^{-1} H_4^e(\ln t)\right) \leqslant F\left(A^{-1} H_6(\ln t)\right).$$

Действительно, если имеет место соотношение (4.36), то

$$A^{-1} H_6(\ln t) = \begin{cases} \rho t^\rho & \text{для } 0 < t \leqslant \xi_1, \\ \rho \xi_1^\rho & \text{для } \xi_1 < t < e^\lambda, \\ \rho e^{\rho\zeta} & \text{для } e^\lambda < t \end{cases}$$

и из (4.27) и (4.35) находим, что

$$F\left(A^{-1} B_6 H_4^e(\ln t)\right) - F\left(A^{-1} H_4^e(\ln t)\right) =$$

$$= \rho(e^{\rho\zeta} - \beta^\rho) \int_{e^\lambda}^{e_0(\varphi)} K(t)\,dt + \rho(e^{\rho\zeta} - \beta^\rho) \int_{e_0(\varphi)}^{\infty} K(t)\,dt =$$

$$= \rho(e^{\rho\zeta} - \beta^\rho) \int_{e^\lambda}^{e_0(\varphi)} K(t)\,dt \geqslant 0.$$

Если же имеет место соотношение (4.36′), то

$$A^{-1} H_6(\ln t) = \begin{cases} \rho t^\rho & \text{при } 0 < t < \xi_1 \\ \rho \xi_1^\rho & \text{при } \xi_1 \leqslant t < e^\lambda, \\ \rho e^{\rho\zeta} & \text{при } e^\lambda \leqslant t < e^\zeta, \\ \rho t^\rho & \text{при } e^\zeta \leqslant t < e_0(\varphi), \\ \rho e_0(\varphi) & \text{при } e_0(\varphi) \leqslant t < \infty, \end{cases} \tag{4.37'}$$

и аналогично получаем, что

$$F\left(A^{-1} B_6(\ln t)\right) - F\left(A^{-1} H_4^e(\ln t)\right) = \rho(e^{\rho\zeta} - \beta^\rho) \int_{e^\lambda}^{e^\zeta} K(t)\,dt +$$

$$+ \rho \int_{e^\zeta}^{e_0(\varphi)} (t^\rho - \beta^\rho) K(t)\,dt + \rho\left(e_0^\rho(\varphi) - \beta^\rho\right) \int_{e_0(\varphi)}^{\infty} K(t)\,dt \geqslant 0,$$

так как $K(t, \varphi)>0$ при $t<e_0(\varphi)$, а последний интеграл равен нулю. Таким образом, обозначая класс функций $\{A^{-1}H_6(\ln t)\}$ через R_6, в силу равенства (4.30) имеем

$$\sup_{\nu(t)\in R} F\left(\nu(t)\right)=\sup_{\nu(t)\in R_6} F\left(\nu(t)\right). \tag{4.38}$$

Если теперь в соотношениях (4.32), (4.37) и (4.37′) обозначить $\eta=\xi_2$ и $e^{\zeta}=\xi_2$, то легко видеть, что в силу соотношений (4.31) и (4.34) всякая функция $\nu(t)\in R_6$ будет иметь вид (4.28), где $\xi_3=\xi_3(\xi_2)$ (см. (4.33)), причем,

$$t_1\leqslant\xi_0(\xi_1,\ \xi_2)\leqslant\min\left(e_0(\varphi),\ t_2\right)=t_e,\quad t_e\leqslant\xi_2. \tag{4.39}$$

Таким образом, в силу равенства (4.38) получаем, что

$$\sup_{\nu(t)\in R} F\left(\nu(t)\right)=\max_{t_1\leqslant\xi_0\leqslant t_e}\rho\left\{\int_0^{\xi_1} t^\rho K(t)\,dt+\xi_1^\rho\int_{\xi_1}^{\xi_0} K(t)\,dt+\right.$$

$$\left.+\xi_2^\rho\int_{\xi_0}^{\xi_2} K(t)\,dt+\int_{\xi_2}^{\xi_3(\xi_2)} t^\rho K(t)\,dt+\xi_3^\rho\int_{\xi_3(\xi_2)}^{\infty} K(t)\,dt=\right.$$

$$=\rho\max_{t_1\leqslant\xi_0\leqslant t_e} Y_4(\xi_1,\ \xi_2).$$

Найдем $\dfrac{\partial Y_4}{\partial\xi_1}$, а также $\dfrac{\partial Y_4}{\partial\xi_2}$ при $\xi_2\neq e_0(\varphi)$ и запишем систему уравнений

$$\frac{\partial Y_4}{\partial\xi_1}=K(\xi_0)\frac{\partial\xi_0}{\partial\xi_1}(\xi_1^\rho-\xi_2^\rho)-\rho\xi_1^{\rho-1}\ln\left|E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right)\right|\Bigg|_{t=\xi_1}^{t=\xi_0}=0, \tag{4.40}$$

$$\frac{\partial Y_4}{\partial\xi_2}=K(\xi_0)\frac{\partial\xi_0}{\partial\xi_2}(\xi_1^\rho-\xi_2^\rho)-\rho\xi_2^{\rho-1}\ln\left|E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right)\right|\Bigg|_{t=\xi_0}^{t=\xi_2}+$$

$$+\rho\xi_3^{\rho-1}\frac{d\xi_3}{d\xi_2}\ln\left|E\left(\frac{e^{i\varphi}}{\xi_3}\right)\right|=0. \tag{4.41}$$

Найдя $\dfrac{d\xi_3}{d\xi_2}$, легко проверить, что производная $\dfrac{\partial Y_4}{\partial\xi_2}$ в точке $\xi_2=e_0(\varphi)$ существует и непрерывна, так как правая и левая производные по ξ_2 от функции $Y_4(\xi_1,\ \xi_2)$ в этой точке равны.

Учитывая (4.33), перепишем (4.40) и (4.41) при обозначениях (4.9) и (4.10) в виде:

$$\psi'(s_0)=-\frac{\psi(s_0)-\psi(s_1)}{s_0-s_1}, \tag{4.40′}$$

$$\psi'(s_0)=\frac{\psi(s_2)-\psi(s_0)}{s_2-s_0}\quad\text{для } s_2\leqslant\ln e_0(\varphi), \tag{4.41′}$$

$$\psi'(s_0)=\frac{-\psi(s_0)}{s_2-s_0}\quad\text{для } s_2>\ln e_0(\sigma). \tag{4.41″}$$

Обращаясь к 2_3) и $2_3'$), заметим, что функция $\psi(x)$ монотонно убывает от $-\infty$ до $\psi\left(\ln c(\varphi)\right)$, когда x меняется от $-\infty$ до $\ln c(\varphi)$, выпукла вниз на промежутках $[-\infty,\ x_1]$ и $[x_2,\ x_3)$, выпукла вверх на промежутках $[x_1,\ x_2]$ и $[x_3, +\infty)$, $\psi\left(\ln e_0(\varphi)\right)=0$.

Рассмотрим следующие равенства для определения Θ_1 и Θ_2 соответственно при $\omega \leqslant x_e = \ln t_e \leqslant \ln e_0(\varphi)$

$$\psi'(\omega) = \frac{\psi(\omega) - \psi(\Theta_1)}{\omega - \Theta_1}, \quad \Theta_1 \leqslant \omega, \tag{4.42}$$

и

$$\psi' = (\omega) = \frac{\psi(\Theta_2) - \psi(\omega)}{\Theta_2 - \omega}, \quad \omega \leqslant \Theta_2 \leqslant \ln e_0(\varphi), \tag{4.43}$$

$$\psi'(\omega) = \frac{\psi(\omega)}{\omega - \Theta_2}, \quad \Theta_2 > \ln e_0(\varphi). \tag{4.43'}$$

Так же, как в п. 5, показывается, что функция $\Theta_1 = \Omega_1(\omega)$ (функция $\Theta_2 = \Omega_2(\omega)$), определенная из равенства (4.42) (из равенства (4.43)), строго монотонно убывает при $\omega \in [x_1, x_e]$ (при $\omega \in [\omega^*, x_e]$, где $\Omega_2(\omega^*) = \ln e_0(\varphi)$, $\omega^* > x_1$). Покажем, что функция $\Omega_2(\omega)$, определенная из соотношения (4.43') также монотонно убывает при $\omega \in (x_1\ \omega^*)$. Действительно, из (4.43') находим, что

$$\Omega_2(\omega) = \omega - \frac{\psi(\omega)}{\psi'(\omega)}.$$

Отсюда

$$\Omega_2(\omega) = \frac{\psi''(\omega)\ \psi(\omega)}{(\psi'(\omega))^2}.$$

В силу определения множества $\Phi_{13}(+)$ и функции $\psi(x)$ имеем $\psi''(x) < 0$ при $\omega \in (x_1, x_2)$. При $\omega \in (x_1, x_e)$ выполняется $\psi(\omega) > 0$, так как $\omega < \ln e_0(\varphi)$. Следовательно, $\Omega'(\omega) < 0$.

Из предыдущего следует, что если положить $\omega = \omega^*$, то соотношение (4.43) примет вид (4.43'). Следовательно, функция $\Omega_2(\omega)$ непрерывна и строго монотонно убывает при $\omega \in [x_1, x_e]$.

Причем

$$\Theta_1^e = \Omega_1(x_e) \leqslant \Omega_1(\omega) \leqslant x_1 = \Omega_1(x_1), \quad \Omega_2(x_e) \leqslant \Omega_2(\omega) \leqslant \Omega_2(x_1).$$

Как в п. 5 заключаем, что $\Theta_2 = \Omega_2\left(\Omega_1^{-1}(\Theta_1)\right) = \Theta(\Theta_1)$ и $s_0\left(\Theta_1, \Theta(\Theta_1)\right)$ — монотонно возрастающие функции переменного $\Theta_1 \in [\Theta_1^e, x_1]$. Функция $\Omega(\Theta_1) = \omega\left(\Theta_1, \Theta(\Theta_1)\right)$, где Θ_1, $\Theta(\Theta_1) = \Theta_2$ удовлетворяют соотношениям (4.43) и (4.43') соответственно, строго монотонно убывает при $\Theta_1 \in (\Theta_1^e, x_1)$. Так же как в п. 5 приходим к выводу, что значение $s_1^* \in [\Theta_1^e, x_1]$, удовлетворяющее равенству

$$s_0\left(s_1^*, \Theta(s_1^*)\right) = \omega\left(s_1^*, \Theta(s_1^*)\right),$$

единственно. Учитывая также замечание в конце п. 5, приходим к выводу, что функция $Y_4(\xi_1, \xi_2)$ имеет единственную точку максимума (ξ_1^*, ξ_2^*), которую мы находим из необходимого условия максимума, причем

$$\xi_1^* > 0. \tag{4.44}$$

Так же, как в конце п. 5, можно доказать справедливость замечания: $s(\varphi_k) - s_1^*(\varphi_k) \to 0$, если $x_2(\varphi_k) - x_1(\varphi_k) \to 0$ при $k \to \infty$ для некоторой последовательности $\varphi_k \in \Phi_{13}^0(+)$.

При $p=0$ остается еще рассмотреть случай, когда $\varphi\in\Phi_{12}$.

7. $\varphi\in\Phi_{12}$.

Учитывая определение Φ_{12} и неравенства (3.22′) и (3.23′), имеем:

$$F\left(\nu(t)\right)=F_1\left(H(\ln t)\right)\leqslant F_1\left(B_5 H(\ln t)\right)=F\left(A^{-1}H_5(\ln t)\right),$$

а также

$$\sup_{\nu(t)\in R} F\left(\nu(t)\right)=\sup_{\nu(t)\in R_5} F\left(\nu(t)\right). \tag{4.45}$$

Учитывая соотношение (3.24), заключаем, что функция $A^{-1}B_5A\nu(t)$ будет иметь вид (4.27) или (4.28), где $\varepsilon_1=0$. Легко проверить, что рассуждения, проведенные в п. 6, останутся справедливыми при $\xi_1=0$, и в силу (4.45) и (4.39)

$$\sup_{\nu(t)\in R} F\left(\nu(t)\right)=\max_{\xi_2\geqslant t_e} Y_4(0,\ \xi_2).$$

Так как $\xi_3(t_e)=e_0(\varphi)$, то

$$\frac{\partial Y_4(0,\ t_e)}{\partial \xi_2}=t_e^{\rho}\int\limits_{e^{-\frac{1}{\rho}}t_e}^{t_e} K(t)\,dt+\int\limits_{t_e}^{e_0(\varphi)} t^{\rho}K(t)\,dt>0.$$

Из неравенства $K(t)<0$ при $t>c(\varphi)$ заключаем, что

$\dfrac{\partial Y_4(0,\ \xi_2)}{\partial \xi_2}<0$ для достаточно больших ξ_2.

При $\xi_1=0$ необходимое условие максимума функции $Y_4(0,\ \xi_2)$ запишется в виде уравнения (4.41), где $\xi_0=\xi_0(0,\ \xi_2)=e^{-\frac{1}{\rho}}\xi_2$. Рассматривая функцию $\Theta_2=\Omega_2(\omega)$, определенную в п. 6, и функцию $\omega=\Omega_2^{-1}(\Theta_2)$, а также учитывая поведение функции $\psi(x)$, приходим к выводу, что уравнение (4.41) имеет единственное решение ξ_2^*. Следовательно,

$$\sup_{\nu(t)\in R} F\left(\nu(t)\right)=\rho\, Y_4(0,\ \xi_2^*).$$

Введем такое обозначение

$$I(\varphi,\ \rho)=\begin{cases}\rho\displaystyle\int\limits_0^{\infty} t^{\rho-1}\ln^+\left|E\left(\frac{e^{i\varphi}}{t},p\right)\right|dt \text{ для } \varphi\in\Phi_{00}(+)\cup\Phi_{00}(-)\cup\Phi_{02}(-)\cup\Phi_{11}^0(+),\\[2ex] \alpha^{\rho}(\varphi)\displaystyle\int\limits_{e^{-\frac{1}{\rho}}\alpha(\varphi)}^{\alpha(\varphi)} K(t,\ \varphi)\,dt+\int\limits_{\alpha(\varphi)}^{\infty} t^{\rho}K\,dt \text{ для } \varphi\in\Phi_{11}(-)\cup\Phi_{13}(-),\\[2ex] \displaystyle\int\limits_0^{\beta(\varphi)} t^{\rho}K(t,\ \varphi)\,dt+\beta^{\rho}(\varphi)\int\limits_{\beta(\varphi)}^{\xi_0(\beta,\gamma)} K\,dt+\gamma^{\rho}(\varphi)\int\limits_{\xi_0(\beta,\gamma)}^{\gamma(\varphi)} K\,dt+\int\limits_{\gamma(\varphi)}^{\xi(\gamma)} t^{\rho}K\,dt+\\ \quad+\xi^{\rho}(\gamma)\displaystyle\int\limits_{\xi(\gamma)}^{\infty} K\,dt \text{ для } \varphi\in\Phi_{13}(+),\end{cases}$$

$$
\left|\begin{array}{l}
\displaystyle\int_0^{\beta(\varphi)} t^\rho K(t,\varphi)\,dt+\beta^\rho\int_{\beta(\varphi)}^{\xi_0(\beta,\gamma)} K\,dt+\gamma^\rho\int_{\xi_0(\beta,\gamma)}^{\gamma(\varphi)} K\,dt+\int_{\gamma(\varphi)}^{\infty} t^\rho K\,dt \ \text{для}\\
\varphi\in\Phi_{02}(+),\\
\displaystyle\gamma^\rho(\varphi)\int_{e^{-\frac{1}{\rho}}\gamma(\varphi)}^{\gamma(\varphi)} K(t,\varphi)\,dt+\int_{\gamma(\varphi)}^{\xi(\gamma)} t^\rho K\,dt+\xi^\rho(\gamma)\int_{\xi_0(\gamma)}^{\infty} K\,dt \ \text{для}\ \varphi\in\Phi_{12},
\end{array}\right.
$$

где $\alpha(\varphi)$ — корень уравнения (4.11), $\big(\beta(\varphi),\ \gamma(\varphi)\big)$ — решение системы уравнений (4.21) при $\varphi\in\Phi_{02}(+)$ и системы (4.40), (4.41) при $\varphi\in\Phi_{13}^0(+)$, $\gamma(\varphi)$ — корень уравнения (4.41) при $\varphi\in\Phi_{12}$, $\xi_1=0$; $\xi\big(\gamma(\varphi)\big)=\xi_3\big(\gamma(\varphi)\big)$ при $\varphi\in\Phi_{13}(+)\cup\Phi_{12}$, где $\xi_3(\gamma)$ — функция, определенная соотношением (4.33); функция $\xi_0(\beta,\gamma)$ определена соотношением (4.16′). Тогда результат настоящего параграфа можно сформулировать в виде равенства

$$\sup_{\nu(t)\in R} F\big(\nu(t)\big)=\max_{\nu(t)\in R} F\big(\nu(t)\big)=\rho\, l(\varphi,\ \rho).$$

Покажем, что функция $l(\varphi,\ \rho)$ непрерывна. Так как нули полинома $P_3(\varphi,\ t)$, как функции от t, непрерывные функции от φ, то, очевидно, каждое из множеств $\Phi_{ij}(+)$, $\Phi_{ij}(-)$, Φ_{12}, $i=0,\ 1,\ j=i,\ i+2$, в силу их определения состоит из промежутков. Эти промежутки, которые мы обозначим через Θ_k, взаимно не пересекаются и покрывают интервал $(0,\ 2\pi)$. Если $\varphi_n\in\Theta_k$, $n=1,\ 2,\ \ldots,\ \varphi\in\Theta_k$, $\varphi_n\to\varphi$, то равенство

$$\lim_{n\to\infty} l(\varphi_n,\ \rho)=l(\varphi,\ \rho)$$

очевидно при $\varphi\in\Phi_{00}(+)\cup\Phi_{00}(-)\cup\Phi_{02}(-)$; если же φ не принадлежит объединению указанных множеств, то соотношение (4.46) следует из того факта, что условия для определения функций $e_0(\varphi)$, $\alpha(\varphi)$, $\beta(\varphi)$, $\gamma(\varphi)$ непрерывно зависят от φ и следовательно, при $\varphi\in\Theta_k$, $\varphi_n\in\Theta_k$, $n=1,\ 2,\ \ldots,$

$$e_0(\varphi_n)\to e_0(\varphi),\ \alpha(\varphi_n)\to\alpha(\varphi),\ \beta(\varphi_n)\to\beta(\varphi)$$

и $\gamma(\varphi_n)\to\gamma(\varphi)$ при $\varphi_n\to\varphi$. Остается установить непрерывность $l(\varphi,\ \rho)$ в точках $\varphi\in(0,\ 2\pi)$, которые являются концами промежутков Θ_k. Этот факт легко проверяется непосредственно, если учесть замечания в конце п. п. 3, 4, 5 и 6.

§ 5. Доказательство теоремы 1

Докажем сначала неравенство (1.2) для случая $\rho(r)\equiv\rho$. Из (1.7) следует, что для $k>k_0$ выполняется

$$h_f(\varphi)-\varepsilon\leqslant\frac{F\big(n_f(r_k t)\big)}{r_k^\rho}\leqslant\sup_{\nu(r_k t)\in R(\Delta+\varepsilon)r_k^\rho}\frac{F\big(\nu(r_k t)\big)}{r_k^\rho},$$

где r_k — некоторая последовательность, стремящаяся к ∞. Учитывая лемму 1, получаем отсюда, что

$$h_f(\varphi)-\varepsilon\leqslant(\Delta+\varepsilon)\sup_{\nu(t)\in R} F\big(\nu(t)\big).$$

В силу произвольной малости ε отсюда следует

$$h_f(\varphi) \leqslant \Delta \sup_{\nu(t)\in R} F\Big(\nu(t)\Big) = \Delta \rho I(\varphi, \rho).$$

Теперь отбросим ограничение $\rho(r) \equiv \rho$. Обозначим функцию $r^{\rho(r)}$ через $V(r)$. Можем считать, не уменьшая общности (см. [2]), что для всех r, $0<r<\infty$

$$V(rt) \leqslant \begin{cases} t^{\rho+\sigma} V(r) \text{ при } 1 \leqslant t < \infty, \\ t^{\rho-\sigma} V(r) \text{ при } 0 < t \leqslant 1, \end{cases} \tag{5.1}$$

где $0<\sigma<\min(\rho-p,\ p+1-\rho)$; для каждого промежутка $[\varepsilon_0, \eta] \in (0, \infty)$ $(\Delta+e)\varepsilon_0<1$, $\eta>1$, существует r_0 такое, что при $r>r_0$, $t\in[\varepsilon_0, \eta]$ выполняется

$$V(rt) \leqslant (t^\rho + \varepsilon_0^{\rho+1})\, V(r). \tag{5.2}$$

Не уменьшая общности, можем считать также, что для всех r, $0<r<\infty$, и ε_0, выбранного ранее,

$$N_f(rt) \leqslant (\Delta + \varepsilon_0^{\rho+1})\, V(rt). \tag{5.3}$$

Комбинируя неравенства (5.1), (5.2) и (5.3), получаем для $r>r_0$, $\varepsilon=\varepsilon_0(\Delta+e)$, что

$$N_f(rt) \leqslant \begin{cases} (\Delta+\varepsilon)\, V(r)\, t^{\rho-\sigma} \text{ при } 0<t<\varepsilon_0, \\ (\Delta+\varepsilon)\, V(r)\, t^{\rho} \text{ при } \varepsilon_0 \leqslant t \leqslant \eta, \\ (\Delta+\varepsilon)\, V(r)\, t^{\rho+\sigma} \text{ при } \eta < t < \infty. \end{cases} \tag{5.5}$$

Действительно, при $\varepsilon_0 \leqslant t \leqslant \eta$

$$(\Delta + \varepsilon_0^{\rho+1})(t^\rho + \varepsilon_0^{\rho+1})\, V(r) = t^\rho \left\{\Delta + \varepsilon_0^{\rho+1}\left(1 + \frac{\Delta+\varepsilon_0^{\rho+1}}{t^\rho}\right)\right\} V(r) \leqslant$$

$$\leqslant V(r)\, t^\rho \left\{\Delta + \varepsilon_0^{\rho+1}\left(1+\frac{\Delta+1}{\varepsilon_0^\rho}\right)\right\} =$$

$$= V(r)\, t^\rho \left\{\Delta + \varepsilon_0(\varepsilon_0^\rho + \Delta + 1)\right\} \leqslant V(r)\, t^\rho \left\{\Delta + (\Delta+e)\,\varepsilon_0\right\}.$$

Из (1.1) следует существование последовательности $r_k \to \infty$, такой, что для $\varepsilon=\varepsilon_0(\Delta+e)$ и $k \geqslant k_0$, $r_{k_0}>r_0$, справедливо неравенство

$$h_f(\varphi) - \varepsilon \leqslant \frac{F\big(n_f(r_k t)\big)}{V(r_k)}. \tag{5.6}$$

Класс неотрицательных неубывающих функций $\nu(rt)$, $0<t<\infty$, $r>r_{k_0}>r_0$, удовлетворяющих условию (5.5), где в левой части неравенства стоит $A\nu(rt)$, обозначим через $R^\sigma\Big((\Delta+\varepsilon)\, V(r)\Big)$, $R^\sigma(1)=R^\sigma$. Из неравенства (5.6) следует, что

$$h_f(\varphi) - \varepsilon \leqslant \frac{F\big(n_f(r_k t)\big)}{V(r_k)} \leqslant \sup_{\nu(t\,r_k)\in R^\sigma(V(r_k)(\Delta+\varepsilon))} \frac{F\big(\nu(r_k t)\big)}{V(r_k)}. \tag{5.7}$$

Используя лемму 1, из последнего неравенства находим, что

$$h_f(\varphi) - \varepsilon \leqslant (\Delta+\varepsilon) \sup_{\nu(t)\in R^\sigma} F\Big(\nu(t)\Big). \tag{5.8}$$

Значения функционала $F\Big(\nu(t)\Big)$ ограничены, когда $\nu(t)\in R^\sigma$. Действительно, при $\nu(t)\in R^\sigma$ имеем:

$$F\Big(\nu(t)\Big) = F_1\Big(A\nu(t)\Big) \leqslant \int_0^\infty A\nu(t)\,|L(t)|\,dt \leqslant \int_0^1 t^{\rho-\sigma}\,|L|\,dt + \int_0^\infty t^{\rho+\sigma}\,|L|\,dt < \infty.$$

В классе R^σ существует функция $\nu_0(t) \in R^\sigma$, такая, что

$$\sup_{\nu(t)\in R^\sigma} F\big(\nu(t)\big) \leqslant F\big(\nu_0(t)\big) + \frac{\varepsilon}{\Delta+\varepsilon}.$$

Следовательно, неравенство (5.8) можно переписать так:

$$h_f(\varphi) - 2\varepsilon \leqslant (\Delta+\varepsilon) F\big(\nu_0(t)\big). \tag{5.9}$$

Рассмотрим такую функцию $\nu_1(t)$.

$$\nu_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < t < \varepsilon_0, \\ \nu_0(t) & \text{при } \varepsilon_0 \leqslant t \leqslant \eta. \\ \nu_0(\eta) & \text{при } t > \eta. \end{cases}$$

Очевидно, $\nu_1(t) \in R$ (см. обозначение в конце § 1), и

$$F\big(\nu_0(t)\big) - F\big(\nu_1(t)\big) = \int_0^{\varepsilon_0} \nu_0(t) K(t)\, dt + \int_\eta^\infty \big\{\nu_0(t) - \nu_0(\eta)\big\} K(t)\, dt.$$

Заметим, что $\nu_0(t) \leqslant A\,\nu_0(et)$. Следовательно,

$$F\big(\nu_0(t)\big) \leqslant F\big(\nu_1(t)\big) + \int_0^{\varepsilon_0} (et)^{\rho-\sigma} |K|\, dt + \int_0^\infty (et)^{\rho+\sigma} |K|\, dt.$$

Отсюда, так как $0 < \sigma < \min(\rho - p,\ p+1-\rho)$, для произвольно малого $\varepsilon > 0$ можно выбрать ε_0 столь малым, а η столь большим, что

$$F\big(\nu_0(t)\big) \leqslant F\big(\nu_1(t)\big) + \frac{\varepsilon_1}{\Delta+1}.$$

Неравенство (5.9) можем теперь переписать следующим образом:

$$h_f(\varphi) - 2\varepsilon - \varepsilon_1 \leqslant (\Delta+\varepsilon) F\big(\nu_1(t)\big).$$

Отсюда

$$h_f(\varphi) - 2\varepsilon - \varepsilon_1 \leqslant (\Delta+\varepsilon) \sup_{\nu(t)\in R} F\big(\nu(t)\big) = (\Delta+\varepsilon)\,\rho\, l(\varphi,\ \rho).$$

В силу произвольной малости ε_1, ε_0, а, следовательно, и ε, получаем отсюда неравенство (1.2).

Для завершения доказательства теоремы 1 мы построим функцию $g(z) \in G(\Delta)$, для которой выполняется равенство (1.3). Ограничимся случаем, когда $\rho(r) \equiv \rho$. Построение примера в общем случае производится аналогично. Кроме того, можно ограничиться случаем, когда $\Delta = \frac{1}{\rho}$, так как для получения отсюда примера с произвольным Δ, $0 < \Delta < \infty$, достаточно заменить $f(z)$ на $f\Big[(\rho\Delta)^{\frac{1}{\rho}} z\Big]$.

Пусть $\{q_k\}$ — последовательность, составленная из всех рациональных чисел из $(0,1)$, $\tilde\varphi_k = 2\pi q_k$, $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, через $\{\varphi_k\}$ обозначим последовательность

$$\tilde\varphi_1,\ \tilde\varphi_1,\ \tilde\varphi_2,\ \tilde\varphi_1,\ \tilde\varphi_2,\ \tilde\varphi_3,\ \tilde\varphi_1,\ \tilde\varphi_2,\ \tilde\varphi_3,\ \tilde\varphi_4,\ \ldots$$

Пусть $\{r_k\}$ — строго монотонно возрастающая последовательность, выбор которой мы уточним ниже. Обозначим $e_0(\varphi_k)=e_{0k}$, $\alpha(\varphi_k)=\alpha_k$, $\beta(\varphi_k)=\beta_k$, $\gamma(\varphi_k)=\gamma_k$, $\xi_0(\varphi_k)=\xi_{0k}$, $\xi(\gamma_k)=\xi_k$. Последовательность $\{r_k\}$ должна удовлетворять условию

$$r_k\leqslant\max\{1,\ e_{0k}^{-2},\ \beta_k^{-2},\ e^{\frac{2}{\rho}}\alpha_k^{-2},\ e^{\frac{2}{\rho}}\gamma_k^{-2},\ e_{0k},\ \alpha_k,\ \xi_k\}.$$

Дополнительные условия на последовательность $\{r_k\}$ будут наложены ниже.

Введем множества J_i $(i=0,\ 1,\ \ldots,\ 5)$ индексов k:

$$\begin{aligned}
&k\in J_0, \text{ если } \varphi_k\in\Phi_{00}(+),\\
&k\in J_1, \text{ если } \varphi_k\in\Phi_{11}^0(+),\\
&k\in J_2, \text{ если } \varphi_k\in\Phi_{02}(+),\\
&k\in J_3, \text{ если } \varphi_k\in\Phi_{13}(+),\\
&k\in J_4, \text{ если } \varphi_k\in\Phi_{11}(-)\cup\Phi_{13}(-),\\
&k\in J_5, \text{ если } \varphi_k\in\Phi_{12}.
\end{aligned}$$

Положим далее

$$p_{6k}=\begin{cases}\sqrt{r_k} & \text{при } k\in J_0\cup J_1\cup J_2\cup J_3,\\ e^{-\frac{1}{\rho}}\alpha_k r_k & \text{при } k\in J_4,\\ e^{-\frac{1}{\rho}}\gamma_k r_k & \text{при } k\in J_5\end{cases}$$

$$p_{6k+1}=\begin{cases}r_k^2 & \text{при } k\in J_0,\\ e_{0k}r_k & \text{при } k\in J_1,\\ \beta_k r_k & \text{при } k\in J_2\cup J_3,\\ p_{6k} & \text{при } k\in J_4\cup J_5,\end{cases}$$

$$p_{6k+2}=\begin{cases}r_k^2 & \text{при } k\in J_0\cup J_1,\\ \xi_{0k}r_k & \text{при } k\in J_2\cup J_3,\\ p_{6k} & \text{при } k\in J_4\cup J_5,\end{cases}$$

$$p_{6k+3}=\begin{cases}p_{6k+2} & \text{при } k\in J_0\cup J_1,\\ \alpha_k r_k & \text{при } k\in J_4,\\ \gamma_k r & \text{при } k\in J_2\cup J_3\cup J_5,\end{cases}$$

$$p_{6k+4}=\begin{cases}\xi_k r_k & \text{при } k\in J_3\cup J_5,\\ r_k^2 & \text{при } k\in J_0\cup J_1\cup J_2\cup J_4,\end{cases}$$

$$p_{6k+5}=r_k^2 \text{ для всех } k.$$

Для $\varphi_k\in\Phi_{00}(-)\cup\Phi_{02}(-)$ множества J_i и числа p_j не определяются.

Всегда можно выбрать последовательность $\{r_k\}$ так, что для всех k справедливо

$$\sqrt{r_{k+1}}>r_k^2,\qquad \lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{r_{k+1}}}{r_k}=\infty,$$

$$\lim_{k\to\infty}p_{6k}^{-\rho}\sum_{j=1}^{k}p_{6j-1}^{\rho}=0,\quad \frac{k}{p_{6k}^{\rho}}\to 0 \text{ при } k\to\infty.$$

Из определения последовательности $\{r_k\}$ следует, что $p_{j+1}\geqslant p_j$, $j=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

Построим каноническое произведение $g(z)$ рода $p=[\rho]$ с нулями порядка $[p_{6k}^{\rho}]+1$ в точках p_{6k}, порядка $[p_{6k+3}^{\rho}]-[p_{6k+1}^{\rho}]$ в точках p_{6k}, простыми нулями во всех точках вида $\nu^{\frac{1}{\rho}}$, $\nu=1, 2, 3 \ldots$, попадающих и интервалы (p_{6k}, p_{6k+1}), (p_{6k+3}, p_{6k+4}).

Покажем, что эго каноническое произведение абсолютно сходится. Обозначим через $n_{6k}(r)$ число нулей на пересечении промежутков $[0, r]$ и $[p_{6k}, p_{6k+5}]$.

Легко видеть, что

$$n_{6k}(r)=\begin{cases} 0 & \text{при } 0\leqslant r<p_{6k}, \\ [r^{\rho}]+1 & \text{при } p_{6k}\leqslant r\leqslant p_{6k+1},\ p_{6k+3}\leqslant r\leqslant p_{6k+4}, \\ [p_{6k+1}^{\rho}]+1 & \text{при } p_{6k+1}\leqslant r\leqslant p_{6k+2}, \\ [p_{6k+3}^{\rho}]+1 & \text{при } p_{6k+2}\leqslant r\leqslant p_{6k+3}, \\ [p_{6k+4}^{\rho}]+1 & \text{при } p_{6k+4}\leqslant r\leqslant p_{6k+5}, \end{cases}$$

$$n_{6k}(r)\equiv 0 \text{ при } \varphi_k\in\Phi_{00}(-)\cup\Phi_{02}(-).$$

В (p_{6k-1}, p_{6k}) нули отсутствуют. Из определения p_{6k+j} и $n_{6k}(r)$ следует, что

$$N_{6k}(r)=\int_0^r \frac{n_{6k}(t)}{t}\,dt\leqslant\frac{1}{\rho}r^{\rho}+0(r^{\rho}). \tag{5.10}$$

Действительно, при $r\leqslant p_{6k+2}$ это неравенство следует из неравенства $n_{6k}(t)\leqslant \leqslant t^{\rho}+1$ при $t\leqslant p_{6k+2}$. Пусть $p_{6k+2}\leqslant r\leqslant p_{6k+3}$. Требуемое соотношение очевидно, если $k\in J_0\cup J_1$; если $k\in J_4$, то

$$N_{6k}(r)=(\alpha_k r_k)^{\rho}\int_{e^{\frac{1}{\rho}}\alpha_k r_k}^{r} d\ln t+0(\ln r)=(\alpha_k r_k)^{\rho}\left(\frac{1}{\rho}+\ln\frac{r}{\alpha_k r_k}\right)+$$
$$+0(\ln r)\leqslant\frac{1}{\rho}r^{\rho}+o(r^{\rho}).$$

Действительно, в этом случае $e^{-\frac{1}{\rho}}\alpha_k r_k\leqslant r\leqslant\alpha_k r_k$, и производная по r от разности $(\alpha_k r_k)^{\rho}\left(\frac{1}{\rho}+\ln\frac{r}{\alpha_k r_k}\right)-\frac{1}{\rho}r^{\rho}$ равна $\left[(\alpha_k r_k)^{\rho}+r^{\rho}\right]r^{-1}\geqslant 0$; если $k\in J_5$, то рассуждаем аналогично; если же $k\in J_2\cup J_3$, то

$$N_{6k}(r)=\int_{\sqrt{r_k}}^{\beta_k r_k} t^{\rho}d\ln t+(\beta_k r_k)^{\rho}\int_{\beta_k r_k}^{\xi_0 k r_k} d\ln t+(\gamma_k r_k)^{\rho}\int_{\xi_0 k r_k}^{r} d\ln t+o(\ln r)\leqslant\frac{1}{\rho}r^{\rho}+o(r^{\rho}),$$

так как, вспоминая определение функций $\beta(\varphi)$, $\gamma(\varphi)$, $\xi_0(\beta, \rho)$ мы можем в этом случае представить $N_{6k}(r)$ в виде $N_{6k}(r)=A\nu(r)+o(\ln r)$, где $\nu(r)\in R\left(\frac{1}{\rho}\right)$. Если $r\geqslant p_{6k+3}$, то требуемое утверждение вновь следует из неравенства $n_{6k}(t)\leqslant t^{\rho}+1$ при $t\geqslant p_{6k+3}$.

Пусть $r\in[p_{6k}, p_{6k+6}]$, тогда

$$n(r)\leqslant\sum_{j=1}^{k}p_{6j-1}^{\rho}+n_{6k}(r)+6k-1=n_{6k}(r)+o(r^{\rho}),$$

и

$$N(r) \leqslant \frac{1}{\rho} r^{\rho} + o(r^{\rho}).$$

Следовательно, $N(r)$ — не более чем нормального типа порядка ρ, и каноническое произведение рода $p=[\rho]<\rho$ абсолютно сходится, причем $g(z)$ — целая функция не более чем нормального типа порядка ρ.

Зафиксируем $\tilde{\varphi}_q$. Пусть $\varphi_{k_m}=\tilde{\varphi}_q$. Покажем, что

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\ln|g(r_{k_m} e^{i\tilde{\varphi}_q})|}{r_{k_m}^{\rho}} \geqslant l(\tilde{\varphi}_q, \rho),$$

а так как обе части этого неравенства являются непрерывными функциями от φ и множество $\{\tilde{\varphi}_q\}$ всюду плотно в $[0, 2\pi)$, то для всех $\varphi \in [0, 2\pi)$ будет выполняться соотношение

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln|g(re^{i\varphi})|}{r^{\rho}} \geqslant l(\varphi, \rho).$$

Чтобы упростить запись, всюду ниже в § 5 вместо k_m будем писать k. Обозначим

$$g_1(re^{i\varphi}) = \prod_{a_\nu \leqslant p_{\varepsilon k-1}} E\left(\frac{r}{a_\nu} e^{i\varphi},\ p\right),$$

$$g_2(re^{i\varphi}) = \prod_{p_{\varepsilon k} \leqslant a_\nu \leqslant p_{\varepsilon k+\varepsilon}} E\left(\frac{r}{a_\nu} e^{i\varphi},\ p\right).$$

$$g_3(re^{i\varphi}) = \prod_{p_{\varepsilon k+\varepsilon} \leqslant a_\nu < \infty} E\left(\frac{r}{a_\nu} e^{i\varphi},\ p\right).$$

Очевидно,

$$g(re^{i\varphi}) = \prod_{\alpha=1}^{3} g_\alpha(re^{i\varphi}).$$

Так как при $|u| \leqslant \frac{1}{2}$ справедливо неравенство $\big|\ln|E(u, p)|\big| \leqslant C|u|^{p+1}$ $(C=1$ при $p>0$, $C=2$ при $p=0)$, а при $|u| \geqslant 2$ — неравенство $\big|\ln|E(u, p)|\big| \leqslant D_p|u|^p$ (здесь $p>0$) и $\ln|E(u, 0)| \leqslant \ln(1+|u|)$, то (см. [3])

$$\big|\ln|g_1(r_k e^{i\varphi_k})|\big| = o(r_k^{\rho}),$$

$$\big|\ln|g_3(r_k e^{i\varphi_k})|\big| = o(r_k^{\rho}).$$

Докажем, например, второе равенство

$$\big|\ln|g_3(r_k e^{i\varphi_k})|\big| \leqslant \sum_{p_{\varepsilon k+\varepsilon} > a_\nu < \infty} \left|\ln\left|E\left(\frac{r_k}{a_\nu} e^{i\varphi_k}\right)\right|\right| \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{p_{6k+5}\leqslant a_\nu} \left(\frac{r_k}{a_\nu}\right)^{p+1} = C r_k^{p+1} \int\limits_{p_{6k+5}}^{\infty} \frac{dn(t)}{t^{p+1}} \leqslant$$

$$\leqslant C r_k^{p+1}(p+1) \int\limits_{p_{6k+5}}^{\infty} \frac{n(t)}{t^{p+2}} \leqslant C_1 r_k^{p+1}(p+1)\Big((1+o(1)\Big) \int\limits_{p_{6k+5}}^{\infty} t^{\rho-p-2}\,dt =$$

$$= C_1 \frac{p+1}{p+1-\rho} \Big(1+o(1)\Big)\left(\frac{r_k}{p_{6k+5}}\right)^{p+1-\rho} r_k^{\rho} = o(r_k^{\rho}).$$

Оценим теперь $\ln|g_2(r_k e^{i\varphi_k})|$ снизу:

$$\ln|g_2(r_k e^{i\varphi_k})| \int\limits_0^{\infty} \ln\Big|E\Big(\frac{r_k}{\tau} e^{i\varphi_k}\Big)\Big|\,dn_{6k}(\tau) =$$

$$= -\int\limits_0^{\infty} n_{6k}(\tau)\frac{d}{d\tau}\ln\Big|E\Big(\frac{r_k}{\tau}e^{i\varphi_k}\Big)\Big|\,d\tau = \int\limits_{\frac{p_{6k}}{r_k}}^{\frac{p_{6k+5}}{r_k}} n_{6k}(r_k t)K(t,\ \varphi_k)\,dt \geqslant$$

$$\geqslant r_k^{\rho} \int\limits_{\frac{p_{6k}}{r_k}}^{\frac{p_{6k+1}}{r_k}} t^{\rho}K(t,\ \varphi_k)\,dt + p_{6k+1}^{\rho} \int\limits_{\frac{p_{6k+1}}{r_k}}^{\frac{p_{6k+2}}{r_k}} K(t,\ \varphi_k)\,dt +$$

$$+ p_{6k+3}^{\rho} \int\limits_{\frac{p_{6k+2}}{r_k}}^{\frac{p_{6k+3}}{r_k}} K(t,\ \varphi_k)\,dt + r_k^{\rho} \int\limits_{\frac{p_{6k+3}}{r_k}}^{\frac{p_{6k+4}}{r_k}} t^{\rho}K(t,\ \varphi_k)\,dt +$$

$$+ p_{6k+4}^{\rho} \int\limits_{\frac{p_{6k+4}}{r_k}}^{\frac{p_{6k+5}}{r_k}} K(t,\ \varphi_k)\,dt - \int\limits_{\frac{p_{6k}}{r_k}}^{\frac{p_{6k+5}}{r_k}} |K(t,\ \varphi_k)|\,dt.$$

Но

$$\int\limits_{\frac{p_{6k}}{r_k}}^{\frac{p_{6k+5}}{r_k}} |K(t,\ \varphi_k)|\,dt \leqslant \frac{r_k^{\rho}}{p_{6k}^{\rho}} \int\limits_{\frac{p_{6k}}{r_k}}^{\frac{p_{6k+5}}{r_k}} |K(t,\ \varphi_k)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r_k^{\rho}}{p_{6k}^{\rho}} \int\limits_0^{\infty} |K(t,\ \varphi_k)|\,dt = 0(r_k^{\rho}).$$

Учитывая определения p_{6k+j}, заключаем отсюда, что

$$\ln|g_2(r_k e^{i\varphi_k})| \geqslant r_k^{\rho} I(\varphi_k,\ \rho) + o(r_k^{\rho}), \tag{5.11}$$

$$\ln|g(r_k e^{i\tilde{\varphi}_q})| \geqslant r_k^{\rho} I(\tilde{\varphi}_q,\ \rho) + o(r_k^{\rho}).$$

Проверим наше утверждение, например, при $\varphi_k=\bar{\varphi}_q=\varphi\in\Phi_{02}(+)$. В этом случае $k\in J_2$ и $\frac{p_{6k}}{r_k}=\frac{1}{\sqrt{r_k}}$,

$$\frac{p_{6k+1}}{r_k}=\beta_k,\quad \frac{p_{6k+2}}{r_k}=\xi_{0k},\quad \frac{p_{6k+3}}{r_k}=\gamma_k,\quad \frac{p_{6k+4}}{r_k}=\frac{p_{6k+5}}{r_k}=r_k.$$

Отсюда с очевидностью вытекает (5.11). Учитывая неравенство (2.3), имеем:

$$h_g(\varphi)=l(\varphi,\ \rho).$$

Тем самым теорема 1 полностью доказана.

§ 6. Экстремальный индикатор для целых функций целого порядка

Теперь мы найдем точную оценку сверху для индикаторов целых функций целого порядка относительно подходящим образом подобранного уточненного порядка при заданной верхней плотности нулей Δ. Основные определения и доказательства будут аналогичны содержащимся в статье А. А. Гольдберга [4], поэтому мы не будем подробно останавливаться на некоторых деталях.

1. **Формулировки результатов.** Сначала приведем некоторые определения и факты из [4].

Пусть ρ – целое число, $\rho>0$, $\rho(r)$ – уточненный порядок, $1\leqslant r<\infty$, $\rho(r)\to\rho$ при $r\to\infty$. По определению $\rho(r)$ принадлежит классу сходимости $(\rho(h)\in C)$ или расходимости $(\rho(r)\in D)$ в зависимости от того, сходится или расходится интеграл

$$\int_1^\infty t^{\rho(t)-\rho-1}\,dt.$$

Уточненные порядки $\rho_j(r)$, $\rho_j(r)\to\rho$ при $r\to\infty$, $j=1,\ 2,\ 3$, медленно растущие функции $L_1(r)$, $L_2(r)$, $L(r)$ и функции $V_1(r)$, $V_2(r)$, $V(r)$ определяются следующими равенствами:

$$r^\rho=r^{\rho_3(r)}=V_3(r),\quad r^{\rho(r)}=r^\rho L(r)=V(r),$$

при $\rho(r)\in D$

$$r^\rho\int_1^r t^{\rho(t)-\rho-1}\,dt=r^{\rho_1(r)}=r^\rho L_1(r)=V_1(r),$$

при $\rho(r)\in C$

$$r^\rho\int_r^\infty t^{\rho(t)-\rho-1}\,dt=r^{\rho_2(r)}=r^\rho L_2(r)=V_2(r).$$

При $\rho(r)\in D$ имеют место соотношения

$$V(r)=o\left(V_1(r)\right),\quad r^\rho=o\left(V_1(r)\right),\tag{6.1}$$

при $\rho(r)\in C$

$$V(r)=o\left(V_2(r)\right),\quad V_2(r)=o\left(r^\rho\right).\tag{6.2}$$

Пусть $f(z)$ – целая функция порядка ρ с положительными нулями $(f(0)\neq 0)$. Рассматриваются следующие индикаторы функции $f(z)$:

$$h_j(\varphi)=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho_j(r)}},\qquad 0\leqslant\varphi<2\pi,\qquad j=1,\ 2,\ 3.$$

Функция $N(r)=N_f(r)$ и число $\Delta=\Delta_f$ определены равенствами (1) и (2) соответственно. Будем обозначать через a_n, $1<a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots$, нули $f(z)$. Не уменьшая общности, можно считать $a_1>1$. Если $\rho(r)\in C$, то $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z)=\exp\{\alpha(f)\,z^\rho+P(z)\}\prod_n E\left(\frac{z}{a_n},\ \rho-1\right),\tag{6.3}$$

где $\alpha(f)$ — постоянная, $P(z)$ — многочлен степени не выше $\rho-1$, $E(z,\ p)$ — первичный множитель Вейерштрасса рода p. Если же $\rho(r)\in D$, то функция $f(z)$ представима в виде

$$f(z)=\exp\{Q(z)\}\prod_n E\left(\frac{z}{a_n},\ \rho\right),$$

где $Q(z)$ — многочлен степени не выше ρ.

Теорема 2. *Пусть $f(z)$ — целая функция с положительными нулями целого порядка $\rho>0$, число Δ — верхняя плотность ее нулей, измеренная относительно функции $r^{\rho(r)}$, $h_1(\varphi)$, $h_2(\varphi)$, $h_3(\varphi)$ — индикаторы функции $f(re^{i\varphi})$, измеренные относительно функций $V_1(r)$, $V_2(r)$ и $V_3(r)$ соответственно. Если $\rho(r)\in D$, то*

$$h_1(\varphi)\leqslant\rho\Delta\cos^+\rho\varphi.$$

Если $\rho(r)\in C$, то при $\alpha(f)=0$

$$h_2(\varphi)\leqslant\rho\Delta\cos^-\rho\varphi,$$

и при $\alpha=\alpha(f)\neq 0$

$$h_3(\varphi)=|\alpha|\cos(\rho\varphi+\arg\alpha).$$

Существует функция $f_1(z)\in G(\Delta)$, такая, что $(\rho(r)\in D)$.

$$h_1(\varphi)=\rho\Delta\cos^+\rho\varphi.\tag{6.4}$$

и $f_2(z)\in G(\Delta)$, такая, что $(\rho(r)\in C)$

$$h_2(\varphi)=\rho\Delta\cos^-\rho\varphi.\tag{6.5}$$

2. **Доказательство теоремы 2.** Пусть $\rho(r)\in D$, $r>1$. Запишем $f(z)$ в следующем виде:

$$f(z)=f_r^{(1)}(z)\,f_r^{(2)}(z),\tag{6.6}$$

где

$$f_r^{(1)}(z)=\exp\left\{\frac{1}{\rho}\,z^\rho\sum_{a_k\leqslant r}a_k^{-\rho}\right\},$$

$$f_r^{(2)}(z)=\exp\{Q(z)\}\prod_{a_k\leqslant r}E\left(\frac{z}{a_k},\ \rho-1\right)\prod_{a_k>r}E\left(\frac{z}{a_k},\ \rho\right)=\exp\{Q(z)\}\,f_r^{(3)}(z).$$

Известно [1], что

$$\ln M(r,\ f_r^{(3)})\leqslant KV(r),\tag{6.7}$$

где постоянная $K>0$ зависит только от ρ и Δ.

Очевидно, что

$$\ln M\Big(r,\ \exp Q(z)\Big)\leqslant K_1 r^\rho.$$

Учитывая (1.2), получим

$$\ln M\left(r,\ f_r^{(2)}(z)\right)=o\left(V_1(r)\right).$$

Не уменьшая общности, можно считать, что для всех $r>1$

$$N(r)\leqslant \Delta(1+\varepsilon)\, V(r),$$

где ε — некоторое положительное число.

Далее, $N(er)\geqslant n(r)$, а также

$$V(er)=o\left(V_1(r)\right),\quad V(\varepsilon r)=o\left(V_2(r)\right). \tag{6.8}$$

Тогда

$$\ln|f_r^{(1)}(re^{i\varphi})| = \frac{1}{\rho} r^\rho \sum_{a_k\leqslant r} a_k^{-\rho}\cos\rho\varphi = \frac{1}{\rho} r^\rho \cos\rho\varphi \int_1^r \frac{dn(t)}{t^\rho} =$$

$$= \frac{1}{\rho}\cos\rho\varphi \left\{ \frac{n(r)}{r^\rho} + \int_1^r \frac{dN(t)}{t^\rho} \right\} = \frac{1}{\rho} r^\rho \cos\rho\varphi \left\{ \frac{n(r)}{r^\rho} + \right.$$

$$\left. +\rho\left(\frac{N(r)}{r^\rho}+\rho\int_1^r \frac{N(t)}{t^{\rho+1}}\,dt\right)\right\} = \frac{1}{\rho} r^\rho \cos\rho\varphi \left\{ \frac{n(r)}{r^\rho} + \right.$$

$$\left. +\rho\,\frac{N(r)}{r^\rho}+\rho^2\int_1^r \frac{N(t)}{t^{\rho(t)}}\, t^{\rho(t)-\rho-1}\,dt \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\rho}\cos^+\rho\varphi \left\{ \Delta(1+\varepsilon)\, V(er)+\rho\Delta(1+\varepsilon)\, V(r)+\rho^2\Delta(1+\varepsilon)\, V_1(r) \right\} =$$

$$= \frac{1}{\rho}\cos^+\rho\varphi \left\{ o\left(V_1(r)\right)+\rho^2\Delta(1+\varepsilon)\, V_1(r) \right\}.$$

Отсюда, учитывая неравенства для $f_r^{(2)}$ и $f_3^{(3)}$, получаем

$$h_1(\varphi)\leqslant \rho(1+\varepsilon)\,\Delta\cos^+\rho\varphi.$$

В силу произвольной малости ε имеем

$$h_1(\varphi)\leqslant \rho\Delta\cos^+\rho\varphi.$$

Пусть теперь $\rho(r)\in C$ и $\alpha(f)=0$. Запишем $f(z)$ в виде $(r>1)$

$$f(z)=f_r^{(4)}(z)\cdot f_r^{(2)}(z), \tag{6.6'}$$

где

$$f_r^{(4)}(z)=\exp\left\{ -\frac{1}{\rho} z^\rho \sum_{a_k>r} a_k^{-\rho} \right\},$$

а $f_r^{(2)}(z)$ определяется формулой (6.6), но вместо $Q(z)$ стоит $P(z)$ — многочлен степени не выше $\rho-1$.

Так как

$$\ln M\left(r,\ \exp P(z)\right)\leqslant K_1 r^{\rho-1},$$

то, учитывая соотношения (6.2) и (6.7), получаем

$$\ln M\left(r, f_r^{(2)}(z)\right)=o\left(V_2(r)\right). \tag{6.9}$$

Фиксируем некоторое значение φ. Для всякого $\varepsilon>0$ найдется $r_0=r_0(\varepsilon)$, такое, что для всех $r>r_0$ выполняется $N(r)\leqslant(1+\varepsilon)\,\Delta\, V(r)$. Тогда $(r>r_0)$

$$\ln|f_r^{(4)}(re^{i\varphi})| = -\frac{1}{\rho} r^\rho\cos\rho\varphi \sum_{a_k>r} a_k^{-\rho} = -\frac{1}{\rho} r^\rho\cos\rho\varphi \int_r^\infty \frac{dn(t)}{t^\rho} =$$

$$= \frac{1}{\rho} r^\rho\cos\rho\varphi \left\{ \frac{n(r)}{r^\rho} - \rho\int_r^\infty \frac{n(t)}{t^{\rho+1}}\,dt \right\} =$$

$$= \frac{1}{\rho} r^\rho \cos \rho\varphi \left\{ \frac{n(r)}{r^\rho} + \rho \frac{N(r)}{r^\rho} - \rho^2 \int_r^\infty \frac{N(t)}{t^{\rho+1}} dt \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\rho} \cos^+ \rho\varphi \left\{ n(r) + \rho N(r) \right\} + \rho r^\rho \cos^- \rho\varphi \int_r^\infty \frac{N(t)}{t^{\rho(t)}} t^{\rho(t)-\rho-1} dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\rho} \cos^+ \rho\varphi \left\{ (1+\varepsilon) \Delta V(er) + \rho(1+\varepsilon) \Delta V(r) \right\} + \rho \cos^- \rho\varphi (1+\varepsilon) \Delta V_2(r).$$

Отсюда, учитывая (6.2), (6.8) и (6.9), находим

$$\ln |f(re^{i\varphi})| \leqslant o\left(V_2(r)\right) + \rho \cos^- \rho\varphi (1+\varepsilon) \Delta V_2(r)$$

и

$$h_2(\varphi) \leqslant \rho \cos^- \rho\varphi (1+\varepsilon) \Delta V_2(r).$$

В силу произвольной малости ε, имеем

$$h_2(\varphi) \leqslant \Delta\rho \cos^- \rho\varphi.$$

Таким образом первая часть теоремы 2 доказана.

Замечание. В конце статьи 4 доказано следующее утверждение. Если функция $f(z)$ порядка нуль и уточненный порядок $\rho(r) \to 0$ такой, что $V(r)$, монотонно возрастая, стремится к ∞, то

$$h(\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln |f(re^{i\varphi})|}{V(r)} \equiv \Delta,$$

где

$$\Delta = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{Nf(r)}{V(r)}.$$

Докажем теперь, соотношение (6.4). Последовательность $\{\varphi_k\}$ выбирается так же, как в § 5. Последовательность $1 < R_1 < R_2 < \ldots$ возьмем столь быстро возрастающей, чтобы выполнялись следующие условия:

$$L_1(R_k) = o\left(L_1(R_{k+1})\right), \tag{6.10}$$

$$V(R_k) = o\left(V(R_{k+1})\right). \tag{6.11}$$

Не уменьшая общности, можем считать, что $t = V(r)$ — строго монотонно возрастающая функция на $[1, \infty)$ (см. [2]). Пусть $r = \varphi(t)$ — функция, обратная к функции $t = V(r)$. Введем множество J индексов k, удовлетворяющих неравенству $\cos^+ \rho\varphi_k > 0$. Построим каноническое произведение $f(z)$ рода ρ с простыми нулями во всех точках $\varphi\left(\frac{l}{\rho\Delta}\right)$ при

$$R_k < \varphi\left(\frac{l}{\rho\Delta}\right) \leqslant R_{k+1}, \quad \text{где} \quad l = 1, 2, 3, \ldots \quad \text{и} \quad k \in J.$$

Обозначим через $n_k(r)$ число нулей функции $f(z)$ на пересечении $[0, r]$ с отрезком $[R_k, R_{k+1}]$. Легко видеть, что $n_k(r) = E[\rho\Delta V(r)] - E[\rho\Delta V(R_k)]$, если $k \in J$ и $n_k(r) = 0$, если $k \bar{\in} J$, а также $n(r) \leqslant \rho\Delta V(r)$.

Из неравенства (2.7) следует, что каноническое произведение $f(z)$ будет абсолютно сходящимся. Используя известные свойства уточненного порядка, легко показать, что

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N_J(r)}{V(r)} \leqslant \Delta. \tag{6.13}$$

Ниже будет показано, что в соотношении (6.4) имеет место неравенство $\geqslant$, не исключая априори возможности $\ln M(r, f)=o\left(V_1(r)\right)$, а из него тогда сразу будет следовать, что равенство $\ln M(r, f)=o\left(V_1(r)\right)$ невозможно. Следовательно, функция $f(z)$ принадлежит среднему типу относительно $V_1(r)$, а значит, $f(z)$ имеет порядок ρ.

Покажем, что для функции $f(z)$ выполняется соотношение (1.4). Зафиксируем $\tilde{\varphi}_m$, пусть $\varphi_{k_l}=\tilde{\varphi}_m$ $(l=1, 2, 3, \ldots)$. Мы укажем последовательность r_{k_l} такую, что

$$\lim_{l\to\infty} \frac{\ln\left|f\left(r_{k_l}e^{i\tilde{\varphi}_m}\right)\right|}{V_1\left(r_{k_l}\right)} \geqslant \rho\Delta\cos^+\rho\tilde{\varphi}_m. \tag{6.14}$$

Отсюда следует, что при $\varphi=\tilde{\varphi}_m$ справедливо $h_1(\varphi)\geqslant\rho\Delta\cos^+\rho\tilde{\varphi}_m$. В силу непрерывности обеих частей этого неравенства по φ и плотности множества $\{\tilde{\varphi}_m\}$ всюду в $[0, 2\pi)$, учитывая первую часть теоремы 2, получим (6.4).

Для упрощения записи всюду ниже вместо k_l будем писать k. Запишем (см. (6.6))

$$f(z)=f^{(2)}_{R_{k+1}}(z)\, f^{(3)}_{R_{k+1}}(z). \tag{6.15}$$

Пусть $\lambda>\mu>1$. Используя теорему Валирона (см. [6] и [4], стр. 344), можем утверждать: существует r_k такое, что $R_k<\frac{R_{k+1}}{\lambda}<r_k<\frac{R_{k+1}}{\mu}$, и при $|z|=r_k$ выполняется

$$\ln\left|f^{(3)}_{R_{k+1}}(z)\right|>-H\ln M\left(R_{k+1}, f^{(3)}_{R_{k+1}}\right), \tag{6.16}$$

где H — положительная постоянная, зависящая только от λ и μ.

Так как (см. (6.7)) $\ln M\left(R_{k+1}, f^{(3)}_{R_{k+1}}\right)<KV(R_{k+1})$, то при $|z|=r_k$ справедливо неравенство

$$\ln\left|f^{(3)}_{R_{k+1}}(z)\right|>-HKV(R_{k+1}).$$

Из (6.15) получаем, что

$$\ln\left|f(r_k e^{i\varphi_k})\right|>\frac{1}{\rho}\, r_k^\rho\cos\rho\varphi_k \sum_{a_\nu<R_{k+1}} a_\nu^{-\rho}-HKV(R_{k+1})\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{\rho}\, r_k^\rho\cos^+\rho\varphi_k \sum_{R_k<a_\nu\leqslant R_{k+1}} a_\nu^{-\rho}-\frac{1}{\rho}\, r_k^\rho \sum_{a_\nu\leqslant R_k} a_\nu^{-\rho}-HKV(R_{k+1}). \tag{6.17}$$

Но

$$\sum_{R_k\leqslant a_\nu\leqslant R_{k+1}} a_\nu^{-\rho}=\int_{R_k}^{R_{k+1}}\frac{dn_k(t)}{t^\rho}+\int_{R_k}^{R_{k+1}}\frac{dE[\Delta\rho\, t^{\rho(t)}]}{t^\rho}\geqslant-\Delta\rho R_k^{\rho(R_k)-\rho}+$$

$$+\rho^2\Delta\int_{R_k}^{R_{k+1}} t^{\rho(t)-\rho-1}\,dt-\rho\int_{R_k}^{R_{k+1}} t^{-\rho-1}\,dt\geqslant-\rho\Delta L(R_k)+$$

$$+\rho^2\Delta\left(L_1(R_{k+1})-L_1(R_k)\right)-R_k^{-\rho}. \tag{6.18}$$

Аналогично

$$\sum_{a_\nu < R_k} a_\nu^{-\rho} = \int_1^{R_k} \frac{dn(t)}{t^{\rho+1}} = \frac{n(R_k)}{R_k^\rho} + \rho \int_1^{R_k} \frac{n(t)}{t^{\rho+1}}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \rho\Delta L(R_k) + \rho^2 \Delta L_1(R_k). \tag{6.19}$$

Так как $L_1(r)$ является медленно возрастающей функцией, то

$$\lim_{k\to\infty} \frac{L_1(r_k)}{(L_1 R_{k+1})} = 1$$

и из равенств (6.10) и (6.11) следует, что

$$\left.\begin{aligned} &L_1(R_k) = o\left(L_1(r_k)\right), \\ &L(R_k) = o\left(L_1(r_k)\right), \\ &L_1(R_{k+1}) = (1+\eta_k) L_1(r_k), \quad \eta_k \to 0 \quad \text{при} \quad k\to\infty. \end{aligned}\right\} \tag{6.20}$$

Подставляя в неравенство (6.17) оценки (6.18) и (6.19) и учитывая соотношения (6.20), получим, что

$$\ln\left|f(r_k e^{i\varphi_k})\right| \geqslant \frac{1}{\rho} r_k^\rho \cos^+ \rho\varphi_k \left\{ -\rho\Delta L(R_k) + \rho^2\Delta\left(L_1(R_{k+1}) - L_1(R_k)\right) - R^{-\rho} \right\} -$$

$$- \frac{1}{\rho}\left\{ \Delta\rho L(R_k) + \rho^2 \Delta L_1(R_k) - HKV(R_{k+1}) \right\} \geqslant$$

$$\geqslant \rho\Delta \cos^+ \rho\varphi_k (1+\eta_k) L_1(r_k) - HK\lambda^\rho r_k^\rho L(R_{k+1}) - \frac{1}{\rho} r_k^\rho R_k^{-\rho} - o\left(r_k^\rho L_1(r_k)\right) =$$

$$= \rho\Delta \cos^+ \rho\varphi_k (1+\eta_k)\, V_1(r_k) - o\left(V_1(r_k)\right).$$

Отсюда следует неравенство (6.14). Тем самым для случая $\rho(r)\in D$ теорема 2 доказана.

Пусть теперь $\rho(r)\in C$. Доказательство проводится в основном так же, как и для случая $\rho(r)\in D$.

При определении последовательности R_k условие (6.10) следует заменить условием

$$L_2(R_{k+1}) = o\left(L_2(R_k)\right). \tag{6.21}$$

Множество J теперь составим из индексов k, для которых $\cos^- \rho\varphi_{k-1} > 0$. За $f(z)$ возьмем каноническое произведение рода $\rho - 1$ с простыми нулями во всех точках вида $\varphi\left(\frac{l}{\rho\Delta}\right)$ при $R_k < \varphi\left(\frac{l}{\rho\Delta}\right) < R_{k+1}$, где $l = 1, 2, 3, \ldots$ и $k\in J$.

Запишем $f(z)$ в виде (см. (6.6) и (6.6′))

$$f(z) = \prod_\nu E\left(\frac{z}{a_\nu}, \rho - 1\right) = f^{(4)}_{R_{k+1}}(z)\, f^{(3)}_{R_{k+1}}(z). \tag{6.22}$$

Точно так, как выше, показывается, что $f(z)\in G(\Delta)$, а затем задача сводится к доказательству неравенства

$$\lim_{l\to\infty} \frac{\ln\left| f\left(r_{k_l} e^{i\tilde\varphi_m}\right)\right|}{V_2(r_{k_l})} \geqslant \rho\Delta \cos^- \rho\tilde\varphi_m, \tag{6.23}$$

где r_{k_l} выбирается, как и раньше, так, чтобы при $|z|=r_{k_l}$ выполнялось неравенство (6.16). Снова будем опускать индекс l. Из (6.23) получаем, что

$$\ln\left|f(r_k e^{i\varphi_k})\right| > -\frac{1}{\rho} r_k^\rho \cos\rho\varphi_k \sum_{R_{k+1}<a_\nu} a_\nu^{-\rho} - KHV(R_{k+1}) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\rho} r_k^\rho \cos^-\rho\varphi_k \sum_{R_{k+1}<a_\nu\leqslant R_{k+2}} a_\nu^{-\rho} - \frac{1}{\rho} r_k^\rho \sum_{R_{k+2}<a_\nu} a_\nu^{-\rho} - HKV(R_{k+1}).$$

Далее,

$$\sum_{R_{k+1}<a_\nu\leqslant R_{k+2}} a_\nu^{-\rho} = \int\limits_{R_{k+1}}^{R_{k+2}} \frac{dn_{k+1}(t)}{t^\rho} = \int\limits_{R_{k+1}}^{R_{k+2}} \frac{dE[\Delta\rho\, t^{\rho(t)}]}{t^\rho} \geqslant$$

$$\geqslant -\Delta\rho R_k^{\rho(R_{k+1})-\rho} + \rho^2\Delta \int\limits_{R_{k+1}}^{R_{k+2}} t^{\rho(t)-\rho-1}\,dt - \rho \int\limits_{R_{k+1}}^{R_{k+2}} t^{-\rho-1}\,dt \geqslant$$

$$\geqslant -\Delta\rho L(R_{k+1}) + \rho\Delta\left(L_2(R_{k+1}) - L_2(R_{k+2})\right) - R_{k+1}^\rho,$$

а также

$$\sum_{a_\nu > R_{k+2}} a_\nu^{-\rho} = \int\limits_{R_{k+2}}^{\infty} \frac{dn(t)}{t^\rho} \leqslant \rho \int\limits_{R_{k+2}}^{\infty} \frac{n(t)}{t^{\rho+1}}\,dt \leqslant \rho^2\Delta L_2(R_{k+2}).$$

Учитывая (6.21), заключаем, что

$$L_2(R_{k+2}) = o\left(L_2(R_{k+1})\right) = o\left(L_2(r_k)\right),$$

$$L(R_{k+1}) = o\left(L_2(R_{k+1})\right) = o\left(L_2(r_k)\right),$$

$$L_2(R_{k+1}) = (1+\eta_k')\,L_2(r_k), \quad \eta_k' \to 0 \quad \text{при} \quad k\to\infty.$$

Отсюда, как раньше, получаем, что

$$\ln\left|f\left(r_k e^{i\tilde{\varphi}_m}\right)\right| > -\Delta L(R_{k+1})\,r_k^\rho + \rho\Delta r_k^\rho \cos^-\rho\varphi_k L_2(R_{k+1}) -$$

$$-\Delta L_2(R_{k+2})\,r_k^\rho - R_{k+1}^{-\rho} r_k^\rho - \rho\Delta L_2(R_{k+2})\,r_k^\rho - HK\lambda^\rho r_k^\rho L(R_{k+1}) =$$

$$= (1+\eta_k')\,\rho\Delta r_k^\rho \cos^-\rho\varphi_k L_2(r_k) - o\left(r_k^\rho L_2(r)\right)$$

и, наконец, неравенство (6.23). Таким образом, теорема 2 полностью доказана.

г. Львов

Поступило в редакцию
1.IX.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, Москва, Гостехиздат, 1956.
2. А. А. Гольдберг, Экстремальный индикатор для целой функции с положительными нулями, Сибирск. матем. журнал, 3 (1962), 170—177.
3. А. А. Гольдберг, Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций. I, Матем. сб. 58 (100) (1962), 289—334.
4. А. А. Гольдберг, Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций. II, Матем. сб., 61 (103) (1963), 334—349.

5. Р. Неванлинна, Однозначные аналитические функции, Москва—Ленинград, 1941.
6. Н. Г. Чеботарев и Н. Н. Мейман, Проблема Рауса-Гурвица для полиномов и целых функций, Труды Матем. ин-та. им. В. А. Стеклова, т. XXVI (1949).

SVEIKOS FUNKCIJOS SU TEIGIAMAIS NULIAIS EKSTREMALINIS INDIKATORIUS

A. KONDRATIUK

(Reziumė)

Sakykime, $f(z)$ — ϱ eilės, $0<\varrho<\infty$, sveika funkcija su teigiamais nuliais,

$$\Delta = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N(r, 0, f)}{r^{\rho(r)}},$$

kur $N(r, o, f)$ — Nevanlino nulių skaičiaus funkcija, o
$\varrho(r)$ — tam tikra patikslinta eilė, $0<\Delta<\infty$. Straipsnyje gautas tikslus indikatoriaus įvertinimas:

$$h(\varphi, f) \leqslant H\left(\varphi, \Delta, \rho(r)\right).$$

Tam tikrai nurodytos klasės sveikai funkcijai $f_0(z)$ —

$$h(\varphi, f_0) \equiv H\left(\varphi, \Delta, \rho(r)\right).$$

EIN EXTREMALINDIKATOR FÜR DIE GANZEN FUNKTIONEN MIT POSITIVEN NULLSTELLEN

A. KONDRATJUK

(Zusammenfassung)

Es sei $f(z)$ eine ganze Funktion der Ordnung ϱ, $o<\varrho<\infty$, mit positiven Nullstellen,

$$\Delta = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N(r, 0, f)}{r^{\rho(r)}},$$

wo $N(r, o, f)$ die Nevanlinnasche Anzahlfunktion und $\varrho(r)$ eine verfeinerte Ordnung sind. Im Artikel wird eine exakte Abschätzung von oben $h(\varphi, f) \leqslant H\left(\varphi, \Delta, \rho(r)\right)$ für Indikatoren gegeben. Für eine gewisse Funktion $f_0(z)$ aus der angedeuteten Klasse gilt

$$h(\varphi, f_0) \equiv H\left(\varphi; \Delta, \rho(r)\right).$$