LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 1, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 1, 1967

ВИД И СВОЙСТВА ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

В. М. ТЕРПИГОРЕВА

Введение

Пусть H_p, $p \geqslant 1$ хорошо известный класс Харди функций $f(z)$, аналитических в единичном круге и таких, что

$$\|f\| = \sup_{0<r<1} \left\{ \int_0^{2\pi} |f(re^{i\Theta})|^p d\Theta \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Через H_p^1 будем обозначать единичную сферу в этом пространстве, т. е. класс функций, для которых $\|f\| \leqslant 1$. Обобщением пространств H_p, $p \geqslant 1$ служат пространства H_M^*, определяемые с помощью выпуклой, неубывающей при $0 \leqslant u < \infty$ функции $M(u)$, удовлетворяющей условию $\frac{M(u)}{u} \geqslant A > 0$. Определим для аналитической при $|z| < 1$ функции $f(z)$ норму Люксембурга для данного r, $0 < r < 1$ следующим образом:

$$\|f\|_{(M)}^r = \inf k$$

по всем $k > 0$, для которых

$$\int_0^{2\pi} M\left[\frac{1}{K} |f(re^{i\Theta})|\right] d\Theta \leqslant 1.$$

(По поводу всех используемых понятий из теории пространств Орлича см. монографию [7].)

Пространство H_M^* состоит из таких функций $f(z)$, для которых

$$\|f\|_{(M)} = \sup_{0<r<1} \|f\|_r < +\infty.$$

Через H_M^1 будем обозначать единичную сферу пространства H_M^*. Класс H_M^{*1} совпадает с классом функций $f(z)$, для которых

$$\int_0^{2\pi} M[|f(re^{i\Theta})|] d\Theta \leqslant 1, \qquad 0 < r < 1.$$

Если $f(z) \in H_M^*$, то она имеет почти всюду на окружности $|\zeta| = 1$ угловые граничные значения $f(\zeta)$, причем $f(\zeta)$ входят в пространство Орлича L_M^*, построенные на окружности $|\zeta| = 1$. Подробнее о свойствах функций классов H_M^* можно прочитать в статье [8]. Пусть $v(\zeta)$, заданная на окружности $|\zeta| = 1$ функция, принадлежащая пространству Орлича L_N^*, определяемому дополнительной к $M(u)$ — функцией $N(u)$. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\sup_{f \in H_M^1} \left| \int_{|\zeta|=1} f(\zeta) \cdot v(\zeta) d\zeta \right|. \tag{1}$$

Свойства экстремальных функций в этой задаче для классов H_p^1, $p \geqslant 1$, исследовались во многих работах. Укажем здесь статьи [1]–[6], где получены наиболее полные результаты. Для случая, когда $v(\zeta)$ – рациональная функция, в этих работах был указан вид экстремальной функции $f^*(z)$. В работе [8] мы исследовали экстремальную задачу (1) для классов Орлича H_M^1 и установили, в частности, вид экстремали $f^*(z)$ при рациональной $v(\zeta)$. В настоящей работе, продолжая и систематизируя исследования из [5], [6], мы описываем структуру экстремальной функции $f^*(z)$ в задаче (1) для случая, когда $v(\zeta)$ аналитична на окружности $|\zeta|=1$. Полученные результаты удается затем применить к описанию структуры экстремальных функций и в некоторых нелинейных задачах.

Остановимся специально на классе H_1^1. Рудин и де-Леу в работе [9], дополняя результаты из [2], [3], [6], [10], исследовали весьма подробно свойства экстремальных функций в этом классе при различных предположениях относительно $v(\zeta)$ (в классе H_1^1 экстремальная функция, вообще говоря, не единственна). При аналитической на окружности $|\zeta|=1$ функции $v(\zeta)$ ими было доказано, что все экстремальные функции $f^*(z)$ задачи (1) имеют одинаковое число нулей в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$. Однако, они не дали способа оценить это число нулей. Нами приводятся такие оценки и они применяются опять-таки к нелинейным экстремальным задачам.

Пользуюсь случаем, поблагодарить профессора С. Я. Хавинсона за руководство и помощь.

§ 1. Введем некоторые обозначения: через $M(u)$ и $N(u)$ обозначим, как уже указывалось, дополнительные друг к другу N-функции, через $p(t)$ и $q(t)$ – их правые производные, через $S^{-1}(t)$ – функцию, обратную к функции $S(t)=tp(t)$.

Будем считать $q(t)$ непрерывной функцией.

Теорема 1. *Пусть $v(\zeta)$ аналитическая на окружности $|\zeta|=1$ функция, не являющаяся однако аналитической в целом круге $|z|<1$. Любая функция $f^*(z)$, экстремальная в задаче (1) имеет вид*

$$f^*(z)=e^{i\alpha}\prod_1^n \frac{z-\alpha_i}{1-\bar{\alpha}_i z}\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln S^{-1}[|F(e^{i\Theta})|]\,\frac{e^{i\Theta}+z}{e^{i\Theta}-z}\,d\Theta\right\}, \quad (2)$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – нули $f^*(z)$ в круге $|z|<1$; $F(e^{i\Theta})=F(\zeta)$ некоторая аналитическая на окружности $|\zeta|=1$ функция.

Замечание. Во всех классах H_M^1, кроме H_1^1, экстремальная функция $f^*(z)$ единственна с точностью до множителя $e^{i\alpha}$.

Доказательство. В работе [7] рассматривалась задача, двойственная к задаче (1), и указывалось, что найдется функция $\varphi^*(z)\in H_N^*$ такая, что на окружности $|\zeta|=1$ выполняется соотношение

$$f^*(\zeta)[v(\zeta)-\varphi^*(\zeta)]\zeta=e^{i\alpha}\cdot\frac{1}{k^*}|f^*(\zeta)|\cdot p[|f^*(\zeta)|], \quad (3)$$

где α и $k^*>0$ постоянные числа.

Так как $f^*(z)\in H_M^*$, а $\varphi^*(z)\in H_N^*$, то $f^*(z)\cdot\varphi^*(z)\in H_1$ – как легко следует из неравенства Гёльдера. Поэтому функция $F(z)=f^*(z)\cdot Q(z)$, где

$Q(z)=[v(z)-\varphi^*(z)]z$, входит в класс E_1, в кольце, примыкающем к окружности $|\zeta|=1$, т.е.

$$\int_0^{2\pi} |F(re^{i\Theta})|\,d\Theta \leqslant M < \infty$$

для всех r достаточно близких к единице. Кроме того, соотношение (3) показывает, что $F(z)$ имеет почти везде на окружности $|\zeta|=1$ вещественные угловые значения $F(\zeta)$. Для функций с ограниченным средним модулем справедлив принцип симметрии Римана – Шварца, поэтому $F(z)$ аналитически продолжается через окружность $|\zeta|=1$. Отсюда сейчас же вытекает прежде всего, что $f^*(z)$ имеет конечное число нулей в круге $|z|<1$.

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – нули $f^*(z)$, $\alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_m$ – нули $Q(z)$ в круге $|z|<1$, а $\beta_1, \ldots, \beta_s$ – нули $F(z)$ на окружности $|\zeta|=1$. Положим

$$F_1(z)=F(z):\prod_1^m \frac{z-\alpha_i}{1-\bar{\alpha}_i z},$$

$$F_2(z)=F_1(z):\prod_1^s (z-\beta_j).$$

Для функции $F_2(z)$ вблизи окружности $|\zeta|=1$ выполняется неравенство $|F_2(z)|\geqslant m>0$, и поэтому семейство интегралов

$$\left\{\int_0^{\varphi} \Big|\ln|F_2(re^{i\Theta})|\Big|\,d\Theta\right\}$$

равностепенно абсолютно непрерывно при $r_0<r<1$. Из равенства

$$\ln|F_1(re^{i\Theta})|=\ln|F_2(re^{i\Theta})|+\sum_{j=1}^{s}\ln|re^{i\Theta}-\beta_j|$$

немедленно вытекает равностепенная абсолютная непрерывность семейства интегралов

$$\left\{\int_0^{\varphi} \Big|\ln|F_1(re^{i\Theta})|\Big|\,d\Theta\right\} \tag{4}$$

при $r_0<r<1$.

Но $\ln|F_1(z)|=\ln|f_1(z)|+\ln|Q_1(z)|$, где

$$f_1(z)=f^*(z):\prod_1^n \frac{z-\alpha_i}{1-\bar{\alpha}_i z},$$

$$Q_1(z)=Q(z):\prod_{n+1}^m \frac{z-\alpha_i}{1-\bar{\alpha}_i z}$$

семейство

$$\left\{\int_0^{\varphi} \ln^+|f_1(re^{i\Theta})|\,d\Theta\right\} \tag{5}$$

равностепенно абсолютно непрерывно, ибо $f^*(z)$, а значит и $f_1(z)$ входят в класс D в круге $|z|<1$.

Для функции $Q_1(z)$ имеем

$$\int_0^{2\pi} N[|Q_1(re^{i\Theta})|]\,d\Theta \leqslant C < \infty \qquad (r_0 < r < 1).$$

Из неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим следует для множества $E \subset [0, 2\pi]$

$$\int_E \ln^+ N[|Q_1(re^{i\Theta})|]\,d\Theta \leqslant \operatorname{mes} E \cdot \ln^+ \frac{\int_E N[|Q_1(re^{i\Theta})|]\,d\Theta}{\operatorname{mes} E} \leqslant \operatorname{mes} E \cdot \ln^+ \frac{C}{\operatorname{mes} E},$$

т.е. семейство $\left\{ \int_E \ln^+ N[|Q_1(re^{i\Theta})|]\,d\Theta \right\}$ равностепенно абсолютно непрерывно при $r_0 < r < 1$. Функция $N(u)$ растет не медленнее u, поэтому семейство

$$\left\{ \int_E \ln^+ |Q_1(re^{i\Theta})\,d\Theta \right\} \tag{6}$$

также равностепенно абсолютно непрерывно при $r_0 < r < 1$.

Возьмем равенства

$$\begin{aligned} \ln|f_1(z)| &= \ln^+|f_1(z)| - \ln^-|f_1(z)|, \\ \ln|Q_1(z)| &= \ln^+|Q_1(z)| - \ln^-|Q_1(z)|, \end{aligned} \tag{7}$$

и пусть $\mathfrak{E}$ некоторое множество точек на окружности $|z| = r$, на котором $\ln^-|f_1(z)| \neq 0$. Его можно представить в виде суммы $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 \cup \mathfrak{E}_2$. Здесь $\mathfrak{E}_1$ – множество, на котором выполняется равенство

$$\ln|F_1(z)| = -\ln^-|f_1(z)| + \ln^+|Q_1(z)|,$$

а $\mathfrak{E}_2$ – множество, на котором выполняется равенство

$$\ln|F_1(z)| = -\ln^-|f_1(z)| - \ln^-|Q_1(z)|.$$

На множестве $\mathfrak{E}_1$ имеем:

$$\left| \ln^-|f_1(z)| \right| \leqslant \left| \ln|F_1(z)| \right| + \ln^+|Q_1(z)|,$$

а на множестве $\mathfrak{E}_2$:

$$\left| \ln^-|f_1(z)| \right| \leqslant \left| \ln|F_1(z)| \right|.$$

Из этих неравенств и равностепенной абсолютной непрерывности семейств (4) и (6) получаем равностепенную абсолютную непрерывность семейства

$$\left\{ \int_0^{\varphi} \ln^-|f_1(re^{i\Theta})|\,d\Theta \right\},$$

а в силу (5) и (7) и семейства

$$\left\{ \int_0^{\varphi} \ln|f_1(re^{i\Theta})|\,d\Theta \right\}.$$

Это означает, что гармоническая при $|z| < 1$ функция $\ln|f_1(z)|$ представима интегралом Пуассона через свои граничные значения, а значит $\ln f_1(z)$ – интегралом Шварца. Замечая, что $|f_1(\zeta)| = |f(\zeta)|$ и выражая $|f(\zeta)|$ из (3) через $F(\zeta)$ получим утверждение теоремы.

Замечание. Если $v(\zeta)$ – рациональная функция, то из формулы (2) нетрудно вывести вид экстремальных функций, найденный в [8].

Отметим важный частный случай теоремы 1, когда $M(u)=\frac{u^p}{p}$ с $p\geqslant 1$. В этом случае $S^{-1}(u)=u^{\frac{1}{p}}$, поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln S^{-1}\left[(F_2|e^{i\Theta})|\cdot\prod_{=1}^{s}|e^{i\Theta}-\beta_j|\right]\frac{e^{i\Theta}+z}{e^{i\Theta}-z}\,d\Theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|F_2(e^{i\Theta})|^{\frac{1}{p}}\frac{e^{i\Theta}+z}{e^{i\Theta}-z}\,d\Theta+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\prod_{j=1}^{s}(e^{i\Theta}-\beta_j)^{\frac{1}{p}}\frac{e^{i\Theta}+z}{e^{i\Theta}-z}\,d\Theta.$$

Замечая, что

$$\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|F_2(e^{i\Theta})|^{\frac{1}{p}}\frac{e^{i\Theta}+z}{e^{i\Theta}-z}\,d\Theta\right\}=\Phi(z)$$

есть функция, аналитическая в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$, а

$$\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\prod_{j=1}^{s}|e^{i\Theta}-\beta_j|^{\frac{1}{p}}\frac{e^{i\Theta}+z}{e^{i\Theta}-z}\,d\Theta=\prod_{j=1}^{s}|z-\beta_j|^{\frac{1}{p}}\right.$$

получаем.

Следствие 1. *Любая функция $f^*(z)$, экстремальная в задаче* (1) *для $H_p^1(p\geqslant 1)$ имеет вид*

$$f^*(z)=e^{i\alpha}\cdot\Phi(z)\prod_{i=1}^{n}\frac{z-\alpha_i}{1-\bar{\alpha}_i z}\cdot\prod_{j=1}^{s}(z-\beta_j)^{\frac{1}{p}},\tag{8}$$

где $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n$ нули $f^*(z)$, в $|z|<1$, $|\beta_j|=1$ $(j=1,\ \ldots,\ s)$, $\Phi(z)$ — функция, аналитическая и необращающаяся в нуль в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$.

Следствие 2. *Любая экстремальная функция $f^*(z)$ в задаче* (1) *для H_1^1 будет аналитической в замкнутом круге.*

Как уже указывалось, Рудин и де-Леу в работе (9) показали, что все экстремальные функции $f^*(z)$ задачи (1) для H_1^1 имеют одно и то же число N нулей в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$. Найдем оценку этого числа N в зависимости от $v(\zeta)$. Всякую функцию $v(\zeta)$, аналитическую на $|\zeta|=1$, можно представить в виде $v=v_1+v_2$, где v_1 — функция, аналитическая и ограниченная в $|z|<1$, v_2 — функция, аналитическая вне $|z|<r<1$. Так как

$$\int_{|\zeta|=1}f(\zeta)v(\zeta)d\zeta=\int_{|\zeta|=1}f(\zeta)v_2(\zeta)d\zeta,$$

то достаточно рассмотреть функции $v(z)$, аналитические вне круга $|z|<r$, $r<1$. По теореме Рунге любую такую функцию $v(z)$ можно на окружности $|\zeta|=1$ как угодно близко приблизить рациональными дробями, имеющими полюсы внутри круга $|z|<1$, т. е. для любого $\varepsilon>0$ найдется такая рациональная дробь:

$$v_n(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu_k}{z-z_k}\tag{9}$$

с $|z_k|<1$, что

$$|v(\zeta)-v_n(\zeta)|<\varepsilon,\qquad |\zeta|=1.\tag{10}$$

Обозначим

$$\lambda = \sup_{f \in H_1^1} \Big| \int\limits_{|\zeta|=1} f(\zeta)\, v(\zeta)\, d\zeta \Big|. \tag{11}$$

Наш метод оценки числа N основан на следующей лемме.

Лемма 1. *Пусть функция $v_n(z)$ вида (9) удовлетворяет условию (10) с $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$, где $\delta < \lambda$. Если N — число нулей экстремальной функции $f^*(z)$ задачи (11) в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$. N_1 — число нулей функции $f^*(z)$ в открытом круге $|z| < 1$, то имеет место неравенство*

$$\frac{N + N_1}{2} \leqslant n - 1. \tag{12}$$

Доказательство. Рассмотрим соотношение двойственности

$$\lambda = \sup_{f \in H_1^1} \Big| \int\limits_{|\zeta|=1} f(\zeta)\, v(\zeta)\, d\zeta \Big| = \inf_{\varphi \in H_\infty} \| v - \varphi \|_\infty. \tag{13}$$

Пусть $\varphi^*(z)$ экстремальная функция для правой части равенства. Тогда из равенства (3) с $M(u) = u$ имеем:

$$\Delta \arg [\zeta f^*(\zeta)] = -\Delta \arg [v(\zeta) - \varphi^*(\zeta)] = -\Delta \arg [v(\zeta) - v_n(\zeta) +$$

$$+ v_n(\zeta) - \varphi^*(\zeta)] = -\Delta \arg [v_n(\zeta) - \varphi^*(\zeta)] - \Delta \arg \left[1 + \frac{v(\zeta) - v_n(\zeta)}{v_n(\zeta) - \varphi^*(\zeta)} \right].$$

Кроме того, учитывая (13), из (3) следует, что на $|\zeta| = 1$

$$| v(\zeta) - \varphi^*(\zeta) | = \lambda.$$

Тогда, используя (10) имеем:

$$| v_n(\zeta) - \varphi^*(\zeta) | \geqslant | v(\zeta) - \varphi^*(\zeta) | - | v_n(\zeta) - v(\zeta) | > \frac{\delta}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$\Delta \arg \left[1 + \frac{v(\zeta) - v_n(\zeta)}{v_n(\zeta) - \varphi^*(\zeta)} \right] = 0,$$

т.е.

$$\Delta \arg [\zeta f^*(\zeta)] = -\Delta \arg [v_n(\zeta) - \varphi^*(\zeta)]$$

функция $v_n(z) - \varphi^*(z)$ аналитическая в круге $|z| < 1$, кроме полюсов z_k, число которых n. Если q — число нулей функции $v_n(z) - \varphi^*(z)$ в $|z| < 1$, то

$$\Delta \arg [v_n(\zeta) - \varphi^*(\zeta)] = 2\pi (q - n).$$

С другой стороны

$$\Delta \arg [\zeta f^*(\zeta)] = 2\pi \left(1 + N_1 + \frac{N - N_1}{2} \right) = 2\pi \left(1 + \frac{N_1 + N}{2} \right).$$

Сравнивая два последних равенства, получаем требуемое неравенство (12).

Лемма 2. *Если в задаче (11) $v(\zeta) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{\zeta_k}$, то в качестве n можно взять наименьшее из чисел, для которых выполняется неравенство*

$$\sum_{n+1}^{\infty} |\gamma_k| < \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \sqrt{\int_0^{2\pi} | v(e^{i\Theta}) |^2 d\Theta}.$$

Доказательство. Оценим λ для задачи (11) снизу. Функция

$$f(z) = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\gamma}_k z^{k-1}$$

аналитическая и ограниченная в круге $|z| \leqslant 1$, поэтому $f(z) \in H_1$, а функция

$$f_1(z) = \frac{f(z)}{\|f\|} \in H_1^1.$$

Заметим, что

$$\int\limits_{|\zeta|=1} f(\zeta) v(\zeta) d\zeta = \int\limits_0^{2\pi} |f(e^{i\Theta})|^2 d\Theta = \int\limits_0^{2\pi} |v(e^{i\Theta})|^2 d\Theta,$$

а

$$\|f\| = \int\limits_0^{2\pi} |f| d\Theta \leqslant \sqrt{\int\limits_0^{2\pi} |f(e^{i\Theta})|^2 d\Theta} \cdot \sqrt{\int\limits_0^{2\pi} d\Theta} = \sqrt{2\pi \int\limits_0^{2\pi} |v(e^{i\Theta})|^2 d\Theta},$$

откуда получаем

$$\lambda \geqslant \left| \int\limits_{|\zeta|=1} f_1(\zeta) \cdot v(\zeta) d\zeta \right| = \frac{\int\limits_0^{2\pi} |v(e^{i\Theta})|^2 d\Theta}{\|f\|} \geqslant \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |v(e^{i\Theta})|^2 d\Theta}.$$

Поэтому за δ, указанное в лемме 1, можно взять

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |v(e^{i\Theta})|^2 d\Theta}.$$

Так как на $|\zeta| = 1$ имеем:

$$|v(\zeta) - v_n(\zeta)| = \left| \sum_{n+1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{\zeta^k} \right| \leqslant \sum_{n+1}^{\infty} |\gamma_k|,$$

то достаточно потребовать неравенства

$$\sum_{n+1}^{\infty} |\gamma_k| < \frac{\delta}{2},$$

чтобы выполнялись условия леммы 1. Таким образом, лемма 2 доказана.

Теорема 2. *Если в задаче* (11) *функция* $v(z)$ *аналитическая и ограниченная* $\left(|v(z)| < M\right)$ *вне круга* $|z| < R < 1$, *а* N_1 *и* N *те же, что и в лемме* 1, *то имеет место неравенство*

$$\frac{N+N_1}{2} \leqslant \left[\frac{1}{\ln R} \ln \frac{(1-R)\sqrt{\int\limits_0^{2\pi} |v(e^{i\Theta})|^2 d\Theta}}{2M\sqrt{2\pi}} \right] - 1, \tag{14}$$

где $[A]$, *как обычно, обозначает целую часть числа* A.

Доказательство. Функция $v(z)$ удовлетворяет условиям леммы 2. По неравенству Коши $|\gamma_k| \leqslant M \cdot R^k$, поэтому

$$\sum_{n+1}^{\infty} |\gamma_k| \leqslant M \sum_{n+1}^{\infty} R^k = \frac{M \cdot R^{n+1}}{1-R},$$

Потребуем, чтобы

$$\frac{M \cdot R^{n+1}}{1-R} \leqslant \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \sqrt{\int\limits_0^{2\pi} |v(e^{i\Theta})|^2 d\Theta}.$$

откуда находим наименьшее целое число n, удовлетворяющее этому неравенству

$$n=\left[\frac{1}{\ln R}\ln\frac{1-R}{2M\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{\int\limits_0^{2\pi}|v(e^{i\Theta})|^2 d\Theta}\right].$$

Применяя лемму 1, получаем требуемое неравенство (14).

Оценки, данные в леммах 1, 2 и теореме 2, по-видимому, не являются точными.

§ 2. Перейдем к рассмотрению некоторых нелинейных экстремальных задач. Пусть μ – мера, заданная на компактном подмножестве d круга $|z|\leqslant R<1$. Пусть $M(u)$ – по-прежнему некоторая N – функция. Выясним вопрос об экстремальных функциях задачи

$$\sup_{f\in H_1^1}\int\limits_d M[|f^{(k)}(z)|]d\mu. \tag{15}$$

В частности, если $M(u)=\frac{u^p}{p}$ $(p\geqslant 1)$, то получаем экстремальную задачу

$$\sup_{f\in H_1^1}\int\limits_d |f^{(\alpha)}(z)|^p d\mu. \tag{16}$$

Если в задаче (16) d – область, $k=1$, $p=2$, $d\mu=d\sigma$ – элемент площади, то среди всех функций, принадлежащих H_1^1, мы ищем такие, которые дают максимум площади поверхности Римана, в которую переходит d при отображениях $w=f(z)\in H_1^1$. Если d – спрямляемая кривая, $k=1$, $p=1$, $d\mu=dl$ – элемент длины, то рассматривается задача о максимальной длине образов d при отображениях функциями нашего класса.

Существование экстремальных функций в задаче (15) очевидно в силу компактности пространства H_1^1.

Теорема 3. *Экстремальные функции $f^*(z)$ задачи (15) являются аналитическими в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$. Если N – число нулей любой $f^*(z)$ в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$, а N_1 – число нулей в открытом круге $|z|<1$, то имеет место неравенство*:

$$\frac{N+N_1}{2}\leqslant\left[\frac{1}{\ln\frac{1+R}{2}}\cdot\ln\frac{\pi M\left(\frac{k!}{2\pi}\right)(1-R)^{k+2}}{2^{k+2}p\left(\frac{k!\,2^{k+1}}{(1-R^2)^{k+1}}\right)}\right]-2. \tag{17}$$

Доказательство. Пусть $f^*(z)$ экстремальная для задачи (15) и

$$\lambda=\sup_{f\in H_1^1}\int\limits_d M[|f^{(k)}(z)|]d\mu=\int\limits_d M[|f^k(z)|]d\mu.$$

Рассмотрим линейный функционал:

$$L(f)=\int\limits_d p[f^{*(k)}(z)]\,e^{-i\arg f^k(z)}\cdot f^{(k)}(z)\,d\mu$$

над пространством H_1^1. Обозначим

$$\int\limits_d N\{p[f^{*(k)}(z)]\}d\mu=\eta.$$

Для любой $f(z)\in H_1^k$, по неравенству Юнга, имеем

$$|L(f)|\leqslant \int\limits_d M[|f^{(k)}(z)|]\,d\mu+\int\limits_d N[p\,|f^{*\,(k)}(z)|]\,d\mu\leqslant\lambda+\eta.$$

Если $f=f^*$, то в неравенстве Юнга, в этом случае, будет знак равенства, т. е.

$$|L(f^*)|=\int\limits_d p[|f^{*\,(k)}(z)|]\,d\mu=\lambda+\eta.$$

Следовательно функция $f^*(z)$, будучи экстремальной для задачи (15), будет экстремальной и для задачи

$$\sup_{f\in H_1^k}|L(f)|=\lambda+\eta.$$

Преобразуем $L(f)$, используя формулы Коши

$$f^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^{k+1}},$$

$$L(f)=\int\limits_d\left\{p[|f^{*\,(k)}(z)|]\,e^{-i\arg f^{*\,(k)}(z)}\cdot\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^{k+1}}\right\}d\mu=\int\limits_{|\zeta|=1}f(\zeta)\,v(\zeta)\,d\zeta,$$

где

$$v(\zeta)=\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_d\frac{p[|f^{*\,(k)}(z)|]\,e^{-i\arg f^{*\,(k)}(z)}}{(\zeta-z)^{k+1}}\,d\mu.$$

Так как d содержится в круге $|z|\leqslant R<1$, то функция $v(\zeta)$ аналитическая вне круга $|z|\leqslant R$. Из следствия 2 теоремы 1 заключаем теперь, что $f^*(z)$ аналитическая в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$. Используя лемму 1, найдем оценку числа нулей функции $f^*(z)$. Разложим функцию $v(\zeta)$ в ряд Лорана

$$v(\zeta)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\gamma_j}{\zeta^j},$$

где

$$\gamma_j=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=R_1}v(z)\cdot z^j\,dz,\qquad R_1=\frac{1+R}{2}<1.$$

По известной оценке производной k-го порядка для функций класса H имеем:

$$|f^{(k)}(z)|\leqslant\frac{k!\cdot 2^{k+1}}{(1-|z|^2)^{k+1}}.$$

(См., например, (10), стр. 34).

Тогда для $|\zeta|=R_1$ получаем:

$$|v(\zeta)|\leqslant\frac{k!\,p\left[\dfrac{k!\cdot 2^{k+1}}{(1-R^2)^{k+1}}\right]\cdot 2^{k+1}\cdot\int\limits_d d\mu}{2\pi(1-R)^{k+1}}$$

и

$$|\gamma_j|\leqslant\frac{k!\,p\left[\dfrac{k!\cdot 2^{k+1}}{(1-R^2)^{k+1}}\right]\cdot 2^{k+1}\cdot\int\limits_d d\mu}{2\pi(1-R)^{k+1}}\cdot\left(\frac{1+R}{2}\right)^{j+1}.$$

На $|\zeta|=1$ имеем:

$$|v(\zeta)-v_n(\zeta)|=\left|\sum_{n+1}^{\infty}\frac{\gamma_j}{\zeta^j}\right|\leqslant\sum_{n+1}^{\infty}|\gamma_j|\leqslant\frac{2^{k+2}\cdot k!\,p\left[\dfrac{k!\cdot 2^{k+1}}{(1-R^2)^{k+1}}\right]\cdot\int\limits_d d\mu}{2\pi(1-R)^{k+2}}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{1+R}{2}\right)^{n+2}=\frac{\delta}{2}.$$

Оценим число λ снизу. Функция $f(z)=\frac{z^k}{2\pi}\in H_1^1$ и $f^k(z)=\frac{k!}{2\pi}$. Тогда

$$\lambda > M\left(\frac{k!}{2\pi}\right)\int_d d\mu.$$

Для определения числа n потребуем, чтобы

$$\delta < M\left(\frac{k!}{2\pi}\right)\int_d d\mu < \lambda < \lambda+\eta.$$

Тогда имеем

$$\frac{k!\,2^{k+3}p\left[\frac{k!\cdot 2^{k+1}}{(1-R^2)^{k+1}}\right]\cdot\int_d d\mu}{2\pi(1R^2)^{k+2}}\cdot\left(\frac{1+R}{2}\right)^{n+2} < M\left(\frac{k!}{2\pi}\right)\int_d d\mu.$$

Откуда находим, что

$$n+1=\left[\frac{1}{\ln\frac{1+R}{2}}\ln\frac{\pi M\left(\frac{k!}{2\pi}\right)(1-R)^{k+2}}{2^{k+2}\cdot p\left(\frac{k!\cdot 2^{k+1}}{(1-R^2)^{k+1}}\right)}\right]-2.$$

Применяя лемму 1, получаем требуемое неравенство (17). В частности, для задачи (16) имеем следующую оценку числа нулей экстремальной функции $f^*(z)$:

$$\frac{N+N_1}{2}\leqslant\left[\frac{1}{\ln\frac{1+R}{2}}\cdot\ln\frac{(1-R)^{k+2}(1-R^2)^{(p-1)(k+1)}}{p\cdot\pi^{p-1}\cdot 2^{p(k+2)+1}}\right]-2. \tag{18}$$

Аналогично исследуется более общая экстремальная задача:

$$\sup\int_d M\left[\sum_{k=1}^{s}\gamma_k\cdot f^{(k)}(z)\right]d\mu.$$

Ее экстремальные функции также являются аналитическими в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$.

Рассмотрим еще одну экстремальную задачу.

Построим для функций, заданных на множестве d, используя $M(u)$ и меру μ пространство Орлича $L_M^*(d,\mu)$. Будем обозначать через $\|f\|_{(M)}$ норму по Люксембургу в этом пространстве. Нас интересует следующая задача. Найти

$$\sup_{f\in H_1^1}\|f^{(k)}(z)\|_{(M)}. \tag{19}$$

Теорема 4. *Экстремальные функции $f^*(z)$ задачи (19) являются аналитическими в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$. Если N — число нулей любой $f^*(z)$ в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$, а N_1 — число нулей в открытом круге $|z|<1$, то имеет место неравенство:*

$$\frac{N+N_1}{2}\leqslant\left[\frac{1}{\ln\frac{1+R}{2}}\ln\frac{\|1\|_{(M)}\cdot(1-R)^{k+2}}{2^{k+3}\cdot p\left(\frac{2^{k+3}\cdot\pi}{\|1\|_{(M)}(1-R^2)^{k+1}\int d\mu}\right)}\right]-2. \tag{20}$$

Нам потребуется следующая элементарная лемма.

Лемма. *Если $u(t)\geqslant 0$ ограниченная функция на d, то*

$$\int_d M\left[\frac{u(t)}{\|u\|_{(M)}}\right]d\mu=1.$$

Доказательство. Из определения нормы Люксембурга следует, что

$$\int\limits_d M\left[\frac{u(t)}{\|u\|_{(M)}}\right]d\mu\leqslant 1$$

(см. 7).

Предположим, что $\int\limits_d M\left[\frac{u(t)}{\|u\|_{(M)}}\right]d\mu<1$. Тогда найдется такое $\varepsilon>0$, что

$$\int\limits_d M\left[\frac{u(t)}{\|u\|_{(M)}}\right]d\mu+\varepsilon<1.$$

По условию функция $u(t)$ ограничена, т. е. $u(t)\leqslant A$, поэтому

$$\frac{u}{\|u\|_{(M)}-\delta}-\frac{u}{\|u\|_{(M)}}\leqslant\frac{A\cdot\delta}{\|u\|_{(M)}\cdot(\|u\|_{(M)}-\delta)}=\delta_1.$$

Функция $M\left[\frac{u}{\|u\|_{(M)}}\right]=M(v)$ непрерывна по аргументу v, тогда при достаточно малом δ

$$\int\limits_d M\left[\frac{u}{\|u\|_{(M)}-\delta}\right]d\mu-\int\limits_d M\left[\frac{u}{\|u\|_{(M)}}\right]d\mu\leqslant\varepsilon,$$

т. е

$$\int\limits_d M\left[\frac{u}{\|u\|_{(M)}-\delta}\right]d\mu<1.$$

Получим противоречие с определением нормы Люксембурга. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 3.

Пусть $f^*(z)\in H_1^1$ экстремальная для задачи (19), т. е.

$$\lambda=\sup_{f\in H_1^1}\|f^{(k)}\|_{(M)}=\|f^{*(k)}\|_{(M)}.$$

Рассмотрим линейный функционал:

$$L(f)=\int\limits_d p\left[\frac{|f^{*(k)}(z)|}{\|f^{*(k)}\|_{(M)}}\right]\cdot e^{-i\arg f^{*(k)}(z)}\cdot f^{(k)}(z)\,d\mu.$$

Обозначим

$$\int\limits_d N\left[p\left(\frac{|f^{*(k)}(z)|}{\|f^{*(k)}\|_{(M)}}\right)\right]d\mu=\eta.$$

Для любой $f\in H_1^1$ по неравенству Юнга имеем:

$$|L(f)|\leqslant\|f^{(k)}\|_{(M)}\cdot\left\{\int\limits_d N\left[p\left(\frac{|f^{*(k)}(z)|}{\|f^{(k)}\|_{(M)}}\right)\right]d\mu+\right.$$

$$\left.+\int\limits_d M\left[\frac{|f^{(k)}(z)|}{\|f^{(k)}\|_{(M)}}\right]d\mu\right\}\leqslant\lambda(\eta+1).$$

В силу леммы

$$\int\limits_d M\left[\frac{|f^{(k)}(z)|}{\|f^{(k)}\|_{(M)}}\right]d\mu=1.$$

Если $f(z)=f^*(z)$, то имеет место равенство в неравенстве Юнга, т. е.

$$L(f)=\|f^{*(k)}\|_{(M)}\cdot\int\limits_d p\left(\frac{|f^{*(k)}(z)|}{\|f^{*(k)}\|_{(M)}}\right)\frac{|f^{*(k)}(z)}{\|f^{*(k)}\|_{(M)}}\,d\mu=\lambda(\eta+1).$$

Таким образом функция $f^*(z)$, будучи экстремальной для задачи (19), будет экстремальной и для задачи

$$\sup_{f\in H_1^1}|L(f)|=\lambda(\eta+1).$$

Остальные рассуждения такие же, как в предыдущей теореме.

Экстремальные задачи типа (15), (16), (19) можно рассматривать и в классах $H_p^1 (p>1)$ и H_M^1. Для них справедливы аналогичные теоремы, но к сожалению, мы не умеем оценивать число нулей экстремальной функции в этих пространствах. Сформулируем указанную теорему.

Теорема 5. *В задачах типа* (15), (16), (19) *для пространства* $H_p^1 (p>1)$ *экстремальные функции* $f^*(z)$ *имеют вид* (8), *а для пространства* H_M^1 — *вид* (2).

Московский инженерно-строительный институт им. В. В. Куйбышева

Поступило в редакцию 28.IX.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Л. Геронимус, О некоторых экстремальных свойствах аналитических функций, Изв. АН СССР, серия матем. 12, № 3 (1948), 324—336.
2. A. J. Macintyre, W. W. Rogosinski, Extremum problems in the theory of analytic functions, Acta Math., 82 (1950), 275—325.
3. W. W. Rogosinski, H. Schapiro, On certain extremum problems for analytic functions, Acta Math., 90, N 3—4 (1953), 287—318.
4. С. Я. Хавинсон, О некоторых экстремальных задачах теории аналитических функций, Учен. зап. МГУ, вып. 148,, Математика IV (1951), 133—143.
5. С. Я. Хавинсон, Экстремальные задачи для некоторых классов аналитических функций в конечно-связных областях, Матем. сб. 36 (78), № 3 (1955), 445—478.
6. Г. Ц. Тумаркин и С. Я. Хавинсон, Качественные свойства решений экстремальных задач некоторых типов, Сб. Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного, Физматгиз, 1960.
7. М. А. Красносельский и Я. Б. Рутицкий, Выпуклые функции и пространства Орлича, Физматгиз, 1958.
8. В. М. Терпигорева, Об экстремальных задачах для классов Орлича аналитических функций в единичном круге, Лит. мат. сб. 1963, 237—269.
9. K. de Lecuw and W. Rudin, Extreme points and extremum problems in H_1, Journal of Amth. Vol. 8, N 3, 1958, 467—485.
10. Г. М. Голузин, Оценки для аналитических функций с ограниченным средним модулем, Труды Матем. Ин-та им. В. А. Стеклова, т. XVIII (1946), 1—87.

KAI KURIE TIESINIAI IR NETIESINIAI EKSTREMUMO UŽDAVINIAI; EKSTREMALINIŲ FUNKCIJŲ PAVIDALAS IR SAVYBES

V. TERPIGOREVA

(Reziumė)

Darbe nagrinėjamos Hardi-Riso klasės H_p ir bendresnės autoriaus įvestos klasės H_M. Sprendžiamas ekstremumo uždavinys

$$\sup_{f\in H_M} \left| \int_{|\zeta|=1} f(\zeta)\,\omega(\zeta)\,d\zeta \right|,$$

kur $\omega(\zeta)$ yra funkcija duota vienetinio skritulio $|\zeta|=1$ taškuose. Kai $\omega(\zeta)$ yra analizinė funkcija, nusakomas ekstremalinių funkcijų pavidalas. Klasės H_1 atveju įvertinamas ekstremalinės funkcijos nulių skaičius. Šis įvertinimas papildo Rudino ir De-Leio rezultatus. Nagrinėjami ir kai kurie netiesiniai uždaviniai.

GESTALT UND EIGENSCHAFTEN DER EXTREMAL FUNKTIONEN IN EINIGEN LINEAREN UND NICHTLINEAREN AUFGABEN

V. TERPIGOREVA

(Zusammenfassung)

In den Hardy-Riesz'schen Klassen H_p und in den Klassen H_M (diese sind eine Verallgemeinerung der Klassen H_p und sind vom Autor eingeführt worden) wird die Extremumaufgabe

$$\sup_{f \in H_M} \left| \int_{|\zeta|=1} f(\zeta)\, \omega(\zeta)\, d\zeta \right|$$

untersucht, wobei die Funktion $\omega(\zeta)$ auf dem Einheitskreise $|\zeta|=1$ gegeben ist. Im Falle einer au $|\zeta|=1$ analytischen Funktiono $\omega(\zeta)$, ist die Gestalt der Extremalfunktionen gefunden. Für die Klasse H_1 wird die Anzahl der Nullstellen der Extremalfunktion eingeschätzt. Diese Einschätzung ist als eine Ergänzung zu den Resultaten von Rudin und De-Lei anzusehen. Es werden auch einige nichtlineare Aufgaben behandelt.