ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

ЗАМЕЧАНИЕ К СТАТЬЕ „О ВЕРХНИХ И НИЖНИХ ФУНКЦИЯХ ДЛЯ УСТОЙЧИВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ“, Часть 1

В моей работе „О верхних и нижних функциях для устойчивых случайных процессов“ I. (Лит. мат. сб. т. V, 4 (1965), 541–553) третий абзац снизу на стр. 542 следует читать так:

Следствием теоремы 1 являются следующие утверждения:

$$P\left\{\limsup_{t\to\infty}\frac{\xi(t)}{\varphi(t)}=1\right\}=1 \quad \text{при } 1<\alpha<2$$

и

$$P\left\{\liminf_{t\to\infty}\frac{\xi(t)}{\varphi(t)}=1\right\}=1 \quad \text{при } 0<\alpha<1,$$

где

$$\varphi(t)=(-1)^{\varkappa}\,t^{\frac{1}{\alpha}}\,(B^{-1}(\alpha)\ln\ln t)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}.$$

Аналогичные изменения необходимы и в локальном аналоге закона повторного логарифма (стр. 546).

На стр. 541 в формуле (3) вместо x нужно читать $|x|$.

При проверке условия 3 леммы 5 использована неверная оценка (20) (стр. 550). Можно обойтись и без нее, если для рассмотрения случая Б привлечь не лемму 5, а просто – закон нуля или единицы. План нового доказательства приводим ниже.

Б. Пусть $I_\alpha(g)=\infty$. Достаточно рассматривать последовательность $\{t_k\}$, удовлетворяющую условию (7). Обозначим $F_k=\{\xi(t_k)>g(t_k)\}$. Так как $\limsup F_k=\bigcap_{n-1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}F_k$, то в силу закона нуля или единицы достаточно показать, что для любого n можно найти номер $\psi(n)>n$ такой, что

$$P\left\{\bigcup_{k=n}^{\psi(n)}F_k\right\}>c>0. \tag{15}$$

Пусть $\delta_1>0$. Так как $P(F_k)\downarrow 0$ при $k\to\infty$, и в силу леммы 3, $\sum_{k=1}^{\infty}P(F_k)=\infty$, то для любого натурального $n>n_0(\delta_1)$ найдется номер $\psi(n)>n$, такой, что

$$\delta_1\leqslant\sum_{n\leqslant k\leqslant=\psi(n)}P(F_k)\leqslant 2\delta_1. \tag{16}$$

Обозначим

$$D(m)=F_m\cap\bigcap_{r=1}^{\psi(n)-m}\overline{F}_{m+r}=$$

$$=\{\xi(t_m)>g(t_m),\ \xi(t_{m+1})\leqslant g(t_{m+1}),\ \ldots,\ \xi(t_{\psi(n)})\leqslant g(t_{\psi(n)})\},$$

$$D_1(m)=\left\{g(t_m)\leqslant\xi(t_m)\leqslant g(t_m)+\frac{a}{4\alpha}\left(\frac{t_m}{q(t_m)}\right)\right\}^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Из (9) следует, что

$$P\Big(D_1(m)\Big)>C_1\cdot P(F_m),\qquad 0<C_1<1. \tag{17}$$

Для случая $1<\alpha<2$ введем событие

$$D_2(m)=D_1(m)\cup\bigcap_{k=0}^{h-1}\{\xi(t_{m+k+1})-\xi(t_{m+k})\leqslant 0\}.$$

При условии, что имеет место событие $D_2(m)$, в силу (7) и равенства (18):

$$q^{-\frac{1}{\alpha}}(t)=\varphi(t)\,q^{-1}(t)$$

получаем, что тогда имеют место события:

$$\xi(t_{m+r})\leqslant\xi(t_m)\leqslant t_m^{\frac{1}{\alpha}}\varphi(t_m)+\frac{a}{4\alpha}\left(\frac{t_m}{q(t_m)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\leqslant t_{m+1}^{\frac{1}{\alpha}}\varphi(t_{m+1})\leqslant t_{m+2}^{\frac{1}{\alpha}}\varphi(t_{m+r})$$

для всех $r=1,\ 2,\ \ldots,\ h$. Следовательно, мы доказали, что

$$D_2(m)\subset D_1(m)\cup\bigcap_{r=1}^{h}\bar F_{m+r}.$$

Введем события

$$D_3(m)=D_2(m)\cap\bigcap_{r=h+1}^{\Psi(n)-m}\bar F_{m+r},$$

$$D_{3,\,r}(m)=D_2(m)\cap F_{m+r},\qquad h+1\leqslant r.$$

Очевидно, что

$$D_2(m)\subset D_3(m)\cup\bigcup_{r=h+1}^{\Psi(n)-m}D_{3,\,r}(m)\tag{19}$$

и

$$D_{3,\,r}(m)\subset D_2(m)\cap E_r(m),\tag{20}$$

где

$$E_r(m)=\left\{\xi(t_{m+r})-\xi(t_{m+h})\geqslant t_{m+r}^{\frac{1}{\alpha}}\varphi(t_{m+r})-t_m^{\frac{1}{\alpha}}\varphi(t_m)-\frac{a}{4\alpha}\left(\frac{t_m}{q(t_m)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}.$$

В силу (7) и (18) имеем

$$\Phi_{m,\,r}\equiv t_{m+r}^{\frac{1}{\alpha}}\varphi(t_{m+r})-t_m^{\frac{1}{\alpha}}\varphi(t_m)-\frac{a}{4\alpha}\left(\frac{t_m}{q(t_m)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\geqslant\frac{a}{4\alpha}\sum_{k=0}^{r-1}\left(\frac{t_{m+k}}{q(t_{m+k})}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Если $t_{m+h}<t_{m+r}\leqslant 2t_m$, то из (7) получаем

$$t_{m+r}-t_{m+h}\leqslant 2br\,\frac{t_m}{q(t_m)}$$

и, следовательно, из (3), если h достаточно большое, получаем

$$P\left(E_r(m)\right)\leqslant C_2\exp\{-C_3r\},$$

$$P\left\{\bigcup_{t_{m+h}<t_{m+r}\leqslant 2t_m}D_{3,\,r}(m)\right\}\leqslant C_2P\left(D_2(m)\right)\sum_{r=h+1}^{\infty}e^{-C_3r}.\tag{21}$$

Число членов последовательности (7), удовлетворяющих условию

$$2t_m<t_{m+r}\leqslant t_m\,q^{\alpha}(t_{m+r})$$

не превосходит $C_4(\ln\ln t_m)^{\alpha+2}$. Для тех же t_{m+r} из (7), (19) и (6) следует, что

$$\left(\frac{t_{m+k}}{q(t_{m+k})}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\geqslant C_5\left(t_{m+k+1}^{\frac{1}{\alpha}}\left(B^{-1}(\alpha)\ln\ln t_{m+k+1}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}-t_{m+k}^{\frac{1}{\alpha}}\left(B^{-1}(\alpha)\ln\ln t_{m+k}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right).$$

Поэтому

$$P\left\{\bigcup_{2t_m<t_{m+r}\leqslant t_m q^{\alpha}(t_{m+r})}D_{3,\,r}(m)\right\}\leqslant C_4P\left(D_2(m)\right)\cdot\frac{(\ln\ln t_m)^{\alpha+2}}{(\ln t_m)^{C_6}}.\tag{22}$$

Если $t_m\,q^{\alpha}(t_{m+r})<t_{m+r}\leqslant t_{\psi(n)}$, то

$$\Phi_{r,\,m}\geqslant t_{m+r}^{\frac{1}{\alpha}}\varphi(t_{m+r})\left(1-\frac{2}{q(t_{m+r})}\right).$$

Поэтому согласно лемме 4 получаем

$$P\left\{\bigcup_{t_m q^{\alpha}(t_{m+r})<t_{m+r}\leqslant t_{\psi(n)}} D_{3,r}(m)\right\}\leqslant$$

$$\leqslant C_7 P\left(D_2(m)\right)\sum_{t_m q^{\alpha}(t_{m+r})<t_{m+r}\leqslant t_{\psi(n)}} P(F_{m+r})\leqslant C_7\cdot 2\delta_1\cdot P\left(D_2(m)\right). \tag{23}$$

Если h возьмем достаточно большим, а δ_1 – достаточно малым, то из (21), (22) и (23) следует, что для всех достаточно больших n имеет место неравенство

$$P\left(\bigcup_{n\leqslant m\leqslant\psi(n)} D_{3,r}(m)\right)\leqslant C_8 P\left(D_2(m)\right),\qquad 0<C_8<1.$$

Следовательно, из (20) получаем, что

$$P\left(D_3(m)\right)\geqslant C_{11}P(F_m).$$

Так как

$$P\left(\bigcup_{n\leqslant m\leqslant\psi(n)} F_m\right)=P\left(\bigcup_{n\leqslant m\leqslant\psi(n)} D(m)\right)=\sum_{n\leqslant m\leqslant\psi(n)} P\left(D(m)\right)\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{n\leqslant m\leqslant\psi(n)} P\left(D_3(m)\right)\geqslant C_{11}\sum_{n\leqslant m\leqslant\psi(n)} P(F_m)>C_{11}\delta_1,$$

то соотношение (15) в случае $1<\alpha<2$ доказано.

Если $0<\alpha<1$, то полагаем, что $D_2(m)=D_1(m)$.

$$D_3(m)=D_2(m)\cap\bigcap_{m<m+r\leqslant\psi(n)}\bar{F}_{m+r},$$

$$D_{3,r}(m)=D_2(m)\cap F_{m+r},$$

$$E_r(m)=\left\{\xi(t_{m+r})-\xi(t_m)\geqslant -t_{m+r}^{\frac{1}{\alpha}}\varphi(t_{m+r})+t_m^{\frac{1}{\alpha}}\varphi(t_{m+r})-\frac{a}{4\alpha}\left(\frac{t_m}{q(t_m)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}.$$

Соотношения (17), (19) и (20) имеют место и здесь.

При $t_m<t_{m+r}\leqslant 2t_m$ из (7) и (18) следует, что

$$t_{m+r}-t_m\geqslant r\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{t_m}{q(t_m)}$$

и

$$\Phi_{r,m}\geqslant-\frac{4b}{\alpha}\sum_{k=0}^{r-1}\left(\frac{t_{m+k}}{q(t_{m+k})}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\geqslant-\frac{4\cdot 2^{\frac{1}{\alpha}}br}{\alpha}\left(\frac{t_m}{q(t_m)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Следовательно, при достаточно большом a, полагая, что $b=a^{\frac{1+\alpha^2}{2\alpha}}$, из (7) и (3) получаем

$$P\left\{\bigcup_{t_m<t_{m+r}\leqslant 2t_m} D_{3,r}(m)\right\}<C_9\cdot P\left(D_3(m)\right)\cdot\sum_{r=1}^{\infty}e^{-C_{10}ra^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}}}.$$

Вероятность $P\left(D_{3,r}(m)\right)$ при $\alpha t_m<t_{m+r}\leqslant t_m q(t_{m+r})$ и $t_m q(t_{m+r})<t_{m+r}\leqslant t_{\psi(n)}$ оцениваем таким же методом как и в случае $1<\alpha<2$, используя (7), (18) и (3). Доказательство завершаем так же как и в случае $1<\alpha<2$.

Н. Калинаускайте

К СВЕДЕНИЮ ПОДПИСЧИКОВ

Подписка на периодическое издание «Литовский математический сборник» в Литовской ССР принимается всеми отделениями Союзпечати, конторами, отделениями и агентствами связи по республиканскому каталогу газет и журналов (индекс сборника по каталогу 76716).

Лица и организации, находящиеся за пределами Литовской ССР, годовую подписку на сборник могут оформить в Вильнюсском городском отделении Союзпечати по адресу: Вильнюс, ул. Людаса Гиры, 22.

Для оформления подписки следует направить по указанному адресу 3 рубля (почтовым переводом) и указать фамилию (или наименование организации) и полный адрес подписчика, а также цель перевода (годовая подписка на сборник).

Редакция

СОДЕРЖАНИЕ

TURINYS

CONTENTS

Indeksas 76716
Kaina Rb. 0,70