LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 1, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 1, 1967

БИГАРМОНИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ ПУАССОНА

В. А. ПЕТРОВ

Бигармоническая в круге $|z|<1$ функция $u(z)$, удовлетворяющая на C $\{|z|=1\}$ граничным условиям:

$$u\Big|_C=f(t);\quad \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_C=0,$$

где $f(t)$ — непрерывная функция, как известно, [1] имеет следующий вид:

$$u(re^{i\Theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\frac{(1-r^2)^2\,[1-r\cos(t-\Theta)]}{[1-2r\cos(t-\Theta+r^2]^2}\,dt. \qquad (1)$$

Такие функции представляют интерес для некоторых задач теории упругости; их изучал, например, С. Каниев [2].

Пусть $f(t)\in L(0,\ 2\pi)$. Рассмотрим функцию $u(z)$, определенную через $f(t)$ по формуле (1), которую назовем *бигармоническим интегралом Пуассона.* В настоящей заметке на бигармонический интеграл Пуассона будут перенесены широко известные теоремы Фату об интеграле Пуассона [3].

1. **Теорема 1.** *Если $f(t)$ — комплекснозначная функция в L^p на единичной окружности, $1\leqslant p<\infty$, то функция $u(z)$, определенная через $f(t)$ по формуле* (1), *бигармонична в открытом круге, а при $r\to 1$ функции $u_r(\Theta)=$ $=u(re^{i\Theta})$ сходятся к $f(t)$ по L^p-норме. Если $f(t)$ непрерывна на единичной окружности, то $u_r(\Theta)$ сходятся к $f(t)$ равномерно.*

Действительно, так как

$$\Pi(r,\ t-\Theta)=\frac{(1-r^2)^2\,[1-r\cos(t-\Theta)]}{[r^2-2r\cos(t-\Theta)+1]^2}=$$

$$=(r^2-1)\,\frac{-r}{2}\,\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{1-r^2}{r^2-2r\cos(t-\Theta)+1}+\frac{1-r^2}{r^2-2r\cos(t-\Theta)+1}, \qquad (2)$$

то формулу (1) можно, очевидно, переписать в виде

$$u(re^{i\Theta})=(r^2-1)\,\frac{-r}{2}\,\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cdot P(r,\ t-\Theta)\cdot dt+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cdot P(r,\ t-\Theta)\,dt,$$

где

$$P(r,\ t-\Theta)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\Theta)+r^2}.$$

Но функции

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cdot P(r,\ t-\Theta)\,dt \quad \text{и} \quad \varphi(z)=-\frac{r}{2}\,\frac{\partial}{\partial r}\,\psi(z),$$

как известно, гармоничны в круге $|z|<1$ — следовательно, для функции $u(z)$ мы получили представление

$$u(z)=(r^2-1)\,\varphi(z)+\psi(z).$$

А это в силу известной теоремы Алманси и означает (см., например, [1], стр. 408), что функция $u(z)$ бигармонична в открытом единичном круге.

Для доказательства второй части теоремы воспользуемся тем свойством, что свертка

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cdot K_n(x-t)\,dt$$

сходится равномерно к g, если g непрерывна, и сходится к g по L^p-норме, если $g\in L^p$ в случае, когда K_n есть аппроксимативная единица для L^1 (см. [4], стр. 41). Поэтому, нам достаточно заметить, что семейство функций $\{\Pi_r=\Pi(r,\ \Theta)\}$, $0\leqslant r<1$, есть аппроксимативная единица для L^1 на окружности. Но для $\Pi_r(\Theta)$ выполнены следующие условия:

I. $\Pi_r(\Theta)\geqslant 0$; $\Pi_r(\Theta)$ непрерывна на окружности.

II. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Pi_r(\Theta)\,d\Theta=1$, $0\leqslant r<1$, потому, что этот интеграл есть значение бигармонической функции $u\equiv 1$ в точке $z=r$ (см. формулу (1)).

III. Если $0<\delta<\pi$, то $\lim\limits_{r\to 1}\sup\limits_{|\Theta|\geqslant\delta}|\Pi_r(\Theta)|=0$, в чем легко убедиться из (2), приняв во внимание оценку [5]

$$\left|\frac{\partial P}{\partial r}\right|\leqslant\frac{c}{1-r^2+\Theta^2}\quad\text{при}\quad r>\frac{1}{2},$$

которая при $\delta<|\Theta|<\pi$ дает

$$\left|\frac{\partial P}{\partial r}\right|\leqslant\frac{c}{\delta^2}=M. \tag{3}$$

Следовательно (см. [4], стр. 34), $\{\Pi_r\}$ действительно аппроксимативная едидиница. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если функция $f(\Theta)$ в (1) при $\Theta=\Theta_0$ непрерывна, то $u(r,\ \Theta)\to f(\Theta_0)$ при стремлении $z=re^{i\Theta}$ любым образом из $|z|<1$ к точке $e^{i\Theta_0}$.*

Доказательство. Для заданного $\varepsilon>0$ выбираем δ, $0<\delta<\pi$, такое, что при $|t-\Theta_0|<\delta$ имеем $|f(t)-f(\Theta_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$, и пусть $|\Theta-\Theta_0|<\frac{\delta}{2}$. В силу свойства (II) ядра $\Pi(r,\ t-\Theta)$ имеем

$$u(r,\ \Theta)-f(\Theta_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[f(t)-f(\Theta_0)]\cdot\Pi(r,\ t-\Theta)\,dt. \tag{4}$$

Разобьем интеграл (4) на два интеграла I_1 и I_2, взятые соответственно по дуге $(\Theta_0-\delta,\ \Theta_0+\delta)$ и по дополнительной дуге Δ на $|z|=1$. Приняв во внимание свойства I и II, получаем

$$|I_1|\leqslant\frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{\Theta_0-\delta}^{\Theta_0+\delta}\Pi(r,\ t-\Theta)\,dt\leqslant\frac{\varepsilon}{4\pi}\int_0^{2\pi}\Pi(r,\ t-\Theta)\,dt=\frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Пусть теперь $t\in\Delta$. Тогда $|t-\Theta|>\frac{\delta}{2}$, и при $r>\frac{1}{2}$ из (2) и (3) вытекает неравенство

$$|I_2|\leqslant\left[\frac{1}{1-2r\cos\frac{\delta}{2}+r^2}-\frac{M}{2}\right](1-r^2)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{\Delta}|f(t)|\cdot dt. \tag{6}$$

Но $\int\limits_{\Delta} |f(t)|\,dt \leqslant \int\limits_{0}^{2\pi} |f(t)|\,dt < \infty$ в силу абсолютной интегрируемости $f(t) \in L$.

Поэтому (6) показывает, что $I_2 \to 0$ при $r \to 1$, то есть, существует $\eta > 0$ такое, что при $r > 1-\eta$ справедливо неравенство $|I_2| < \frac{\varepsilon}{2}$. Так что при $r > 1-\eta$ и $|\Theta - \Theta_0| < \frac{\delta}{2}$

$$|u(r, \Theta) - f(\Theta_0)| < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Если $f(t)$ из (1) непрерывна при всех t, то функция $u(z)$, определенная на $|z|=1$ как предел $u(r, \Theta)$ из $|z|<1$, будет непрерывна в $|z| \leqslant 1$ и $u(e^{i\Theta}) = f(\Theta)$.*

Теорема 3. *Если функция $f(\Theta)$ в (1) при $\Theta = \Theta_0$ имеет конечную производную $f'(\Theta_0)$, то $\frac{\partial u(r, \Theta)}{\partial \Theta}$ имеет в точке $e^{i\Theta_0}$ угловое граничное значение, равное $f'(\Theta_0)$.*

Доказательство. Пусть сначала $f(\Theta) = A\Theta + B$, $a < \Theta < a + 2\pi$, и $f(\Theta)$ продолжена периодически. Тогда из (1) получаем

$$\frac{\partial u(r, \Theta)}{\partial \Theta} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{a}^{a+2\pi} f(t) \frac{\partial \Pi(r, t-\Theta)}{\partial \Theta} dt = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{a}^{a+2\pi} f(t) \cdot \frac{\partial \Pi(r, t-\Theta)}{\partial t} dt =$$

$$= -A\Pi(r, a-\Theta) + A.$$

Откуда следует, что при $a < \Theta_0 < a + 2\pi$

$$\lim \frac{\partial u(r, \Theta)}{\partial \Theta} = A, \quad \text{если} \quad re^{i\Theta} \to e^{i\Theta_0},$$

ибо $\lim \Pi(r, a-\Theta) = 0$ при том же условии.

Переходя к общему случаю, обозначим через $u_1(r, \Theta)$ функцию, полученную из (1), если там заменить $f(t)$ на линейную функцию

$$f(\Theta_0) + (t - \Theta_0) \cdot f'(\Theta_0) \quad \text{в } (a, a+2\pi), \; e^{ai} \neq e^{i\Theta_0},$$

и продолженную периодически; по доказанному

$$\frac{\partial u_1(r, \Theta)}{\partial \Theta} \to f'(\Theta_0) \quad \text{при} \quad re^{i\Theta} \to e^{i\Theta_0}. \tag{7}$$

Далее из (1) имеем

$$\frac{\partial u}{\partial \Theta} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} f(t) \cdot \frac{\partial \Pi(r, t-\Theta)}{\partial \Theta} dt, \tag{8}$$

а $\frac{\partial \Pi}{\partial \Theta}$ можно представить в виде

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \Theta} = \frac{2r \sin(t-\Theta)}{1 - 2r\cos(t-\Theta) + r^2} \left[P(r, t-\Theta) \cdot \frac{r^2-1}{2} + 2\Pi(r, t-\Theta)\right]. \tag{9}$$

Теперь из (8) и аналогичного соотношения для $u_1(r, \Theta)$ с учетом (9) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial \Theta} - \frac{\partial u_1}{\partial \Theta} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{a}^{a+2\pi} Q \cdot \left[\frac{f(t) - f(\Theta_0)}{t - \Theta_0} - f'(\Theta_0)\right] \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{r^2-1}{2} P(r, t-\Theta) + 2\Pi(r, t-\Theta)\right] dt, \tag{10}$$

где

$$Q = \frac{2r(t-\Theta_0)\sin(t-\Theta_0)}{1-2r\cos(t-\Theta)+r^2}.$$

Множитель Q при $re^{i\Theta}$, достаточно близком к $e^{i\Theta_0}$ и лежащем в некотором угле Штольца с вершиной $e^{i\Theta_0}$, как легко показать (см., например, [6], стр. 420), ограничен относительно t, $a<t<a+2\pi$, некоторым числом Q_0. Поэтому из (10) получаем

$$\left|\frac{\partial u}{\partial\Theta}-\frac{\partial u_1}{\partial\Theta}\right| \leqslant \frac{r^2-1}{2}\cdot\frac{Q_0}{\pi}\int\limits_a^{a+2\pi}\left|\frac{f(t)-f(\Theta_0)}{t-\Theta_0}-f'(\Theta_0)\right|\cdot\Pi(r,\ t-\Theta)\,dt+$$

$$+\frac{Q_0}{2\pi}\int\limits_a^{a+2\pi}\left|\frac{f(t)-f(\Theta_0)}{t-\Theta_0}-f'(\Theta_0)\right|\cdot P(r,\ t-\Theta)\,dt. \tag{11}$$

Но к интегралам правой части (11) применимы соответственно теорема 2 и теорема Фату такого же рода для интеграла Пуассона, поскольку подинтегральная функция $\psi(t)=\left|\frac{f(t)-f(\Theta_0)}{t-\Theta_0}-f'(\Theta_0)\right|$ непрерывна в точке Θ_0 в силу существования в этой точке производной $f'(\Theta)$. Итак, с учетом (7) и того факта, что $\psi(\Theta_0)=0$, наконец получаем

$$\lim\frac{\partial u}{\partial\Theta}=\lim\frac{\partial u_1}{\partial\Theta}=f'(\Theta_0) \quad \text{при} \quad re^{i\Theta}\to e^{i\Theta_0}.$$

Теорема 4. *Если в* (1) *функция* $f(\Theta)$ *при* $\Theta=\Theta_0$ *конечна и равна производной своего неопределенного интеграла, то есть при* $\Theta=\Theta_0$

$$\frac{d}{d\Theta}\int\limits_0^{\Theta} f(\Theta)\,d\Theta=f(\Theta),$$

то $u(r,\ \Theta)$ *имеет в точке* $e^{i\Theta_0}$ *угловое граничное значение, равное* $f(\Theta_0)$.

Доказательство в силу отмеченных выше свойств ядра $\Pi(r,\ t-\Theta)$ представляет собой дословное повторение рассуждений для соответствующей теоремы об интеграле Пуассона, если там всюду вместо $P(r,\ t-\Theta)$ писать $\Pi(r,\ t-\Theta)$.

Очевидно, из предыдущего предложения вытекает такая

Теорема 5. *Бигармонический интеграл Пуассона* (1) *почти всюду на единичной окружности имеет угловые граничные значения, равные* $f(\Theta)$.

2. Теорема 5 может оказаться полезной при изучении некоторых граничных свойств гармонических и аналитических функций.

Теорема 6. *Пусть гармоническая в единичном круге функция* $u(z)$ *представима интегралом Пуассона*

$$u(re^{i\Theta})=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}u(t)\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\Theta)+r^2}\,dt,$$

где $u(t)\subset L(0,\ 2\pi)$. *Тогда функция*

$$v(z)=(1-r)\cdot\frac{\partial u(z)}{\partial r}$$

почти всюду на единичной окружности $|z|=1$ *имеет угловые граничные значения, равные нулю.*

Действительно,

$$\frac{r}{2}(1+r)\cdot v(re^{i\Theta})=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}u(t)\cdot P(r,\ t-\Theta)\,dt-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}u(t)\cdot\Pi(r,\ t-\Theta)\,dt,$$

и по применении теоремы 5, а также теоремы Фату о гармоническом интеграле Пуассона справедливость нашего утверждения очевидна.

Теорема 7. *Пусть в круге* $|z|<1$ *задан интеграл Коши*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi}\frac{f(t)}{t-z}\,dt,\qquad f(t)\in L.$$

Функция

$$(1-r)\cdot f'(z)$$

почти всюду на единичной окружности имеет угловые граничные значения, равные нулю.

Действительно, согласно теореме Г. М. Фихтенгольца ([7], стр. 97) функцию $f(z)$ можно представить в виде интеграла Пуассона

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(t)\cdot P(r,\ t-\Theta)\,dt=u(z)+iv(z),$$

где

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\operatorname{Re}f(t)\cdot P(r,\ t-\Theta)\,dt,$$

$$v(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\operatorname{Im}f(t)\cdot P(r,\ t-\Theta)\,dt.$$

Так как далее

$$f'(z)=e^{-i\Theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\,\frac{\partial v}{\partial r}\right),$$

то теорема 7 является, очевидно, следствием из теоремы 6.

Замечание. Теорема 7 является частным случаем одной более общей теоремы Е. П. Долженко, установленной им другими средствами.

3. Пусть $\alpha(t)$ — функция ограниченной вариации в $(0,\ 2\pi)$. Функцию

$$u(r,\ \Theta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Pi(r,\ t-\Theta)\,d\alpha(t) \tag{12}$$

назовем *бигармоническим интегралом Пуассона—Стилтьеса.* Точно также, как и выше, можно убедиться, что эта функция бигармонична в единичном круге, а также имеет место

Теорема 8. *Бигармонический интеграл Пуассона—Стилтьеса* (12) *почти всюду на единичной окружности имеет угловые граничные значения, равные* $\alpha'(t)$.

В самом деле, поскольку $\alpha(t)$ почти всюду в $(0,\ 2\pi)$ имеет конечную производную, то теорема 8 является непосредственным следствием из следующего утверждения.

Теорема 9. *Если в* (12) *функция* $\alpha(t)$ *имеет при* $\Theta=\Theta_0$, $0<\Theta_0<2\pi$, *конечную производную, то* $u(r,\ \Theta)\to\alpha'(\Theta_0)$ *при стремлении* $z=re^{i\Theta}$ *из* $|z|<1$ *к* $e^{i\Theta_0}$ *по любому некасательному пути.*

Доказательство. Интегрируя (12) по частям, находим

$$u(re^{i\Theta}) = \frac{1}{2\pi}\,[\alpha(2\pi-0)-\alpha(+0)]\;\Pi(r,\;\Theta) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\alpha(t)\,\frac{\partial}{\partial t}\,\Pi(r,\;t-\Theta)\,dt$$

или

$$u(re^{i\Theta}) = o(1) + \frac{1}{2\pi}\,\frac{\partial}{\partial\Theta}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\alpha(t)\cdot\Pi(r,\;t-\Theta)\,dt\right], \tag{13}$$

так как

$$\Pi(r,\;\Theta) \to 0 \quad \text{при} \quad re^{i\Theta} \to e^{i\Theta}.$$

Но ко второму слагаемому правой части (13) применима в силу условия теорема 3, а потому

$$u(re^{i\Theta}) \to \alpha'(\Theta_0)$$

по любому некасательному пути, что и требовалось доказать.

Смоленский педагогический
институт им. К. Маркса

Поступило в редакцию
1.VIII.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Тихонов и А. А. Самарский, Уравнения математической физики, ГИТТЛ, 1953.
2. С. Каниев, Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений, Доклады Академии Наук СССР, т. 153, № 5, 1963, стр. 995—998.
3. P. Fatou, Series trigonometriques et series Faylor, Acta Math., 30, 1906, 335—400.
4. К. Гофман, Банаховы пространства аналитических функций, ИЛ, 1963.
5. Я. С. Бугров, Свойства полигармонических функций, Известия Академии Наук СССР, т. 22, 1958. стр. 491—514.
6. Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, ГИТТЛ, 1950.
7. И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций, ГИТТЛ, 1950.

BIHARMONINIS PUASONO INTEGRALAS

V. PETROVAS

(Reziumė)

Sakykime $f(t)\in L(0,2\pi)$. Nagrinėjamas biharmoninis Puasono integralas

$$u(re^{i\Theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cdot\frac{(1-r^2)^2\,[1-r\cos(t-\Theta)]}{[1-2r\cos(t-\Theta)+r^2]^2}\,dt$$

ir jam pritaikomos gerai žinomos Fatu teoremos apie Puasono integralą.

DAS BIHARMONISCHE INTEGRAL VON POISSON

V. PETROV

(Zusammenfassung)

Es sei $f(t)\in L(0,2\pi)$. Es wird das biharmonische Integral von Poisson

$$u(re^{i\Theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cdot\frac{(1-r^2)^2\,[1-r\cos(t-\Theta)]}{[1-2r\cos(t-\Theta)+r^2]^2}\,dt$$

betrachtet und auf dieses die weitbekannten Fatouzätze über das Integral von Poisson übertragen.