LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 2, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 2, 1967

БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ ДЛЯ ЧИСЛА ПОЯВЛЕНИЙ РЕКУРРЕНТНОГО СОБЫТИЯ

А. АЛЕШКЯВИЧЕНЕ

Пусть $\mathscr{E}$ – какое либо рекуррентное событие, а p_k – вероятность того, что $\mathscr{E}$ впервые произойдет при k-том испытании. Предположим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

Пусть, далее, X_r, $r=1, 2, \ldots,$ – случайные величины, означающие число испытаний между $(r-1)$-м и r-м осуществлениями события $\mathscr{E}$, которые принято называть временем возвращения, и для которых, очевидно,

$$P\{X_r = k\} = p_k, \quad r = 1, 2, \ldots$$

Обозначим

$$\mu_m = \sum_{k=1}^{\infty} k^m p_k, \quad \sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2, \quad \bar\sigma = \frac{\sigma}{\mu_1^{\frac{3}{2}}}.$$

Число появлений события $\mathscr{E}$ в первых $n-1$ испытаниях обозначим через N_n. Нас будет интересовать асимптотическое распределение с учетом больших уклонений величины $\dfrac{N_n - \frac{n}{\mu_1}}{\bar\sigma\sqrt{n}}$ при больших n.

Теорема 1. *Если существует число $A > 0$ такое, что ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{hk} p_k \tag{1}$$

сходится при всех $|h| \leqslant A$, то в интервале $1 < x \leqslant \bar\delta\bar\sigma\Delta_2\sqrt{n}$, $\bar\delta < \bar\delta_H$, имеют место соотношения

$$\frac{1-F_n(x)}{1-\Phi(x)} = e^{\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)}\left(1 + f_1(\bar\delta, H)\frac{x}{\sqrt{n}}\right),$$

$$\frac{F_n(-x)}{\Phi(-x)} = e^{-\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda\left(-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)}\left(1 + f_2(\bar\delta, H)\frac{x}{\sqrt{n}}\right).$$

Здесь $\Phi(x)$ – функция (0,1) – нормального распределения,

$$|f_i(\bar\delta, H)| < \frac{8H\left\{1 + 7{,}2\left(H + 2\delta + \min\left\{\frac{1}{3}(1-\bar\delta)^3 H^{-1}, \frac{1}{2}H^{-\frac{1}{4}}\right\}\right)\right\}}{(1-\delta)^4(1-\rho)^{\frac{3}{2}}}, \quad i = 1, 2,$$

$0<\delta<\delta_H$ определяется из уравнения

$$\bar{\delta}=\frac{\delta(1+\delta)}{2}, \qquad \rho=\frac{6H\delta}{(1-\delta)^3}, \qquad \bar{\delta}_H=\frac{\delta_H(1+\delta_H)}{2},$$

δ_H — действительный корень уравнения $\rho=1$, $\lambda(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\lambda_k t^k$ — степенной ряд Крамера, сходящийся при $|t|<\bar{\delta}_H$, причем

$$|\lambda_k|\leqslant\frac{\delta_H}{(k+3)\,\bar{\delta}_H^{k+2}\Delta_2^{k+1}\bar{\sigma}^{k+1}}, \qquad k=0,\ 1,\ \ldots;$$

$\Delta_2<A$, а H — постоянное (точное определение для Δ_2 дано в (8), а для H — в (9).

Теорема 2. *Пусть рекуррентное событие является непериодическим и пусть выполнено условие* (1). *Тогда если положить*

$$x=x_{nk}=\frac{k-\frac{n}{\mu_1}}{\bar{\sigma}\sqrt{n}},$$

то для $x>1$, $x=o(\sqrt{n})$ *при* $n\to\infty$

$$\frac{\bar{\sigma}\sqrt{n}\,P\{N_n=k\}}{\varphi(x)}=e^{\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)}\left[1+0\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right],$$

где $\lambda(t)$ — *ряд, фигурирующий в теореме* 1, *а* $\varphi(x)$ — *плотность* $(0,1)$ — *нормального распределения.*

Доказательство теоремы 1. Введем производящую функцию

$$P(s)=\sum_{\nu=1}^{\infty}s^{\nu}p_{\nu}.$$

Тогда если

$$q_k=\sum_{\nu=k+1}^{\infty}p_{\nu}$$

и

$$Q(s)=\sum_{k=0}^{\infty}s^k q_k,$$

то известно, что

$$1-P(s)=(1-s)\,Q(s),$$

$$\mu_1=P'(1)=Q(1)=\sum_{k=0}^{\infty}q_k$$

и

$$P''(1)=2Q'(1)=\sigma^2-\mu_1+\mu_1^2.$$

И вообще, как нетрудно видеть, $P^{(\nu)}(1)$ выражается через первых ν моментов времени возвращения.

Производящая функция моментов величины N_n есть коэффициент при s^{n-1} в разложении

$$\frac{1-P(s)}{(1-s)\left(1-e^hP(s)\right)}=\frac{Q(s)}{1-e^hP(s)} \tag{2}$$

по степеням s (см. [1]).

Пусть далее $s(h)$ является корнем уравнения $1-e^hP(s)=0$, т.е.

$$1-e^hP\left(s(h)\right)\equiv 0. \tag{3}$$

Нетрудно видеть, что при $h=0$ уравнение (3) имеет корень $s(0)=1$. Далее, так как $P'(1)=\mu_1\neq 0$, то 1 является простым корнем. Следовательно, мы можем воспользоваться теоремой о неявных функциях (см.[6], стр. 354), согласно которой существует окрестность

$$|h|<\Delta,\quad |s-s(0)|<\Delta' \tag{4}$$

точки ($h=0$, $s(0)=1$), в которой уравнение (3) имеет для каждого h один и только один корень $s(h)$. Этот корень является однозначной аналитической функцией в круге $|h|<\Delta$ и представляет неявную функцию, определяемую уравнением (3) и дополнительным условием $s(0)=1$. Тогда при всех $|h|<\Delta$ справедливо разложение

$$s(h)=1+s'(0)\,h+\frac{s''(0)}{2!}h^2+\frac{s'''(0)}{3!}h^3+\dots$$

Для вычисления производных $s'(0)$, $s''(0)$, $s'''(0)$, ... воспользуемся уравнениями

$$\begin{aligned}
&P\left(s(h)\right)\equiv e^{-h},\\
&s'(h)\,P'\left(s(h)\right)=-e^{-h},\\
&s''(h)P'\left(s(h)\right)+s'^2(h)P''\left(s(h)\right)=e^{-h},\\
&s'''(h)P'\left(s(h)\right)+3\,s''(h)\,s'(h)\,P''\left(s(h)\right)+s'^3(h)\,P'''\left(s(h)\right)=e^{-h},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Отсюда при $h=0$ получаем

$$s'(0)=-\frac{1}{\mu_1},\qquad s''(0)=\frac{\mu_1^2-P''(1)}{\mu_1^3},$$

$$s'''(0)=-\left[\frac{1}{\mu_1}+3\,\frac{P''(1)-\mu_1^2}{\mu_1^4}P''(1)-\frac{P'''(1)}{\mu_1^3}\right]$$

и так далее. Следовательно, при $|h|<\Delta$

$$s(h)=1-\frac{1}{\mu_1}h-\frac{P''(1)-\mu_1^2}{\mu_1^3}\,\frac{h^2}{2!}-\left[\frac{1}{\mu_1}+3\frac{P''(1)-\mu_1^2}{\mu_1^4}P''(1)-\frac{P'''(1)}{\mu_1^3}\right]\frac{h^3}{3!}+\dots \tag{5}$$

Далее, так как

$$1-e^hP(s)=1-e^hP(s)-\left[1-e^hP\left(s(h)\right)\right]=-e^h\left[P(s)-P\left(s(h)\right)\right]$$

и при $|h|<\Delta_1\leqslant\Delta$ $P'\left(s(h)\neq 0\right.$ и $Q\left(s(h)\right)\neq 0$, то для всех $|h|<\Delta_1$

$$\frac{Q(s)}{1-e^hP(s)}=e^{-h}\frac{Q\left(s(h)\right)}{P'\left(s(h)\right)}\cdot\frac{1}{s-s(h)}\left[1+\right.$$

$$+\frac{Q'\left(s(h)\right)P'\left(s(h)\right)+Q\left(s(h)\right)P''\left(s(h)\right)}{Q\left(s(h)\right)P'\left(s(h)\right)}\left(s-s(h)\right)+\ldots+R_1(k,\ h)\left(s-s(h)\right)^k+$$

$$\left.+o\left(\left|\left(s-s(h)\right)^{k+\varepsilon_k}\right|\right)\right].\tag{6}$$

Здесь $R_1(k,\ h)$ — рациональная функция от первых $k+1$ моментов времени возвращения.

Теперь уже нетрудно найти производящую функцию моментов величины N_n, которую обозначим $f_n(h)$, как коэффициент при s^{n-1} правой части выражения (6). Итак,

$$f_n(h)=e^{-h}\frac{Q\left(s(h)\right)}{P'\left(s(h)\right)}s^{-n}(h)\left[1+o\left(\frac{1}{n^k}\right)\right].\tag{7}$$

Нетрудно убедиться, что существуют такие положительные постоянные , L, k, K и $\Delta_2\leqslant\Delta_1$, что для всех $|h|\leqslant\Delta_2$ будут $l\leqslant|s(h)|\leqslant L$ и

$$k\leqslant\left|\frac{Q\left(s(h)\right)}{P'\left(s(h)\right)}\right|\leqslant K.$$

Теперь доказательство теоремы 1 уже следует из следующего результата В. А. Статулявичюса (см. [2], лемма и замечание к лемме):

Пусть ξ — случайная величина с функцией распределения F, средним $m=M\xi$ и дисперсией $\sigma_1^2=D\xi$. Если существуют $H<\infty$ и $\bar\Delta<\infty$ такие, что

$$\left|\ln\int_{-\infty}^{\infty}e^{zx}dF(x+m)\right|_{|z|=\frac{\bar\Delta}{\sigma_1}}\leqslant H\bar\Delta^2$$

(в качестве логарифма берется его главное значение), то в интервале $1\leqslant x\leqslant\bar\delta\bar\Delta$, $\bar\delta<\delta_H$ имеют место соотношения

$$\frac{1-F(m+x\sigma_1)}{1-\Phi(x)}=e^{\frac{x^3}{\bar\Delta}\lambda\left(\frac{x}{\bar\Delta}\right)}\left(1+f_1(\bar\delta,\ H)\frac{x}{\bar\Delta}\right),$$

$$\frac{F(m-x\sigma_1)}{\Phi(-x)}=e^{-\frac{x^3}{\bar\Delta}\lambda\left(-\frac{x}{\bar\Delta}\right)}\left(1+f_2(\bar\delta,\ H)\frac{x}{\bar\Delta}\right).$$

Здесь

$$|f_i(\bar\delta,\ H)|<\frac{8H\left\{1+7{,}2\left(H+2\delta+\min\left\{\frac{1}{3}(1-\bar\delta)^3H^{-1},\ \frac{1}{2}H^{-\frac{1}{4}}\right\}\right)\right\}}{(1-\delta)^4(1-\rho)^{\frac{3}{2}}},$$

$i=1,\ 2;\ 0<\delta<\delta_H$ определяется из уравнения

$$\bar{\delta}=\frac{\delta(1+\delta)}{2},\qquad \rho=\frac{6H\delta}{(1-\delta)^3},\qquad \bar{\delta}_H=\frac{\delta_H(1+\delta_H)}{2},$$

δ_H — действительный корень уравнения $\rho=1$ и $\lambda(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\lambda_k t^k$ — степенной ряд Крамера, сходящийся при $|t|<\bar{\delta}_H$, причем

$$|\lambda_k|\leqslant\frac{\delta_H}{(k+3)\bar{\delta}_H{}^{k+3}},\qquad k=0,1,\ \ldots$$

Заметим, что в нашем случае можно положить

$$H=\frac{r}{\Delta_2^2\bar{\sigma}^2},\qquad \bar{\Delta}=\Delta_2\bar{\sigma}\sqrt{n}, \tag{9}$$

где

$$r=\Delta_2+\max\{|\ln k|,\ |\ln K|\}+\max\{|\ln l|,\ |\ln L|\}+1.$$

Приступим к доказательству теоремы 2. Пусть опять $f_n(z)$ — производная функция моментов случайной величины N_n. Тогда

$$f_n(z)=\sum_{k=0}^{n-1}e^{zk}P\{N_n=k\}.$$

Очевидно, $f_n(z)$ аналитична в полосе $|\mathrm{Re}\,z|\leqslant A$. Следовательно,

$$P\{N_n=k\}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\pi}^{c+i\pi}f_n(z)\,e^{-zk}dz.$$

Положим

$$\frac{k-\frac{n}{\mu_1}}{\bar{\sigma}\sqrt{n}}=x_{nk}=x,\ \ k=\bar{\sigma}x_{nk}\sqrt{n}+\frac{n}{\mu_1}=\bar{\sigma}\sqrt{n}x+\frac{n}{\mu_1}\ \ \text{и}\ \ \frac{x}{\sqrt{n}}=\tau.$$

Тогда

$$P\{N_n=k\}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\pi}^{c+i\pi}f_n(z)\,e^{-z\bar{\sigma}\sqrt{n}x-z\frac{n}{\mu_1}}dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\pi}^{c+i\pi}f_n(z)\,e^{-zn\left(\bar{\sigma}\tau+\frac{1}{\mu_1}\right)}dz. \tag{10}$$

Далее согласно (8) имеем, что для всех $|z|\leqslant\Delta_2$ $K(z)=-\ln s(z)$ является аналитической функцией. Возьмем в качестве $\ln s(z)$ его главное значение, стремящееся к 0 при $z\to 0$.

$K(z)$ разлагается в равномерно сходящийся степенной ряд вместе со своими производными:

$$K(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k z^k}{k!},$$

$$K'(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\gamma_{k+1}z^k}{k!}, \tag{11}$$

$$K''(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\gamma_{k+2}z^k}{k!}.$$

Из (5) и (10) получаем, что

$$\gamma_1=\frac{1}{\mu_1}, \qquad \gamma_2=\bar{\sigma}^2, \qquad \gamma_3=\frac{\mu_3\mu_1+3\mu_2\mu_1^2-3\mu_2^2-\mu_1^4}{\mu_1^6}.$$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d}{dz}\left[K(z)-\left(\bar{\sigma}\tau+\frac{1}{\mu_1}\right)z\right]=K'(z)-\bar{\sigma}\tau-\frac{1}{\mu_1}=0.$$

Для достаточно малого по абсолютной величине τ это уравнение имеет решение z_0, разлагающееся по степеням τ,

$$z_0=\frac{\tau}{\bar{\sigma}}-\frac{\gamma_3}{2\bar{\sigma}^4}\tau^2-\frac{\bar{\sigma}^2\gamma_4-3\gamma_3^2}{6\bar{\sigma}^7}\tau^3+\dots \tag{12}$$

Положим в (10) $c=z_0$ и выберем $\varepsilon<\frac{1}{2}\Delta_2$ таким, что для $|t|<\varepsilon$ и $|z_0|<\varepsilon$ имели

$$K''(z_0)>\frac{\bar{\sigma}^2}{2}, \qquad \left|\sum_{j=3}^{\infty}\frac{K^{(j)}(z_0)(it)^j}{j!}\right|\leqslant\frac{K''(z_0)t^2}{4}. \tag{13}$$

Предположим, что $\tau>0$. Тогда

$$P\{N_n=k\}=\frac{1}{2\pi i}(I_1+I_2+I_3), \tag{14}$$

где

$$I_1=\int_{z_0-i\sqrt{\tau}}^{z_0+i\sqrt{\tau}} f_n(z)\,e^{-zn\left(\bar{\sigma}\tau+\frac{1}{\mu_1}\right)}\,dz,$$

$$I_2=\int_{z_0-i\varepsilon}^{z_0-i\sqrt{\tau}}+\int_{z_0+i\sqrt{\tau}}^{z_0+i\varepsilon}, \qquad I_3=\int_{z_0-i\pi}^{z_0-i\varepsilon}+\int_{z_0+i\varepsilon}^{z_0+i\pi}.$$

Из (7) получаем

$$I_1=e^{-z_0}\frac{Q(s(z_0))}{P'(s(z_0))}\int_{z_0-i\sqrt{\tau}}^{z_0+i\sqrt{\tau}} s^{-n}(z)\,e^{-nz\left(\bar{\sigma}\tau+\frac{1}{\mu_1}\right)}dz\left[1+o\left(\frac{1}{n^k}\right)\right]+$$

$$+\int_{z_0-i\sqrt{\tau}}^{z_0+i\sqrt{\tau}}\left[e^{-z}\frac{Q(s(z))}{P'(s(z))}-e^{-z_0}\frac{Q(s(z_0))}{P'(s(z_0))}\right]s^{-n}(z)\,e^{-nz\left(\bar{\sigma}\tau+\frac{1}{\mu_1}\right)}dz\left[1+o\left(\frac{1}{n^k}\right)\right]. \tag{15}$$

Вдоль прямой $z=z_0+it$ можно разложить $K(z)-z\left(\tau\bar{\sigma}+\frac{1}{\mu_1}\right)$ по степеням t в окрестности $t=0$:

$$K(z)-z\left(\tau\bar{\sigma}+\frac{1}{\mu_1}\right)=K(z_0)-z_0\left(\tau\bar{\sigma}+\frac{1}{\mu_1}\right)+\sum_{j=2}^{\infty}\frac{K^{(j)}(z_0)(it)^j}{j!}. \tag{16}$$

В силу (13) и (16) имеем

$$\int\limits_{z_0-i\sqrt{\tau}}^{z_0+i\sqrt{\tau}} s^{-n}(z)\, e^{-nz\left(\tau\bar{\sigma}+\frac{1}{\mu_1}\right)} dz =$$

$$= i\exp\left\{n\left[K(z_0)-z_0\left(\tau\bar{\sigma}+\frac{1}{\mu_1}\right)\right]\right\}\int\limits_{-\sqrt{\tau}}^{\sqrt{\tau}} \exp\left\{n\sum_{j=2}^{\infty}\frac{K^{(j)}(z_0)(it)^j}{j!}\right\}dt =$$

$$= \frac{ie^{n\left\{K(z_0)-z_0\left(\tau\bar{\sigma}+\frac{1}{\mu_1}\right)\right\}}}{\sqrt{nK''(z_0)}}\int\limits_{-\sqrt{\tau nK''(z_0)}}^{\sqrt{\tau nK''(z_0)}} e^{-\frac{t^2}{2}}\exp\left\{\sum_{j=3}^{\infty}\frac{\rho_j(z_0)(it)^j}{j!\,n^{\frac{j}{2}-1}}\right\}dt, \qquad (17)$$

$$\sum_{j=3}^{\infty}\frac{\rho_j(z_0)\,(it)^j}{j!\,n^{\frac{j}{2}-1}} = \frac{(it)^3}{6\sqrt{n}}\rho_3(z_0)+\frac{t^4}{4!\,n}\alpha(t),$$

где

$$\rho_j(z)=\frac{K^{(j)}(z)}{[K''(z)]^{\frac{j}{2}}}, \qquad |\alpha(t)|\leqslant \max_{|z|<\frac{1}{2}\Delta_0}|K^{(4)}(z)|\cdot\frac{1}{|K''(z_0)|^2}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{-\sqrt{\tau nK''(z_0)}}^{\sqrt{\tau nK''(z_0)}} e^{-\frac{t^2}{2}}\exp\left\{\sum_{j=3}^{\infty}\frac{\rho_j(z_0)\,(it)^j}{j!\,n^{\frac{j}{2}-1}}\right\}dt=\sqrt{2\pi}+O\left(\frac{1}{n}\right). \qquad (18)$$

Далее имеем

$$e^{-z}\frac{Q(s(z))}{P'(s(z))}=e^{-z_0}\frac{Q(s(z_0))}{P'(s(z_0))}+\beta(z)(z-z_0), \qquad (19)$$

где

$$|\beta(z)|\leqslant \max_{|z|<\frac{1}{2}\Delta_0}\left|\frac{d}{dz}e^{-z}\frac{Q(s(z))}{P'(s(z))}\right|.$$

Из (13) и (19) получаем

$$\int\limits_{z_0-i\sqrt{\tau}}^{z_0+i\sqrt{\tau}}\left[e^{-z}\frac{Q(s(z))}{P'(s(z))}-e^{-z_0}\frac{Q(s(z_0))}{P'(s(z_0))}\right]s^{-n}(z)\,e^{-n\left(\bar{\sigma}\tau+\frac{1}{\mu_1}\right)z}dz=$$

$$=\frac{\exp\left\{n\left[K(z_0)-z_0\left(\tau\bar{\sigma}+\frac{1}{\mu_1}\right)\right]\right\}}{\sqrt{nK''(z_0)}}\,O(\tau). \qquad (20)$$

В силу соотношений (14), (15), (18) и (20) окончательно имеем

$$I_1=\frac{2\pi i\exp\left\{n\left[K(z_0)-z_0\left(\tau\bar{\sigma}+\frac{1}{\mu_1}\right)\right]\right\}}{\sqrt{nK''(z_0)}}\,e^{-z_0}\frac{Q(s(z_0))}{P'(s(z_0))}\left(1+O(\tau)\right). \qquad (21)$$

Согласно (13)

$$|I_2|=\left|\left(\int\limits_{z_0-i\varepsilon}^{z_0-i\sqrt{\tau}}+\int\limits_{z_0+i\sqrt{\tau}}^{z_0+i\varepsilon}\right)e^{-z}\frac{Q(s(z))}{P'(s(z))}s^{-n}(z)\,e^{-z}\left(\bar\sigma\tau+\frac{1}{\mu_1}\right)^n\right|dz<$$

$$<\varepsilon\,|s(z_0)|^{-n}\exp\left\{-nz_0\left(\bar\sigma\tau+\frac{1}{\mu_1}\right)-n\,\frac{K''(z_0)}{4}\tau\right\}\max_{|z|<\frac{1}{2}\Delta_n}\left|e^{-z}\frac{Q(s(z))}{P'(s(z))}\right|. \quad (22)$$

Приступим к оценке интеграла I_3. По формуле Коши согласно (2) имеем

$$f_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|s|=1}\frac{Q(s)\,s^{-n}}{1-e^zP(s)}\,ds=\frac{1}{2\pi i}\,e^{-z_0}\int\limits_{|s|=1}\frac{Q(s)\,s^{-n}}{e^{-z_0}-e^{it}P(s)}\,ds.$$

Отсюда r-кратным интегрированием по частям получаем

$$f_n(z)=\frac{r!}{n(n-1)\cdots(n-r+1)}\,\frac{e^{-z_0}}{2\pi i}\int\limits_{|s|=1}\frac{d^r}{ds^r}\left[\frac{Q(s)}{e^{-z_0}-e^{it}P(s)}\right]\frac{ds}{s^{n-r}}, \quad (23)$$

где r-сколь угодно большое постоянное целое число. Известно (см. доказательство леммы в работе [4]), что для любого $\varepsilon>0$ существует постоянное $c(\varepsilon)$, удовлетворяющее неравенству

$$|1-e^{it}P(s)|>c(\varepsilon), \quad (24)$$

при всех $\varepsilon\leqslant|t|\leqslant\pi$. Далее подбираем z_0 таким, что

$$|e^{-z_0}-1|<\frac{1}{2}c(\varepsilon). \quad (25)$$

Тогда согласно (24) и (25) имеем

$$|e^{-z_0}-e^{it}P(s)|\geqslant\frac{1}{2}c(\varepsilon). \quad (26)$$

Так как условие (1) обеспечивает равномерную ограниченность производных функций $P(s)$ и $Q(s)$:

$$|P^{(\nu)}(s)|\leqslant c_3,\quad \nu=1,\,2,\,\ldots,\,r,$$
$$|Q^{(\nu)}(s)|\leqslant c_4,\quad \nu=1,\,2,\,\ldots,\,r,$$

то из (12), (21) и (24) окончательно получаем, что

$$I_3=O\left(\frac{1}{n^r}\,e^{-z_0\left(\bar\sigma\tau+\frac{1}{\mu_1}\right)}\right).$$

Согласно (11) и (12)

$$K''(z_0)=\bar\sigma^2+O(\tau),$$

$$K(z_0)-z_0\left(\tau\bar\sigma+\frac{1}{\mu_1}\right)=K(z_0)-z_0K'(z_0)=-\sum_{K=2}^{\infty}\frac{k-1}{k!}\gamma_kz_0^k=$$

$$=-\frac{\tau^2}{2}+\tau^3\lambda(\tau), \quad (28)$$

$$e^{-h}\frac{Q(s(h))}{P'(s(h))}=1+O(h).$$

Из соотношений (14), (21), (22), (27) и (28) вытекает утверждение теоремы 2.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР
Вильнюсский Государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
15.X.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Feller, Fluctuation theory of recurrent events Trans. Amer. Math. Soc., 67, 1(1949), 98—119.
2. V. Statulevičius, On large deviations. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie, Band 6(1966), 133—144.
3. Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л., 1949.
4. А. Алешкявичене, Локальная предельная теорема для рекуррентных событий, Лит. мат. сб., 5 (1965), 3.
5. С. В. Нагаев, Уточнение предельных теорем для однородных цепей Маркова, Теория вероятн. и ее прим., 6 (1961), 1.
6. А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, Л., 1950.

DIDELIŲ ATSILENKIMŲ TEOREMOS REKURENTINIŲ ĮVYKIŲ PASIRODYMO SKAIČIUI

A. ALEŠKEVIČIENĖ

(Reziumė)

Sakysime $\mathcal{E}$ — reguliarus rekurentinis įvykis, p_k — tikimybė, kad įvykis $\mathcal{E}$ pirmą kartą įvyks k-jame bandyme, ir

$$\mu_m = \sum_{k=1}^{\infty} k^m p_k, \qquad \sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2, \qquad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\mu_1^{\frac{3}{2}}}.$$

Toliau, tarkime, kad N_n reiškia įvykio $\mathcal{E}$ pasirodymo skaičių per n-1 pirmųjų bandymų. Šiame darbe parodoma, jei rekurentinio įvykio $\mathcal{E}$ sugrįžimo laikas patenkina Kramerio sąlygą, t. y. jei galioja (1), tai atsitiktinim dydžiui N_n galioja didelių atsilenkimų teoremos.

LARGE DEVIATIONS FOR THE NUMBERS OF OCCURRENCE OF RECURRENT EVENTS

A. ALEŠKEVIČIENĖ

(Summary)

Let us denote $\mathcal{E}$— a recurrent event, p_k — probability that the recurrent event $\mathcal{E}$ occurs at the k-th trial and

$$\mu_m = \sum_{k=1}^{\infty} k^m p_k, \qquad \sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2, \qquad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\mu_1^{\frac{3}{2}}}.$$

Let N_n denote the number of realizations of $\mathcal{E}$ in the first n-1 trials. The large deviations theorems for random variable N_n under condition that the recurrence time of $\mathcal{E}$ satisfy Cramers conditions (1) are obtained.