LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 2, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 2, 1967

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА БЕСКОНЕЧНОШАГОВОГО ДИХОТОМИЧЕСКОГО И ТРИХОТОМИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В. Б. БИСТРИЦКАС

1. Рассматривается бесконечношаговый процесс $f(x, y)$ на прямой $x+y=1$, удовлетворяющий функциональному уравнению

$$f(x,\ y)=\max\begin{bmatrix} A\colon\ p_1\Big[r_1x+f\Big((1-r_1)\ x,\ y\Big)\Big], \\ B\colon\ p_2\Big[r_2y+f\Big(\ x,\ (1-r_2)y\Big)\Big] \end{bmatrix}, \tag{1}$$

где $0<r_1,\ r_2,\ p_1,\ p_2<1$; $x,\ y\geqslant 0$. Функция $f(x,\ 1-x)$ является выпуклой в интервале $[0,1]$ и достигает минимума в интервале (2).

Известно, что решение уравнения (1) является однородной функцией, поэтому $f(x,\ 1-x)=f(x)$ дает полное представление о функции $f(x,\ y)$.

Докажим два свойства функции $f(x)$.

Теорема 1. *Функция* $f(x)$ *выпукла в интервале* $[0,1]$.

Доказательство. По теореме существования и единственности (см. [1] стр. 86) *функция* $f(x,\ 1-x)$ *получается предельным переходом при* $N\to\infty$ *из соотношения*

$$f_{N+1}(x,\ 1-x)=\max\begin{bmatrix} p_1\Big[r_1x+f_N\Big((1-r_1)x,\ 1-x\Big)\Big], \\ p_2\Big[r_2y+f_N\Big(x,\ (1-r_2)(1-x)\Big)\Big] \end{bmatrix},$$

$$N=1,\ 2,\ \ldots,$$

$$f_1(x,\ 1-x)=\max[p_1r_1x,\ p_2r_2(1-x)].$$

Методом математической индукции нетрудно показать, что все функции $f_N(x,\ 1-x)$ – выпуклые. Последовательность $f_N(x,\ 1-x)$ сходится равномерно к функции $f(x,\ 1-x)$ (см. [1] стр. 98). Следовательно, функция $f(x,\ 1-x)$ является выпуклой в интервале $[0,1]$.

Обозначим через I интервал

$$\left[\frac{1-r_1}{1-r_1+K},\quad \frac{1}{(1-r_2)K+1}\right], \tag{2}$$

где

$$K=\frac{p_1r_1(1-p_2)}{p_2r_2(1-p_1)}. \tag{3}$$

Теорема 2. *Если* $r_1>r_2$, *то минимум функции* $f(x)$ *достигается в интервале* I.

Длина интервала I стремится к нулю при $r_1 \to 0$, и на основании теоремы минимум функции $f(x)$ достигается в точке $\frac{1}{K+1}$. Теорема теряет свое значение для больших r_1 и r_2, $r_2 \to 1$, так как тогда $I \to [0,1]$.

Доказательство. Оптимальное поведение U в точке $x_0 = \frac{1}{(1-r_2)K+1}$ для функции $f(x)$ имеет вид

$$U = A^{k_1} B^{l_1} A^{k_2} B^{l_2} \ldots,$$

где $k_1, k_2, \ldots, l_1, l_2, \ldots = 1, 2, \ldots$ Таким образом,

$$\begin{gathered} f_U(x_0) = p_1 r_1 x_0 + p_1^2 r_1 (1-r_1) x_0 + \ \ldots \ + \\ + p_1^{k_1} r_1 (1-r_1)^{k_1-1} x_0 + p_1^{k_1} p_2 r_2 (1-x_0) + \ldots \\ + p_1^{k_1} p_2^{l_1} r_2 (1-r_2)^{l_1-1} (1-x_0) + p_1^{k_1+1} p_2^{l_1} r_1 (1-r_1)^{k_1} x_0 + \ldots \end{gathered}$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что производная линейной функции $f_U(x)$ неотрицательна. Отсюда в силу выпуклости функции $f(x)$ будет следовать, что минимум находится в интервале $[0, x_0]$.

Очевидно,

$$\begin{gathered} f_U'(x) = S = p_1 r_1 + p_1^2 r_1 (1-r_1) + \ \ldots \ + \\ + p_1^{k_1} r_1 (1-r_1)^{k_1-1} - p_1^{k_1} p_2 r_2 - \ \ldots \ - \\ - p_1^{k_1} p_2^{l_1} r_2 (1-r_2)^{l_1-1} + p_1^{k_1+1} p_2^{l_1} r_1 (1-r_1)^{k_1} + \ \ldots \end{gathered} \tag{4}$$

Предположим, что $f_U'(x) < 0$. Дифференцируя ряд S по параметру p_2, получаем

$$\begin{gathered} S'_{p_2} = -p_1^{k_1} r_2 - \ \ldots \ - l_1 p_1^{k_1} p_2^{l_1-1} r_2 (1-r_2)^{l_1-1} + \\ + l_1 p_1^{k_1+1} p_2^{l_1-1} r_1 (1-r_1)^{k_1} + \ \ldots \end{gathered} \tag{5}$$

Полученный после дифференцирования ряд (4) сходится абсолютно. Докажем то $S'_{p_2} < 0$. Для этого исследуем остаточные члены ряда (4), обозначая их через

$$S_1 = S - p_1 r_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{gathered} S_i = S - \left[p_1 r_1 + p_1^2 r_1 (1-r_1) + \ \ldots \ - p_1^{k_1} p_2^{l_1} r_2 (1-r_2)^{l_1-1} \right] = p_1^{k_1} p_2^{l_1} \times \\ \times \left[p_1 r_1 (1-r_1)^{k_1} + p_1^2 r_1 (1-r_1)^{k_1+1} + \ \ldots \ + p_1^{k_2} r_1 (1-r_1)^{k_1+k_2} - p_1^{k_2} p_2 r_2 \frac{(1-r_2)^{l_1}}{(1-r_1)^{k_1}} - \ \ldots \right] \\ i = k_1 + l_1 . \end{gathered} \tag{6}$$

Предполагая, что в оптимальном поведении U на прямой выбирается только A, проследим блуждание прямой $y = (1-r_2) Kx$ согласно этому поведению. После первого выбора прямая $y = (1-r_2) Kx$ преобразуется в прямую $y = \frac{(1-r_2)}{1-r_1} Kx$, которая находится в области решения для процесса $f(x, y)$ (следует из неравенства $1-r_2 > 1-r_1$), и после i-го выбора попадает в прямую $y = (1-r_2) Kx$ или ниже нее и тогда

$$\frac{(1-r_2)^{l_1+1}}{(1-r_1)^{k_1}} > 1 - r_2. \tag{7}$$

Таким образом, из соотношения (6) имеем

$$S_i < p_1^{k_1} p_2^{l_1} (1-r_1)^{k_1} [p_1 r_1 + p_1^2 r_1 (1-r_1) + \\ + \ldots + p_1^{k_1} r_1 (1-r_2)^{k_1-1} - p_1^{k_1} p_2 r_2 - \ldots] < \\ < p_1^{k_1} p_2^{l_1} (1-r_1)^{k_1} S < 0. \tag{8}$$

При помощи соотношения (6) ряд (5) можно написать в виде

$$S'_{p_1} = S_{k_1-1} + p_2 S_{k_1} + \ldots + p_2 S_i + \ldots,$$

где $S_0 = S$. Отсюда следует, что наше предположение $S<0$ влечет $S'_{p_1} < 0$.

Аналогично продолжается доказательство неравенства $S'_{p_1} < 0$, если $S<0$.

Таким образом,

$$\min_{0 \leqslant p_1, p_2 \leqslant 1} S = \min_{p_1, p_2 = 1} S = r_1 + r_1(1-r_1) + \ldots \\ + r_1(1-r_1)^{k_1-1} - r_2 - r_2(1-r_2) - \ldots - r_2(1-r_2)^{l_1-1} + \\ + r_1(1-r_1)^{k_1} + \ldots$$

Так как полученный ряд сходится абсолютно, то

$$\min S = \frac{r_1}{1-(1-r_1)} - \frac{r_2}{1-(1-r_2)} = 0.$$

Получили противоречие. Оно доказывает, что $f'_U(x) \geqslant 0$.

Аналогично можно показать, что минимум функции находится в интервале $\left[\frac{1-r_1}{1-r_1+K}, 1\right]$, чем и завершается доказательство теоремы.

Теорема 3. *Если* $1-r_1 = (1-r_2)^n$ *для некоторого* $n = 2, 3, \ldots,$ *то*

$$\min_{0 \leqslant x \leqslant 1} f(x) = \frac{1-r_1}{1-r_1+K} \leqslant \min_{x \leqslant \frac{1}{K+1}} f$$

Доказательство. Пусть процесс $f(x, y)$ удовлетворяет соотношениям (1). Тогда оптимальное поведение на прямой $y = Kx$ имеет вид

$$U = ABB \ldots BABB \ldots BA \ldots$$

Следовательно, для $x = \dfrac{1}{K+1}$

$$f(x) = f_U(x) = {}_1\sum_{i=0}^{\infty} [p_1^i p_2^{ni} r_1 (1-r_1)^i x + \\ + p_1^i p_2^{in+1} r_2 (1-r_2)^{in} (1-x) + \ldots + \\ + p_1^i p_2^{(i+1)n} r_2 (1-r_2)^{(i+1)n-1} (1-x)].$$

Как и при доказательстве теоремы 2, нам достаточно показать, что $f'_U(x) \geqslant 0$.

Дифференцируя $f'_U(x)$, получаем

$$p_1 \sum_{i=1}^{\infty} [p_1^i p_2^{in} r_1 (1-r_1)^i - p_1^i p_2^{in+1} r_2 (1-r_2)^{in} - \\ \ldots - p_1^i p^{(i+1)n} r_2 (1-r_2)^{(i+1)n-1}].$$

Полученный ряд абсолютно сходится, и поэтому правомерна перестановка членов ряда,

$$f'_U(x)=\frac{p_1r_1}{1-p_1p_2^n(1-r_1)}-\frac{p_1p_2r_2}{1-p_1p_2^n(1-r_2)^n}-$$

$$\dots -\frac{p_1p_2^nr_2(1-r_2)^{n-1}}{1-p_1p_2^n(1-r_2)^n}=$$

$$=c\,[r_1-p_2r_2-\ \dots\ -p_2^nr_2(1-r_2)^{n-1}],$$

где $c>0$. От подстановки 1 вместо p_2 последнее выражение может только уменьшиться. Поэтому

$$f'_U(x)>c\,[1-(1-r_2)^n-r_2-\ \dots -r_2(1-r_2)^{n-1}]=0.$$

Следствие. *Если* $r_2=r_1$, *то*

$$\min_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x)=f\left(\frac{1}{K+1}\right).$$

Замечание. Если $r_2>r_1$, то в теореме 3 r_1 и r_2 меняются местами.

2. Рассмотрим функциональное уравнение

$$\eta(x,\ y)=\max\begin{bmatrix} A\colon\ p_1\Big[r_1x+\eta\Big((1-r_1)x,\ y\Big)\Big], \\ B\colon\ p_2\Big[r_2y+\eta\Big(x,\ (1-r_2)y\Big)\Big], \\ C\colon\ p_3\Big[r_3(x+y)+\eta\Big((1-r_3)x,\ (1-r_3)y\Big)\Big]\end{bmatrix}, \tag{9}$$

где $0\leqslant p_1,\ p_2,\ p_3,\ r_1,\ r_2,\ r_3<1$; $x,\ y\geqslant 0$. Для этого уравнения нетрудно проверить теорему существования и единственности непрерывного решения (см. [1] стр. 98).

Теорема 4. *Если* $M<(1-s)L$, *где* $s=\max(r_1,\ r_2)$,

$$M=\frac{p_1r_1(1-p_3)-p_3r_3(1-p_1)}{p_3r_3(1-p_1)},$$

$$L=\frac{p_3r_3(1-p_2)}{p_2r_2(1-p_3)-p_3r_3(1-p_2)},$$

то

$$\eta(x,\ y)=\begin{cases} p_1\Big[r_1x+\eta\Big((1-r_1)x,\ y\Big)\Big], & \text{когда } y\leqslant Mx, \\ \dfrac{p_3r_3(x+y)}{1-p_3(1-r_3)}, & \text{когда } Mx\leqslant y\leqslant Lx, \\ p_2\Big[r_2y+\eta\Big(x,\ (1-r_2)y\Big)\Big], & \text{когда } y\geqslant Lx,\end{cases} \tag{10}$$

для $0<L,\ M<\infty$.∎

Доказательство. Для процесса $\eta_N(x,\ y)$ с конечным числом шагов автором (см. [2], теорема 5) была получена формула, аналогичная (10), где вместо M стоит M_N, и вместо L — L_N, коэффициенты прямых M_N и L_N там же приведены в явном виде, откуда легко следует, что $M_N\to M$ и

$L_N \to L$ монотонно при $N \to \infty$. В случае $p_1 p_2 \geqslant p_3$ последовательность $\{M_N\}$ не убывает, а $\{L_N\}$ не возрастает. Следовательно, предельный переход в вышеуказанной теореме доказывает формулу (10).

Рассмотрим случай, когда p_1, $p_2, \leqslant p_3$. В силу условия $M < (1-s)L$ и того, что в этом случае последовательность $\{M_n\}$ не возрастает, а $\{L_n\}$ не убывает, найдется такое n, что для $n \geqslant n_0$

$$(1-s)L_n > M_n,$$
$$M_n < K < L_n \tag{11}$$

(число K определено в п. 1).

Обозначим через $\eta_S(n, x, y)$ значение n-шагового процесса при поведении S и положим

$$\bar{\eta}_0(x, y) = \begin{cases} \eta_{AC^{n-1}}(n, x, y), \text{ когда } y \leqslant M_n x, \\ \eta_{C^n}(n, x, y), \text{ когда } M_n x \leqslant y \leqslant L_n x, \\ \eta_{BC^{n-1}}(n, x, y), \text{ когда } y \geqslant L_n x. \end{cases}$$

(M_n и L_n — коэффициенты соответственно прямых $\eta_{AC^{n-1}}(n, x, y) = \eta_{C^n}(n, x, y)$, $\eta_{BC^{n-1}}(n, x, y) = \eta_{C^n}(n, x, y)$). Рассмотрим рекуррентное соотношение

$$\bar{\eta}_{N+1}(x, y) = \max \begin{bmatrix} p_1\left[r_1 x + \bar{\eta}_N\left((1-r_1)x, y\right)\right], \\ p_2\left[r_2 y + \bar{\eta}_N\left((x, (1-r_2)y\right)\right], \\ p_3\left[r_3(x+y) + (1-r_3)\bar{\eta}_N(x, y)\right] \end{bmatrix}$$

$N \geqslant 0$.

Теорема существования и единственности (см. [1], стр. 146) обеспечивает сходимость $\bar{\eta}_N(x, y)$ к единственному непрерывному пределу для любой непрерывной начальной функции $\bar{\eta}_0(x, y)$ в ограниченной области

$$0 \leqslant x \leqslant \overline{X}, \; 0 \leqslant y \leqslant \overline{Y}.$$

Поэтому

$$\lim_{N\to\infty} \bar{\eta}_N(x, y) = \eta(x, y).$$

Докажем, что n можно подобрать так, чтобы для всех $N = 1, 2, \ldots$ выполнялось соотношение

$$\bar{\eta}_N(x, y) = \begin{cases} p_1\left[r_1 x + \bar{\eta}_{N-1}\left((1-r_1)x, y\right)\right], \text{ когда } y \leqslant Mx, \\ p_3\left[r_3(x+y) + (1-r_3)\bar{\eta}_{N-1}(x, y)\right], \text{ когда } Mx \leqslant y \leqslant Lx, \\ p_2\left[r_2 y + \bar{\eta}_{N-1}\left(x, (1-r_2)y\right)\right], \text{ когда } y \geqslant Lx. \end{cases} \tag{12}$$

Пусть $N = 1$. Исследуем поведение функции $\bar{\eta}_1(x, y)$ в области $Mx \leqslant y \leqslant M_n x$. Докажем, что

$$\bar{\eta}_1(x, y) \neq \max[\bar{\eta}_A(x, y), \; \bar{\eta}_B(x, y)].$$

В области $y \geqslant Mx$

$$\eta_{AC^n}(n+1,\ x,\ y) \leqslant \eta_{CAC^{n-1}}(n+1,\ x,\ y)$$

по определению M. По определению $\bar{\eta}_0(x,\ y)$ для достаточно большого n $\eta_{CAC^{n-1}}(n+1,\ x,\ y) = \bar{\eta}_C(x,\ y)$.

Следовательно,

$$\bar{\eta}_A(x,\ y) \leqslant \bar{\eta}(x,\ y).$$

Равенство имеет место только на прямой $y = Mx$. Если

$$\bar{\eta}_1(x,\ y) = \bar{\eta}_B(x,\ y),$$

то

$$\bar{\eta}_B(x,\ y) = \eta_{BAC^{n-1}}(n+1,\ x,\ y),$$

так как точка $\left(x,\ (1-r_2)\,y\right)$ находится в области $y \leqslant M_n x$. Отсюда из второго неравенства соотношения (11) следует

$$\bar{\eta}_B(x,\ y) < \eta_{ABC^{n-1}}(n+1,\ x,\ y).$$

Так как при выборе A из области $y \leqslant M_n x$ попадание в область $y \geqslant L_n x$, в которой $\bar{\eta}_0 = \eta_{BC^{n-1}}$ невозможно, то последнее неравенство еще не может служить основанием неоптимальности B. Поэтому мы докажем еще неравенство

$$\eta_{ABC^{n-1}}(n+1,\ x,\ y) < \eta_{AC^n}(n+1,\ x,\ y) = \bar{\eta}_A(x,\ y), \qquad (13)$$

$$Mx \leqslant y \leqslant M_n x.$$

Приравнивая

$$\eta_{ABC^{n-1}}(n+1,\ x,\ y)$$

и

$$\eta_{AC^n}(n+1,\ x,\ y),$$

получаем

$$\eta_{BC^{n-1}}\left(n,\ (1-r_1)\,x,\ y\right) = \eta_{C^n}\left(n,\ (1-r_1)\,x,\ y\right). \qquad (14)$$

Последнее равенство выполняется на прямой $(1-r_1)\,L_n x = y$, которая в силу первого неравенства соотношения (11) находится выше прямой $y = M_n x$. Таким образом для $M_n x \leqslant y < (1-r_1)\,L_n x$

$$\eta_{AC^n}(n+1,\ x,\ y) > \eta_{ABC^{n-1}}(n+1,\ x,\ y),$$

так как ниже прямой $y = (1-r_1)\,L_n x$

$$\eta_{C^n}\left(n,\ (1-r_1)\,x,\ y\right) > \eta_{BC^{n-1}}\left(n,\ (1-r_1)\,x,\ y\right).$$

Отсюда, имея в виду (14), получаем соотношение (13). Следовательно,

$$\bar{\eta}_1(x,\ y) = \eta_{CAC^{n-1}}(n+1,\ x,\ y),$$

когда

$$Mx \leqslant y \leqslant M_n x,$$

причем

$$\bar{\eta}_1(x,\ y) = \eta_{C^{n+1}}(n+1,\ x,\ y),$$

когда

$$y = M_n x.$$

Аналогично следует, что

$$\bar{\eta}_1(x, y) = \eta_{CBC^{n-1}}(n+1, x, y),$$

когда

$$L_n x \leqslant y \leqslant Lx,$$

причем

$$\bar{\eta}_1(x, y) = \eta_{C^{n+1}}(n+1, x, y),$$

когда

$$y = L_n x.$$

В силу выпуклости функции $\bar{\eta}_1(x, 1-x)$ и последних соотношений для $M_n x \leqslant y \leqslant L_n x$

$$\bar{\eta}_1(x, y) = \eta_{C^{n+1}}(n+1, x, y).$$

Таким образом,

$$\bar{\eta}_1(x, y) = p_3 [r_3(x+y) + (1-r_3)\bar{\eta}_0(x, y)]$$

для

$$Mx \leqslant y \leqslant Lx.$$

Проводя стандартные рассуждения в области $y \leqslant Mx$, получаем соотношение

$$\eta_{BAC^{n-1}}(n+1, x, y) < \eta_{AC^n}(n+1, x, y)$$

и, так как при достаточно большом n

$$(1-r_1) M_n < M,$$

также неравенство

$$\eta_{CAC^{n-1}}(n+1, x, y) < \eta_{AC^n}(n+1, x, y),$$

когда

$$Mx < y \leqslant (1-r_1) M_n x.$$

Следовательно,

$$\bar{\eta}_1(x, y) = p_1 \left[r_1 x + \bar{\eta}_0 \left((1-r_1) x, y \right) \right]$$

для

$$y \leqslant Mx.$$

Очевидно, что

$$\bar{\eta}_1(x, y) = p_2 \left[r_2 y + \bar{\eta}_0 \left(x, (1-r_2) y \right) \right],$$

когда, $y \geqslant Lx$. Этим соотношение (12) для $N = 1$ доказано.

Далее продолжаем доказательство этого соотношения для N в предположении, что оно верно для $N-1$. Исследуем оптимальное поведение функции $\bar{\eta}_N(x, y)$ в области

$$Mx \leqslant y \leqslant M_n x.$$

Так как

$$\bar{\eta}_A(N, x, y) = p_1 \left[r_1 x + \bar{\eta}_{N-1} \left((1-r_1) x, y \right) \right] =$$
$$= \bar{\eta}_{AC}(N, x, y) < \bar{\eta}_{CA}(N, x, y), N \geqslant 2$$

и

$$\bar{\eta}_B(N, x, y) = \eta_{BA}(N, x, y) < \bar{\eta}_{AB}(N, x, y),$$

то

$$\bar{\eta}_N(x, y) \neq \max[\bar{\eta}_A(N, x, y), \bar{\eta}_B(N, x, y)].$$

Следовательно,

$$\bar{\eta}_N(x, y) = \bar{\eta}_C(N, x, y),$$

когда

$$Mx \leqslant y \leqslant M_n x,$$

причем

$$\bar{\eta}_N(x, y) = \eta_{C^{N+n}}(N+n, x, y),$$

когда

$$y = M_n x.$$

Аналогично

$$\bar{\eta}_N(x, y) = \eta_C(N, x, y),$$

когда

$$L_n x \leqslant y \leqslant L_n x,$$

причем

$$\bar{\eta}_N(x, y) = \eta_{C^{N+n}}(N+n, x, y),$$

когда

$$y = L_n x.$$

В силу выпуклости функции $\bar{\eta}_N(x, 1-x)$,

$$\bar{\eta}_N(x, y) = \bar{\eta}_C(N, x, y),$$

когда $Mx \leqslant y \leqslant Lx$. Проводя стандартные рассуждения для областей $y \leqslant Mx$, $y \geqslant Lx$, получаем соотношение (12). Переход к пределу $N \to \infty$, в этом соотношении доказывает теорему при p_2, $p_1 \leqslant p_3$.

Если $p_1 < p_3 < p_2$ или $p_2 < p_3 < p_1$, первые неравенства соотношения (11) меняются соответственно на неравенства

$$(1-r_1)L > M_n,$$
$$(1-r_2)\bar{L}_n > M.$$

Далее применяются рассуждения, аналогичные проведенным выше.

Следствие. *Если* $M \leqslant 0$ *и* $0 < L < \infty$, *то*

$$\eta(x, y) = \psi(x, y) = \begin{cases} p_2\Big[r_2 y + \psi\Big(x(1-r_2)y\Big)\Big], & \text{когда } y \geqslant Lx, \\ \dfrac{p_3 r_3 (x+y)}{1-p_3(1-r_3)}, & \text{когда } y \leqslant Lx. \end{cases} \tag{15}$$

Если $L < 0$ или $L = \infty$ и $0 < M$, то

$$\eta(x, y) = \varphi(x, y) = \begin{cases} p_1\Big[r_1 x + \varphi\Big((1-r_1)x, y\Big), & \text{когда } y \leqslant Mx, \\ \dfrac{p_3 r_3 (x+y)}{1-p_3(1-r_3)}, & \text{когда } y \geqslant Mx. \end{cases} \tag{16}$$

Если $M \leqslant 0$ и $L < 0$ или $L = \infty$, то

$$\eta(x, y) = \frac{p_3 r_3 (x+y)}{1-p_3(1-r_3)}. \tag{17}$$

Доказательство. Докажем соотношение (15). Пусть $y=0$. Тогда

$$\eta(x,\ 0)=\max\begin{bmatrix} A\colon\ p_1\left[r_1x+\eta\left((1-r_1)x,\ 0\right)\right], \\ B\colon\ p_2\left[0+\eta(x,\ 0)\right], \\ C\colon\ p_3\left[r_3x+(1-r_3)\eta(x,\ 0)\right] \end{bmatrix},$$

откуда

$$\eta(x,\ 0)=\max\left[\frac{p_1r_1x}{1-p_1(1-r_1)},\ \frac{p_3r_3x}{1-p_3(1-r_3)}\right].$$

Если $\frac{p_1r_1}{1-p_1}<\frac{p_3r_3}{1-p_3}$, то выбор A не является оптимальным для процесса $\eta(x,\ 0)$ и тем более выбор A не оптимален в области $x,\ y>0$. Отсюда получаем, что

$$\eta(x,\ y)=\max\begin{bmatrix} p_2\left[r_2y+\eta\left(x,\ (1-r_2)y\right)\right], \\ p_3\left[r_3(x+y)+(1-r_3)\eta(x,\ y)\right] \end{bmatrix}.$$

Это уравнение можно получить как аппроксимацию процесса $\psi_N(x,\ y)$ с большим N, т. е. $\lim\limits_{N\to\infty}\psi_N(x,\ y)=\eta(x,\ y)$. Таким образом, переходя к пределу, когда $N\to\infty$, получаем соотношение (15) по известному решению $\psi_N(x,\ y)$ (см. [2], теорема 3).

Соотношения (16) и (17) доказываются аналогично.

Теорема 6. *Функция $\eta(x,\ y)$ имеет не более, чем четыри области решения. В случае четырех областей, одной из граничных прямых является прямая $y=Kx$.*

Доказательство. Пусть имеются все три A, B и C области решения (возможно разделенные одна другой). При отсутствии этого предположения теорема очевидна. Из выпуклости функции $\eta(x,\ 1-x)$ и $\eta_C(x,\ y)=\eta_{C\infty}(x,\ y)(r_3=r_4)$ [следует область C для однородной функции, состоящая из одного сектора. Предположим, что

$$\frac{y_0}{x_0}=\min_{(x,\,y)\in B}\frac{y}{x}<\min_{(x,\,y)\in C}\frac{y}{x}=\frac{y_1}{x_1}. \tag{18}$$

Равенство $\frac{y_0}{x_0}=\frac{y_1}{x_1}$, очевидно, означало бы, что есть только три области решения, и поэтому этот случай из рассмотрения исключен.

Тогда

$$K\leqslant\frac{y_0}{x_0}, \tag{19}$$

где $y=Kx$ — граничная прямая между A и B областями решения для функции $f(x,\ y)$ дихотомического процесса (см. соотн. (1) и (3)). Отсюда получаем

$$\eta(x,\ y)=\eta_B(x,\ y),$$

когда $\frac{y}{x} \geqslant \max_{(x,y)\in C} \frac{y}{x} = \frac{y_2}{x_2}$, так как в противном случае получили бы

$$\eta(x, y) = \eta_B(x, y) \text{ для } \frac{y}{x} \geqslant \frac{y_2}{x_2},$$

что невозможно в силу $\eta_{AB} < \eta_{BA}$ при $y > Kx$. Таким образом равенство

$$\eta_{BC^\infty}(x, y) = \eta_{C^\infty}(x, y)$$

возможно только в области $\frac{y}{x} \geqslant \frac{y_2}{x_2}$. Согласно следствию теоремы 4, равенство $\eta_{BC^\infty}(x, y) = \eta_{C^\infty}(x, y)$ имеет место на граничной прямой $y = Lx$ между A и C областями решения для процесса $\varphi(x, y)$. Следовательно,

$$L > K.$$

Используя одну лемму (см. [2] лемма 2), получаем

$$K > M, \tag{20}$$

где M – коэффициент граничной прямой между A и C областями решения для процесса $\varphi(x, y)$ (см. следствие теоремы 4). Из последнего неравенства и соотношения (19) следует, что ни в какой точке области $y > \frac{y_0}{x_0} x$

$$\eta(x, y) \neq \eta_A(x, y),$$

так как в противном случае было бы

$$\eta(x, y) = \max[\eta_{AS}(x, y), \eta_{AB}(x, y)]$$

при $y > Kx$.

Далее докажем, что

$$\frac{y_0}{x_0} = K.$$

Так как прямая $\frac{y_0}{x_0} x = y$ является граничной прямой между A и B областями решения, то после выбора A на ней имеем

$$\eta_A(x, y) = \max[\eta_{AB}(x, y), \eta_{AC^\infty}(x, y)].$$

Если было бы

$$\eta_A(x, y) = \eta_{AC^\infty}(x, y),$$

то равенство $\eta_{AC^\infty} = \eta_{C^\infty}$ выполнялось бы на прямой $y = Mx$, которая находилась бы ниже прямой $y = Kx$, что противоречит неравенству (20). Следовательно,

$$\eta(x, y) = \eta_{AB}(x, y)$$

на прямой $y = \frac{y_0}{x_0} x$ и

$$\frac{y_0}{x_0} \leqslant K.$$

Сравнивая последнее и (19) соотношения получаем

$$\frac{y_0}{x_0} = K.$$

Таким образом, при предложении (18) имеется четыре области решения, т.е.

$$\eta(x,\ y)=\begin{cases}\eta_A(x,\ y) \text{ для } y\leqslant Kx,\\ \eta_B(x,\ y) \text{ для } Kx\leqslant y\leqslant \frac{y_1}{x_1}x,\\ \eta_{C^\infty}(x,\ y) \text{ для } \frac{y_1}{x_1}x\leqslant y\leqslant \frac{y_2}{x_2}x,\\ \eta_B(x,\ y) \text{ для } y\geqslant \frac{y_2}{x_2}x,\end{cases}$$

где

$$K<\frac{y_1}{x_1}<\frac{y_2}{x_2}<\frac{K}{1-r_1}.$$

При отсутствии предположения (18) может случиться, что имеет место соотношение

$$\eta(x,\ y)=\eta_A(x,\ y)$$

при $y>\frac{y_2}{x_2}x$. В этом случае доказательство теоремы приводится совсем ана логично рассмотренному случаю и будет по одной области B и C и две области A. Если

$$\eta(x,\ y)\neq\eta_A(x,\ y)$$

ни в одной точке области $y>\frac{y_2}{x_2}x$, то имеется три области решения.

Наконец, я хотел бы поблагодарить Э. И. Вилкаса за ценные советы и исправления.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
28.XI.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Беллман, Динамическое программирование, ИЛ, 1960.
2. В. Бистрицкас, К вопросу дихотомической и трихотомической задач динамического программирования для процесса с конечным числом шагов, Лит. мат. сб., VI, № 3 (1966).

KAI KURIOS DINAMINIO PROGRAVIMO DICHOTOMINIO IR TRICHOTOMINIO PROCESO SU BEGALINIU ŽINGSNIŲ SKAIČIUMI SAVYBĖS

V. BISTRICKAS

(Reziumė)

Darbe įrodoma (1) funkcionalinės lygties sprendinio iškilumo ir minimalios reikšmės teoremos bei sprendimo sričių skaičiaus teorema (9) funkcionalinei lygčiai. Surandamas tam tikros klasės (9) funkcionalinių lygčių sprendinys.

SOME PROPERTIES OF SOLUTIONS OF TWO-CHOICE AND THREE-CHOICE PROBLEMS OF DYNAMIC PROGRAMMING FOR INFINITE STAGE PROCESSES

V. BISTRICKAS

(Summary)

Theorems about convexity and minimal-value of solution of the functional equation (1) and theorem about number of the decision regions for the functional equation (9) are proved. A solution of some class of functional equations (9) is given.