LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 1, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 1, 1967

ОДНА ИГРА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ НА ПОЛУПЛОСКОСТИ

И. П. ЯЧЯУСКАС

Рассматривается антагонистическая игра преследователя P против преследуемого E. В начальный момент времени игрок E расположен в точке $E_0(\xi_0, \eta_0)$ полуплоскости S, а игрок P расположен в точке $P_0(x_0, y_0)$. Затем игроки P и E, обладая скоростями, не превышающими данные величины v и u $(v > u)$, перемещаются в плоскости, имея при этом возможность в каждый момент времени менять направление своего движения. Преследуемый E считается пойманным как только точки расположения P и E совпадают. Игрок P выигрывает 1, поймав игрока E в полуплоскости S, и проигрывает 1 в противоположном случае.

Игра, в которой игрок P знает расположение преследуемого E и направление вектора его скорости в каждый момент времени, а игрок E знает только расположение игрока P, рассматривалась Петросяном в [1], [2]. Не уменьшая общности, можем считать, что полуплоскость S определяется неравенством $y \geqslant c_0$ и $\eta_0 > c_0$. Тогда из [1] следует, что игрок P поймает E в S независимо от действий игрока E, если P_0 находится в области, определяемой неравенством

$$\frac{(x-\xi_0)^2}{(\eta_0-c_0)^2\,(d^2-1)}+\frac{(y-c_0)^2}{(\eta_0-c_0)^2\,d^2}\leqslant 1, \tag{1}$$

где

$$d=\frac{v}{u}>1.$$

Область (1) будем называть *выигрывающим множеством* преследователя P (см. [1]), а границу области – *барьером* (см. [3]). Этот барьер является эллипсом, большая ось которого равна $2(\eta_0-c_0)\,d$. Эту ось будем называть диаметром барьера.

Будем рассматривать игру, когда P_0 принадлежит области (1).

Теорема. *Для того, чтобы игрок P поймал игрока E в S, ему достаточно знать расположение игрока E в моменты времени $t_0, t_1, t_2, \ldots$, где t_n зависит от расположения игроков в момент времени t_{n-1}, $n=1, 2, \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t < \infty$.*

Доказательство. Пусть в начальный момент времени игрок P находится на барьере

$$\frac{(x-c_0)^2}{(\eta_0-c_0)^2\,(d^2-1)}+\frac{(y_0-c_0)^2}{(\eta_0-c_0)^2\,d^2}=1 \tag{2}$$

и со скоростью v перемещается по нормали барьера в точку пересечения этой нормали с прямой $x=\xi_0$. Точку пересечения нормали с прямой обозначим $P_1(x_1, y_1)$, а перемещение игрока P из точки P_0 в точку P_1 будем называть шагом. Тогда

$$x_1=\xi_0,$$
$$y_1=\frac{y_0-c_0}{d^2}+c_0. \tag{3}$$

Если P_0 находится на прямой $x=\xi_0$, то координаты точки P_1 находим по формулам (3).

Пусть δ_1 — расстояние между P_0 и P_1. Тогда, используя (2), получаем, что

$$\delta_1^2=\frac{d^2-1}{d^4}\,[d^4(\eta_0-c_0)^2-(y_0-c_0)^2]. \tag{4}$$

За время первого шага игрок E из точки $E_0(\xi_0, \eta_0)$ переместится в точку $E_1(\xi_1, \eta_1)$, причем

$$(\xi_0-\xi_1)^2+(\eta_0-\eta_1)^2\leqslant(\eta_0-c_0)^2-\frac{1}{d^2}\,(\eta_0-c_0)^2-\frac{d^2-1}{d^6}\,(y_0-c_0)^2. \tag{5}$$

Так как $\eta_0>c_0$, то из (5) следует, что

$$(\eta_0-\eta_1)^2-(\eta_0-c_0)^2<0.$$

Последнее неравенство означает, что $\eta_1>c_0$, т. е. после первого шага игрок E не выйдет из полуплоскости S.

Так как после первого шага E находится в точке $E_1(\xi_1, \eta_1)$, то новый барьер определяется уравнением:

$$\frac{(x-\xi_1)^2}{(\eta_1-c_0)^2\,(d^2-1)}+\frac{(y-c_0)^2}{(\eta_1-c_0)^2\,d^2}=1.$$

Докажем, что точка P_1 находится в выигрывающем множестве, т. е докажем, что

$$d^2(\xi_0-\xi_1)^2+\frac{d^2-1}{d^4}\,(y_0-c_0)^2-d^2(d^2-1)\,(\eta_1-c_0)^2\leqslant 0.$$

В силу (5) для этого достаточно показать, что

$$(d^2-1)\,(\eta_0-c_0)^2-d^2(\eta_0-\eta_1)^2-d^2(d^2-1)\,(\eta_1-c_0)^2\leqslant 0.$$

Это очевидно, так как

$$d^2[(\eta_0-c_0)^2-(\eta_0-\eta_1)^2+(\eta_1-c_0)^2]-(\eta_0-c_0)^2-d^4(\eta_1-c_0)^2=$$
$$=-[d^2(\eta_1-c_0)+(\eta_0-c_0)]^2\leqslant 0.$$

Если во время первого шага точки расположения игроков P и E совпадают, то игра окончена. Если поимка не состоялась, то рассматриваем игру на полуплоскости S_1, определенной неравенством $y\geqslant c_1$. Постоянная c_1 выбирается так, чтобы в новой игре точка P_1 находилась на барьере. Ясно, что $c_1\geqslant c_0$ и $\eta_1>c_1$.

Для упрощения записи, положим $c_0=0$. Тогда c_1 будет меньшим корнем уравнения

$$\frac{(x_1-\xi_1)^2}{(\eta_1-c_1)^2\,(d^2-1)}+\frac{(y_1-c_1)^2}{(\eta_1-c_1)^2\,d^2}=1,$$

т. е.

$$c_1 = \frac{1}{d^2-1}\left\{d^2\eta_1 - \frac{y_0}{d^2} - \sqrt{d^2[\eta_1^2+(\xi_0-\xi_1)^2-2\eta_1 y_0+\frac{y_0^2}{d^2}}\right\}. \tag{6}$$

Из (6) и (5) получаем

$$\eta_1 - c_1 \leqslant \frac{1}{d^2-1}\left(\frac{y_0}{d^2} - \eta_1 + \sqrt{2d^2\eta_0\eta_1 - 2y_0\eta_1 - \eta_0^2 + \frac{y_0^2}{d^4}}\right) = f(\eta_1).$$

Для оценки разности $\eta_1 - c_1$ сверху найдем максимум функции $f(\eta_1)$ в области допустимых значений η_1.

Из неравенства (5) следует, что

$$\eta_{11} = \eta_0 - \sqrt{\frac{(d^2-1)\,(d^4\eta_0^2-y_0^2)}{d^6}} \leqslant \eta_1 \leqslant \eta_0 + \sqrt{\frac{(d^2-1)\,(d^4\eta_0^2-y_0^2)}{d^6}} = \eta_{12}.$$

В интервале $[\eta_{11}, \eta_{12}]$ функция $f(\eta_1)$ непрерывна и имеет непрерывную производную за исключением разве лишь точки η_{11}.

Находим корень производной:

$$\eta_{10} = \frac{d^2\eta_0 - y_0}{2} + \frac{d^2\eta_0 + y_0}{2d^4}.$$

Так как вторая производная отрицательна, то

$$f(\eta_1) \leqslant f(\eta_{10}) = \frac{d^2(d^2-1)\,\eta_0 - (d^2-1)\,y_0}{2d^4}.$$

Кроме того,

$$-d\eta_0 \leqslant y_0 \leqslant d\eta_0.$$

Следовательно,

$$\eta_1 - c_1 \leqslant f(\eta_{10}) \leqslant \eta_0\, q,$$

где

$$q = \frac{d^3 + d^2 + d - 1}{2d^3} < 1.$$

Доказали, что после одного шага диаметр барьера уменьшился не меньше, чем в $\frac{1}{q} > 1$ раз. Поэтому, когда число шагов неограниченно возрастает, расстояние между точками расположения игроков P и E сходится к нулю.

Длина пути, пройденного игроком P до поимки игрока E:

$$\delta \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i. \tag{7}$$

Из (4) следует, что

$$\delta_1 \leqslant \sqrt{d^2-1}\,\eta_0 = \delta_1',$$

$$\delta_2 \leqslant \sqrt{d^2-1}\,(\eta_1 - c_1) = \delta_2'.$$

Так как

$$\frac{\delta_2'}{\delta_1'} = \frac{\eta_1 - c_1}{\eta_0} \leqslant q < 1$$

и расположение игроков после любого шага можем считать начальным расположением, то ряд (7) сходится, т. е. $t = \frac{\delta}{v} < \infty$. Теорема доказана.

Определение. *a — поимкой называется расположение игроков в точках, расстояние между которыми не превышает $a > 0$.*

Следствие. *Для того, чтобы игрок P осуществлял a — поимку игрока E в S, ему достаточно знать расположение игрока E в моменты времени $t_0, t_1, \ldots, t_n$.*

Замечание. Полученные результаты имеют место и для полупространств размерности $n > 2$.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
10.VII.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Петросян, Об одном семействе дифференциальных игр на выживание в пространстве R^n, ДАН СССР, т. 161, 1 (1965).
2. Л. А. Петросян, Одна игра преследования на полуплоскости, ДАН Арм. ССР, т. 40, 4 (1965).
3. R. Isaacs, Differential games, New York, Wiley, 1965.

VIENAS PERSEKIOJIMO LOŠIMAS PUSPLOKŠTUMĖJE

I. JAČIAUSKAS

(Reziumė)

Nagrinėjamas persekiojimo lošimas pusplokštumėje, kuomet persekiotojas P yra savo išlošimo aibėje (1). Įrodoma, kad lošėjas P, žinodamas antrojo lošėjo padėtį tik tam tikrais diskretiniais laiko momentais, sugauna antrąjį lošėją.

A GAME OF PURSUIT IN THE HALF-PLANE

I. JACIAUSKAS

(Summary)

A game of pursuit in the half-plane, when the pursuer is in the set of this advantageous positions, is analysed. There is shown, that for the capture it is sufficient to know only the certain discrete locations of evader.