LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 2, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 2, 1967

О ГЕОМЕТРИИ НОРМАЛЬНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

В. И. БЛИЗНИКАС

Геометрии систем дифференциальных уравнений второго порядка посвящены работы М. Жоравского [15], В. Слебодзинского [14], Ю. Дугласа [9], Г. Ф. Лаптева [6], А. Моора [12], А. Кавагути [10] и других. Геометрия обыкновенных систем дифференциальных уравнений порядка $p>2$ мало исследована (см. [12]).

В статье приводится новый подход к геометрии систем дифференциальных уравнений любого порядка. Исследования ведутся методом Г. Ф. Лаптева и применяется общая теория связностей пространства опорных элементов [2]. Впервые излагаются элементы экстензорного исчисления методом Г. Ф. Лаптева. Часть результатов этой статьи была доложена автором на Международном конгрессе математиков в Москве (1966).

1. Пространство линейных элементов высшего порядка

1. *Структурные уравнения.* Пусть Γ – одномерная псевдогруппа, определенная инвариантной формой Θ. Нормальная расслоенная псевдогруппа $\Gamma^{(p)}$ псевдогруппы Γ определяется инвариантными формами Θ, $\Theta^{(a)}$ $(a=1, 2, \ldots, p)$, которые имеют следующую структуру:

$$D\Theta=[\Theta,\ \Theta^{(1)}],\quad D\Theta^{(a)}=\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\,[\Theta^{(s)},\ \Theta^{(a-s+1)}]+[\Theta,\ \Theta^{(a+1)}]. \tag{1}$$

Пфаффовые формы

$$\hat{\Theta}^{(a)}=\Theta^{(a)}|_{\Theta=0}$$

являются инвариантными формами дифференциальной группы $GL^p(1;\ \mathrm{R})$ и

$$D\hat{\Theta}^{(a)}=\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\,[\hat{\Theta}^{(s)},\ \hat{\Theta}^{(a-s+1)}]. \tag{2}$$

Система диффереціальных уравнений произвольной кривой n-мерного дифференцируемого многообразия V_n имеет вид

$$\omega^i=v^{(1)i}\,\Theta \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{3}$$

причем

$$D\,\omega^i=[\omega^k,\ \omega^i_k],$$

$$D\,\omega^i_{j_1\ldots j_a}=\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!\,(a-s)!}\,[\omega^l_{(j_1\ldots j_s},\ \omega^i_{j_{s+1}\ldots j_a)\,l}]+[\omega^k,\ \omega^i_{j_1\ldots j_a k}]. \tag{4}$$

Последовательное продолжение системы (3) дает:

$$
\begin{gathered}
dv^{(1)i}+v^{(1)k}\omega_k^i-v^{(1)i}\Theta^{(1)}=v^{(2)i}\Theta,\\
dv^{(2)i}+v^{(2)k}\omega_k^i+v^{(1)k_1}v^{(2)k_2}\omega_{k_1k_2}^i-2v^{(2)i}\Theta^{(1)}-v^{(1)i}\Theta^{(2)}=v^{(3)i}\Theta,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
dv^{(a)i}+\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!}\left\{\omega^i_{k_1\ldots k_s}\sum_{(a_1+\ldots+a_s=a)}\frac{1}{a_1!\ldots a_s!}v^{(a_1)k_1}\ldots v^{(a_s)k_s}-\right.\\
\left.-\frac{1}{(a-s)!}\Theta^{(s)}v^{(a-s+1)i}\right\}=v^{(a+1)i}\Theta.
\end{gathered}
\tag{5}
$$

Система форм ω^i, Θ, $\mathfrak{d}^{(1)i}$, ..., $\mathfrak{d}^{(p)i}$, где

$$
\begin{gathered}
\mathfrak{d}^{(a)i}=dv^{(a)i}+\sum_{s=1}^{a}\frac{a!}{s!}\left\{\omega^i_{k_1\ldots k_s}\sum_{(a_1+\ldots+a_s=a)}\frac{1}{a_1!\ldots a_s!}v^{(a_1)k_1}\ldots v^{(a_s)k_s}-\right.\\
\left.-\frac{1}{(a-s)!}\Theta^{(s)}v^{(a-s+1)i}\right\},
\end{gathered}
$$

вполне интегрируема и первые интегралы системы дифференциальных уравнений

$$\omega^i=0,\ \Theta=0,\ \mathfrak{d}^{(1)i}=0,\ \ldots,\ \mathfrak{d}^{(p)i}=0$$

являются локальными координатами параметризированного линейного элемента $(x^i,\ v^{(1)i},\ \ldots,\ v^{(p)i})$ порядка p. Совокупность этих линейных элементов порядка p образует пространство $L_n^{(p)}$, которое называется расслоенным пространством линейных элементов порядка p, причем $\dim L_n^{(p)}=(p+1)n+1$. Если в качестве параметра мы возьмем аффинный параметр, то нормальная псевдогруппа $\Gamma^{(1)}$ будет группой аффинных преобразований ориентированной прямой (см. [4], стр. 280):

$$D\Theta=[\Theta,\ \Theta^{(1)}],\quad D\Theta^{(1)}=0, \tag{6}$$

т. е. $\Theta^{(a)}=0$ $(a=2,\ 3,\ \ldots,\ p)$. Если в качестве параметра выбран гомографический параметр, то нормальная псевдогруппа $\Gamma^{(2)}$ будет группой гомографических преобразований ориентированной прямой (см. [4], стр. 283):

$$D\Theta=[\Theta,\ \Theta^{(1)}],\quad D\Theta^{(1)}=[\Theta,\ \Theta^{(2)}],\quad D\Theta^{(2)}=[\Theta^{(1)},\ \Theta^{(2)}] \tag{7}$$

и $\Theta^{(a)}=0$ $(a=3,\ 4,\ \ldots,\ p)$. Конечные уравнения гомографических преобразований прямой имеют вид (см. [4], стр. 283):

$$\tilde{t}=\frac{at+b}{ct+d}\ (ad-bc>0).$$

Таким образом, если вместо псевдогруппы $\Gamma^{(p)}$ берем некоторую подгруппу $\mathring{\Gamma}\subset\Gamma^{(p)}$, то получаем специально параметризированное пространство линейных элементов высшего порядка. Следует заметить, что формы ω^i, $\mathfrak{d}^{(1)i}$, ..., $\mathfrak{d}^{(p)i}$ образуют вполне интегрируемую систему форм только в том случае, когда подгруппа $\mathring{\Gamma}$ является двухпараметрической (или однопараметрической).

Мы ограничимся рассмотрением пространства $L_n^{(p)}$, линейные элементы которого являются параметризованными при помощи аффинного параметра.

В этом случае пространство $L_n^{(p)}$ обозначим через $\overset{\circ}{L}{}_n^{(p)}$. Структурные уравнения пространства $\overset{\circ}{L}{}_n^{(p)}$ имеют вид:

$$D\omega^i = [\omega^k,\ \omega_k^i],\quad D\Theta = [\Theta,\ \Theta^{(1)}],\quad D\Theta^{(1)} = 0, \tag{8}$$

$$D\mathfrak{d}^{(a)i} = \sum_{c=1}^{a} [\mathfrak{d}^{(c)k},\ \mathfrak{d}_{(c)k}^{(a)i}] + [\omega^l,\ \mathfrak{d}_l^{(a)i}], \tag{9}$$

где

$$\mathfrak{d}^{(a)i} = dv^{(a)i} + \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!}\,\omega_{k_1\ldots k_s}^i \sum_{(a_1+\ldots+a_s=a)} \frac{1}{a_1!\ldots a_s!}\, v^{(a_1)k_1}\ldots v^{(a_s)k_s} -$$
$$- a\,\Theta^{(1)} v^{(a)i}, \tag{10}$$

$$\mathfrak{d}_l^{(a)i} = \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!}\,\omega_{k_1\ldots k_s l}^i \sum_{(a_1+\ldots+a_s=a)} \frac{1}{a_1!\ldots a_s!}\, v^{(a_1)k_1}\ldots v^{(a_s)k_s}, \tag{11}$$

$$\mathfrak{d}_{(c)k}^{(a)i} = \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!}\,\omega_{k_1\ldots k_s}^i \sum_{(a_1+\ldots+a_s=a)} \frac{1}{a_1!\ldots a_s!}\,(\delta_c^{a_1}\delta_k^{k_1} v^{(a_2)k_2}\ldots$$
$$\ldots v^{(a_s)k_s} + \ldots + v^{(a_1)k_1}\ldots v^{(a_{s-1})k_{s-1}}\delta_c^{a_s}\delta_k^{k_s}) - a\,\delta_{(c)k}^{(a)i}\,\Theta^{(1)}. \tag{12}$$

Внешние дифференциалы форм, определенных равенствами (11) и (12), имеют вид:

$$D\mathfrak{d}_l^{(a)i} = [\omega_l^k,\ \mathfrak{d}_k^{(a)i}] + \sum_{c=1}^{a} [\mathfrak{d}_l^{(c)k},\ \mathfrak{d}_{(c)k}^{(a)i}] + [\omega^t,\ \mathfrak{d}_{lt}^{(a)i}] + \sum_{b=1}^{a} [\mathfrak{d}^{(b)k},\ \mathfrak{d}_{(b)kl}^{(a)i}] \tag{13}$$

и

$$D\mathfrak{d}_{(c)k}^{(a)i} = \sum_{b=c}^{a} [\mathfrak{d}_{(c)k}^{(b)l},\ \mathfrak{d}_{(b)l}^{(a)i}] + [\omega^l,\ \mathfrak{d}_{(c)lk}^{(a)i}] + \sum_{b=1}^{a} [\mathfrak{d}^{(c)l},\ \mathfrak{d}_{(c)k(b)l}^{(a)i}], \tag{14}$$

где

$$\mathfrak{d}_{lt}^{(a)i} = \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!}\,\omega_{k_1\ldots k_s lt}^i \sum_{(a_1+\ldots+a_s=a)} \frac{1}{a_1!\ldots a_s!}\, v^{(a_1)k_1}\ldots v^{(a_s)k_s}, \tag{15}$$

$$\mathfrak{d}_{(c)lt}^{(a)i} = \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!}\,\omega_{k_1\ldots k_s t}^i \sum_{(a_1+\ldots+a_s=a)} \frac{1}{a_1!\ldots a_s!}\,(\delta_c^{a_1}\delta_l^{k_1} v^{(a_2)k_2}\ldots v^{(a_s)k_s} +$$
$$+ \cdots + v^{(a_1)k_1}\ldots v^{(a_{s-1})k_{s-1}}\delta_c^{a_s}\delta_l^{k_s}) \tag{16}$$

и

$$\mathfrak{d}_{(c)k(b)l}^{(a)i} = \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!}\,\omega_{k_1\ldots k_s}^i \sum_{(a_1+\ldots+a_s=a)} \frac{1}{a_1!\ldots a_s!}\,(\delta_c^{a_1}\delta_k^{k_1}\delta_b^{a_2}\delta_l^{k_2} v^{(a_3)k_3}\ldots v^{(a_s)k_s} +$$
$$+ \cdots + v^{(a_1)k_1}\ldots v^{(a_{s-2})k_{s-2}}\delta_b^{a_{s-1}}\delta_l^{k_{s-1}}\delta_c^{a_s}\delta_k^{k_s}). \tag{17}$$

Если положим

$$\omega^i = \mathfrak{d}^{(0)i},\quad \omega_j^i = \mathfrak{d}_{(0)j}^{(0)i},\quad \mathfrak{d}_l^{(a)i} = \mathfrak{d}_{(0)l}^{(a)i},\quad \mathfrak{d}_{lt}^{(a)i} = \mathfrak{d}_{(0)l(0)t}^{(a)i}$$

и т. д., то структурные уравнения (8), (9), (13) и (14) примут вид

$$D\mathfrak{d}^{(a)i} = [\mathfrak{d}^{(c)k},\ \mathfrak{d}_{(c)k}^{(a)i}], \tag{18}$$

$$D\mathfrak{d}_{(c)k}^{(a)i} = [\mathfrak{d}_{(c)k}^{(b)l},\ \mathfrak{d}_{(b)l}^{(a)i}] + [\mathfrak{d}^{(b)l},\ \mathfrak{d}_{(c)k(b)l}^{(a)i}], \tag{19}$$

где

$$\mathfrak{d}^{(a)i}_{(c)k}=0 \ (c>a), \quad \mathfrak{d}^{(a)i}_{(c)k(b)l}=0 \ (c+b>a).$$

Очевидно, что

$$\mathfrak{d}^{(a)i}_{(c)k}=\frac{\partial \mathfrak{d}^{(a)i}}{\partial v^{(c)k}}, \quad \mathfrak{d}^{(a)i}_{(c)k(b)l}=\frac{\partial^2 \mathfrak{d}^{(a)i}}{\partial v^{(c)k}\,\partial v^{(b)l}}.$$

Оказывается, что формы

$$\mathfrak{d}^{(a)i}_{(c_1)k_1\ldots(c_s)k_s}=\frac{\partial^s \mathfrak{d}^{(a)i}}{\partial v^{(c_1)k_1}\ldots\partial v^{(c_s)k_s}}$$

имеют следующую структуру $\left(\right.$имеется в виду, что $\mathfrak{d}^{(a)i}_{(0)k}=\frac{\partial \mathfrak{d}^{(a)i}}{\partial v^{(0)k}}$, т. е. если дифференцирование ведется по $v^{(0)k}$, то дополнительный индекс „k“ добавляется к форме $\omega^i_{k_1\ldots k_s}\left.\right)$:

$$D\,\mathfrak{d}^{(a)i}_{(c_1)k_1\ldots(c_s)k_s}=\sum_{m=1}^{s}\frac{s!}{m!\,(s-m)!}\,[\mathfrak{d}^{(b)l}_{\{(c_1)k_1\ldots(c_m)k_m},\ \mathfrak{d}^{(a)i}_{(c_{m+1})k_{m+1}\ldots(c_s)k_s\}(b)l}]+$$
$$+[\mathfrak{d}^{(b)l},\ \mathfrak{d}^{(a)i}_{(c_1)k_1\ldots(c_s)k_s(b)l}]. \tag{20}$$

Скобки $\{\cdots\}$ означают циклирование относительно пар индексов $(c)k$. Заметим, что

$$\mathfrak{d}^{(a)i}_{(b)j}=\frac{a!}{b!\,(a-b)!}\,\mathfrak{d}^{(a-b)i}_{(0)j}. \tag{21}$$

2. *Группа $GL^p(n;\ 1;\ R)$ и экстензоры.* Группа преобразований векторов касательного пространства $T^{(p)}$ пространства $\overset{\circ}{L}{}^{(p)}_n$ является прямым произведением однопараметрической группы параллельных переносов $D\Theta^{(1)}=0$ и группы Ли $GL^p(n;\ 1;\ R)$, инвариантные формы которой имеют вид

$$\Theta^{(a)i}_{(c)k}=\mathfrak{d}^{(a)i}_{(c)k}\Big|_{\omega^i=0,\ \mathfrak{d}^{(a)i}=0}$$

и удовлетворяют структурным уравнениям (при помощи равенств (21) можно выделить базис из линейно независимых форм, существование которого вытекает из линейной независимости форм вида $\mathfrak{d}^{(a)i}_j$):

$$D\,\Theta^{(a)i}_{(c)k}=[\Theta^{(b)l}_{(c)k},\ \Theta^{(a)i}_{(b)l}]. \tag{22}$$

Группа Ли $GL^p(n;\ 1;\ R)$ имеет следующие подгруппы:

$$GL(n,\ R)\subset GL^2(n;\ 1;\ R)\subset\cdots\subset GL^{(p-1)}(n;\ 1;\ R)\subset GL^p(n;\ 1;\ R),$$

каждая из которых действует в соответствующем подпространстве пространства $T^{(p)}$. Инфинитезимальные преобразования векторов репера $\{e_{(0)i},\ e_{(1)i},\ \ldots$ $\ldots,\ e_{(p)i}\}$ пространства $T^{(p)}$ имеют вид

$$d e_{(a)i}=\Theta^{(c)k}_{(a)i}\,e_{(c)k},$$

а произвольного корепера $\{e^{(0)i},\ \ldots,\ e^{(p)i}\}$ дуального пространства $T^{*(p)}$ — вид

$$d e^{(a)i}=-\Theta^{(a)i}_{(c)k}\,e^{(c)k}.$$

Элементы тензорного произведения

$$\overset{q}{\otimes}T^{(p)}\overset{r}{\otimes}T^{*(p)}=\underbrace{T^{(p)}\otimes\cdots\otimes T^{(p)}}_{q}\otimes\underbrace{T^{*(p)}\otimes\cdots\otimes T^{*(p)}}_{r}$$

пространств $T^{(p)}$ и $T^{*(p)}$ называются q-раз экековариантными и r-раз экс-контравариантными экстензорами. Первые интегралы $T^{(b_1)j_1\dots(b_r)j_r}_{(a_1)i_1\dots(a_q)i_q}$ вполне интегрируемой системы дифференциальных уравнений

$$\Theta^{(b_1)j_1\dots(b_r)j_r}_{(a_1)i_1\dots(a_q)i_q} \equiv dT^{(b_1)j_1\dots(b_r)j_r}_{(a_1)i_1\dots(a_q)i_q} - \sum_{s=1}^{q} T^{(b_1)j_1\dots(b_r)j_r}_{(a_1)i_1\dots(c)k\dots(a_q)i_q}\Theta^{(c)k}_{(a_s)i_s} +$$

$$+\sum_{s=1}^{r} T^{(b_1)j_1\dots(c)k\dots(b_r)j_r}_{(a_1)i_1\dots(a_q)i_q}\Theta^{(b_s)j_s}_{(c)k} = 0 \tag{23}$$

являются координатами элементов пространства $\overset{q}{\otimes} T^{(p)} \overset{r}{\otimes} T^{*(p)}$, т. е. совокупность $n^{r+q}(p+1)^{r+q}$ чисел $T^{(b_1)j_1\dots(b_r)j_r}_{(a_1)i_1\dots(a_q)i_q}$ является компонентами экстензора $(q+r)$-той эксвалентности.

Если первые интегралы вполне интегрируемой системы $\Theta^{(a)i}_{(c)k}=0$ обозначим через $A^{(a)i}_{(c)k}$, то интегрируя вполне интегрируемую систему дифференциальных уравнений

$$\bar{\Theta}^{(b_1)j_1\dots(b_r)j_r}_{(a_1)i_1\dots(a_q)i_q} = \Theta^{(b_1)j_1\dots(b_r)j_r}_{(a_1)i_1\dots(a_q)i_q}$$

мы получим конечные законы преобразования компонент экстензора (такие же как и у Крэйга [11]):

$$\bar{T}^{(b_1)j_1\dots(b_r)j_r}_{(a_1)i_1\dots(a_q)i_q} = A^{(b_1)j_1}_{(c_1)k_1}\dots A^{(b_r)j_r}_{(c_r)k_r}\tilde{A}^{(d_1)h_1}_{(a_1)i_1}\dots\tilde{A}^{(d_q)h_q}_{(a_q)i_q}T^{(c_1)k_1\dots(c_r)k_r}_{(d_1)h_1\dots(d_q)h_q}, \tag{24}$$

где

$$\tilde{A}^{(a)k}_{(b)h}A^{(b)h}_{(c)l} = \delta^a_c\delta^k_l.$$

Система дифференциальных уравнений экстензорного поля $T^{(b_1)j_1\dots(b_r)j_r}_{(a_1)i_1\dots(a_q)i_q}$, определенного на $\mathring{L}^{(p)}_n$, имеет вид

$$dT^{(b_1)j_1\dots(b_r)j_r}_{(a_1)i_1\dots(a_q)i_q} - \sum_{s=1}^{q} T^{(b_1)j_1\dots(b_r)j_r}_{(a_1)i_1\dots(c)k\dots(a_q)i_q}\mathfrak{d}^{(c)k}_{(a_s)i_s} +$$

$$+\sum_{s=1}^{r} T^{(b_1)j_1\dots(c)k\dots(b_r)j_r}_{(a_1)i_1\dots(a_q)i_q}\mathfrak{d}^{(b_s)j_s}_{(c)k} = T^{(b_1)j_1\dots(b_r)j_r}_{(a_1)i_1\dots(a_q)i_q,\,(c)k}\mathfrak{d}^{(c)k}. \tag{25}$$

Если $T_{(a)i}$ эксковектор, то система величин $T_{(b)i}$ $(b=m,\ m+1,\ \dots,\ p)$ образует подобъект объекта $T_{(a)i}$, который называется эксковектором редуцированного ранга $\rho=p-m$. Очевидно, что эксковектор редуцированного ранга $\rho=p$ является ковектором, т. е. эксковектор всегда охватывает ковектор.

3. *Группа* $GL^{(s)p}(n;\ 1;\ R)$. Группа Ли $GL^{(s)p}(n;\ 1;\ R)$, определенная инвариантными формами $(\alpha=1,\ 2,\ \dots,\ s)$:

$$\Theta^{(a)i}_{(c_1)k_1\dots(c_\alpha)k_\alpha} = \mathfrak{d}^{(a)i}_{(c_1)k_1\dots(c_\alpha)k_\alpha}\Big|_{\omega^i=0,\ \mathfrak{d}^{(a)i}=0},$$

которые связаны структурными уравнениями

$$D\Theta^{(a)i}_{(c_1)k_1\dots(c_\alpha)k_\alpha} = \sum_{\beta=1}^{\alpha}\frac{\alpha!}{\beta!\,(\alpha-\beta)!}\left[\Theta^{(b)l}_{\{(c_1)k_1\dots(c_\beta)k_\beta},\ \Theta^{(a)i}_{(c_{\beta+1})k_{\beta+1}\dots(c_\alpha)k_\alpha\}(b)l}\right], \tag{26}$$

является дифференциальной группой порядка s пространства $\overset{\circ}{L}{}_n^{(p)}$ (параметризация фиксирована). Представление группы $G^{(s)p}(n;\ 1;\ R)$ (или ее подгруппы) характеризуют дифференциально-геометрические объекты пространства $\overset{\circ}{L}{}_n^{(p)}$. Если на $\overset{\circ}{L}{}_n^{(p)}$ задано некоторое поле дифференциально-геометрического объекта, то под геометрией пространства $\overset{\circ}{L}{}_n^{(p)}$ относительно этого объекта понимается совокупность инвариантов и инвариантных операций, построенных при помощи этого объекта. Мы рассмотрим только такие объекты, соответствующая геометрия которых эквивалентна геометрии систем обыкновенных дифференциальных уравнений высшего порядка.

§ 2. Геометрия путей

1. *Объект* $\overset{(p)}{H}$. Если в пространстве $\overset{\circ}{L}{}_n^{(p+1)}$ выбрана голономная система локальных координат, т. е. $v^{(a)k}=\frac{d^a x^k}{dt^a}$, то систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d^{p+1}x^i}{dt^{p+1}}+\overset{(p)}{H}{}^i(t,\ x^k,\ v^{(1)k},\ \ldots,\ v^{(p)k})=0 \tag{27}$$

можно рассматривать как конечные уравнения $(p+1)n+1$-мерной поверхности в $(p+2)n+1$-мерном пространстве $\overset{\circ}{L}{}_n^{(p+1)}$. Геометрия этой поверхности и называется аффинной геометрией нормальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений высшего порядка или геометрией путей высшего порядка (предполагается, что функции $\overset{(p)}{H}{}^i$ достаточно гладкие). Так как при замене локальных координат базы V_n пространства $\overset{\circ}{L}{}_n^{(p+1)}$ система функций $\overset{(p)}{H}{}^i$ преобразуется по транзитивному закону (он следует из условий инвариантности системы (27)):

$$\overset{(p)}{H}{}^{i'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\overset{(p)}{H}{}^i-(p+1)!\sum_{a=2}^{p+1}\frac{1}{a!}\frac{\partial^a x^{i'}}{\partial x^{k_1}\ldots\partial x^{k_a}}\times$$
$$\times\sum_{(p_1+\ldots+p_a=p+1)}\frac{1}{p_1!\ldots p_a!}\frac{d^{p_1}x^{k_1}}{dt^{p_1}}\cdots\frac{d^{p_a}x^{k_a}}{dt^{p_a}}, \tag{28}$$

то геометрия системы дифференциальных уравнений (27) эквивалентна той геометрии пространства $\overset{\circ}{L}{}_n^{(p)}$, которая в нем устанавливается при помощи дифференциально-геометрического объекта $\overset{(p)}{H}=\{\overset{(p)}{H}{}^i\}$. Аффинная геометрия путей высшего порядка получается в том случае, когда система дифференциальных уравнений (27) инвариантна относительно линейной замены параметра $t:\bar{t}=\rho t+\gamma$, $\rho>0$. Так как $\frac{d\bar{t}}{dt}=\rho$, то $\frac{d^a x^i}{d\bar{t}^a}=\frac{d^a x^i}{dt^a}(\rho)^a$ и условия инвариантности принимают вид

$$\overset{(p)}{\bar{H}}{}^i=\rho^{p+1}\overset{(p)}{H}{}^i, \tag{29}$$

где

$$\overset{(p)}{\bar{H}}{}^i=\overset{(p)}{H}{}^i(\bar{t},\ x^k,\ \rho v^{(1)k},\ \ldots,\ \rho^p v^{(p)k}).$$

Система дифференциальных уравнений дифференциально-геометрического объекта $\overset{(p)}{H}$, определенного в пространстве $\overset{\circ}{L}{}_n^{(p)}$, имеет вид:

$$d\overset{(p)}{H}{}^i+\overset{(p)}{H}{}^k\omega_k^i-\overset{(p)}{\varphi}{}^i=\overset{(p)}{H}{}_0^i\Theta+\sum_{c=0}^{p}\overset{(p)}{H}{}^i_{(c)k}\,\mathfrak{d}^{(c)k}, \tag{30}$$

где

$$\overset{(p)}{\varphi}{}^i=(p+1)!\sum_{a=2}^{p+1}\frac{1}{a!}\,\omega^i_{k_1\ldots k_a}\sum_{(p_1+\ldots+p_a=p+1)}\frac{1}{p_1!\ldots p_a!}\,v^{(p_1)k_1}\cdots v^{(p_a)k_a}. \tag{31}$$

2. *Геометрия путей Дугласа.* Геометрию путей второго порядка исследовал Ю. Дуглас [9], Л. Бервальд [8], В. Слебодзинский [14], А. Моор [12], А. Рапчак [13] и другие, причем в работах Л. Бервальда, А. Моора и А. Рапчака рассматривались пути метрического пространства. Геометрия путей второго порядка часто называется геометрией путей Дугласа.

Если $p=1$, то

$$D\overset{(1)}{\varphi}{}^i=2\,[\mathfrak{d}^{(1)k},\ \overset{(1)}{\varphi}{}^i_{(1)k}]+[\overset{(1)}{\varphi}{}^k,\ \omega_k^i]+[\omega^k,\ \overset{(1)}{\varphi}{}^i_k],$$

где

$$\overset{(1)}{\varphi}{}^i_k=v^{(1)l}v^{(1)h}\omega^i_{lhk},\quad \overset{(1)}{\varphi}{}^i_{(1)k}=v^{(1)l}\omega^i_{lk}$$

и продолжая систему (она получается из системы (30) при $p=1$):

$$d\overset{(1)}{H}{}^i+\overset{(1)}{H}{}^k\omega_k^i-\overset{(1)}{\varphi}{}^i=\overset{(1)}{H}{}_0^i\Theta+\overset{(1)}{H}{}^i_k\omega^k+{}'\overset{(1)}{H}{}^i_k\,\mathfrak{d}^{(1)k}, \tag{32}$$

где

$$\overset{(1)}{H}{}^i_{(0)k}=\overset{(1)}{H}{}^i_k,\quad \overset{(1)}{H}{}^i_{(1)k}={}'\overset{(1)}{H}{}^i_k\quad \text{и т. д.,}$$

мы получим

$$d\overset{(1)}{H}{}^i_0-\overset{(1)}{H}{}^i_0\,\Theta^{(1)}+\overset{(1)}{H}{}^k_0\,\omega_k^i=\overset{(1)}{H}{}^i_{00}\Theta+\overset{(1)}{H}{}^i_{0k}\omega^k+{}'\overset{(1)}{H}{}^i_{0k}\,\mathfrak{d}^{(1)k}, \tag{33}$$

$$d\overset{(1)}{H}{}^i_k-\overset{(1)}{H}{}^i_l\omega_k^l+\overset{(1)}{H}{}^l_k\omega_l^i-{}'\overset{(1)}{H}{}^i_l\mathfrak{d}_k^{(1)l}+\overset{(1)}{H}{}^l\omega^i_{lk}-\overset{(1)}{\varphi}{}^i_k=\overset{(1)}{H}{}^i_{0k}\Theta+\overset{(1)}{H}{}^i_{kl}\omega^l+{}'\overset{(1)}{H}{}^i_{kl}\mathfrak{d}^{(1)l}, \tag{34}$$

$$d'\overset{(1)}{H}{}^i_k-{}'\overset{(1)}{H}{}^i_l\omega_k^l+{}'\overset{(1)}{H}{}^l_k\omega_l^i-2\mathfrak{d}_k^{(1)i}={}'\overset{(1)}{H}{}^i_{k0}\Theta+{}'\overset{(1)}{H}{}^i_{lk}\omega^l+{}''\overset{(1)}{H}{}^i_{kl}\mathfrak{d}^{(1)l}, \tag{35}$$

причем

$$\overset{(1)}{H}{}^i_{kl}=\overset{(1)}{H}{}^i_{lk},\quad {}''\overset{(1)}{H}{}^i_{kl}={}''\overset{(1)}{H}{}^i_{lk}.$$

Величины $\overset{(1)}{H}{}^i_0$ образуют псевдовектор, обращение в нуль которого означает то, что $\overset{(1)}{H}{}^i$ не зависит от выбора параметра, т. е. когда соответствующая система дифференциальных уравнений имеет вид (в голономном репере):

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}+\overset{(1)}{H}{}^i(x,\ v^{(1)k})=0. \tag{36}$$

Частично продолжая (35), мы получим

$$d''\overset{(1)}{H}{}^i_{kh}-2\,''\overset{(1)}{H}{}^i_{k(l}\omega^l_{h)}+{}''\overset{(1)}{H}{}^l_{kh}\omega_l^i-2\omega^i_{kh}={}''\overset{(1)}{H}{}^i_{kh0}\Theta+{}''\overset{(1)}{H}{}^i_{klh}\omega^l+{}'''\overset{(1)}{H}{}^i_{khl}\mathfrak{d}^{(1)l}, \tag{37}$$

$$d'''\overset{(1)}{H}{}^i_{khl}+{}'''\overset{(1)}{H}{}^p_{khl}\omega_p^i-{}'''\overset{(1)}{H}{}^i_{phl}\omega_k^p-{}'''\overset{(1)}{H}{}^i_{kpl}\omega_h^p-{}'''\overset{(1)}{H}{}^i_{khp}\omega_l^p=$$

$$={}'''\overset{(1)}{H}{}^i_{khl0}\Theta+{}'''\overset{(1)}{H}{}^i_{khpl}\omega^p+{}''''\overset{(1)}{H}{}^i_{khlp}\mathfrak{d}^{(1)p}. \tag{38}$$

Отсюда следует, что величины

$$\check{\Gamma}^i_{kh} = \frac{1}{2}\, {}''\overset{(1)}{H}{}^i_{kh} \tag{39}$$

образуют объект аффинной связности (без кручения). Величины ${}^{*}\overset{(1)}{H}{}^i_{khl}$ образуют тензор, а величины

$$\check{\Gamma}^i_j = \frac{1}{2}\, {}'\overset{(1)}{H}{}^i_j \tag{40}$$

– объект линейной дифференциально-геометрической связности. Структура дифференциальных уравнений этого объекта была приведена в работе [1].

3. *Проективные преобразования объекта* $\overset{(1)}{H}$. Преобразование объекта $\overset{(1)}{H}$:

$$\overline{\overset{(1)}{H}}{}^i = \overset{(1)}{H}{}^i + v^{(1)i} H, \tag{41}$$

где H – произвольная скалярная функция, т.е.

$$dH = H_0 \Theta + H_k \omega^k + {}'H_k \mathfrak{d}^{(1)k}, \tag{42}$$

называется проективным. Так как

$$\tilde{\mathfrak{d}}^{(1)k} = \rho\, \mathfrak{d}^{(1)k} + v^{(1)k} d\rho, \tag{43}$$

то условия инвариантности этого уравнения, в силу того, что $\tilde{H} = \rho H$, имеют вид

$$\tilde{H}_0 = \rho H_0, \quad \tilde{H}_k = \rho H_k, \quad {}'\tilde{H}_k = {}'H_k, \quad {}'H_k v^{(1)k} = H. \tag{44}$$

Частичное продолжение системы (42) дает

$$d' H_k - {}'H_s \omega^s_k = {}'H_{k0} \Theta + {}'H_{kl} \omega^l + {}''H_{lk} \mathfrak{d}^{(1)l}. \tag{45}$$

Отсюда, в силу (44), мы получаем, в частности, что

$$''H_{kl} v^{(1)l} = 0. \tag{46}$$

Из (31) следует, что

$$\overline{\overset{(1)}{H}}{}^i_0 = \overset{(1)}{H}{}^i_0 + v^{(1)i} H_0,$$

$$\overline{\overset{(1)}{H}}{}^i_k = \overset{(1)}{H}{}^i_k + v^{(1)i} H_k,$$

$$'\overline{\overset{(1)}{H}}{}^i_k = {}'\overset{(1)}{H}{}^i_k + \delta^i_k H + v^{(1)i}\, {}'H_k. \tag{47}$$

Меняя скалярную функцию H, мы из дифференциально-геометрического объекта $\overset{(1)}{H}{}^i$ получаем множество объектов $\{\overline{\overset{(1)}{H}}{}^i\}$ такой же структуры как и $\overset{(1)}{H}{}^i$. Объекты аффинных связностей, соответствующие любым двум объектам этого множества, связаны соотношениями:

$$\overline{\Gamma}^i_{kh} = \Gamma^i_{kh} + \frac{1}{2}\,(\delta^i_k\, {}'H_h + \delta^i_h\, {}'H_k) + v^{(1)i}\, {}''H_{kh}. \tag{48}$$

Отсюда, в силу (46), следует, что

$$'H_h = \frac{2}{n+1}\,(\overline{\Gamma}^k_{kh} - \Gamma^k_{kh}). \tag{49}$$

Дифференцируя эти соотношения и пользуясь линейной независимостью главных форм, в частности, получим

$$''H_{kh} = \frac{2}{n+1}\,({}'\overline{\Gamma}^l_{k,lh} - {}'\Gamma^l_{k,lh}), \tag{50}$$

где

$$'\bar{\Gamma}^{l}_{k,lh}=\frac{1}{2}\,{}''\overset{(1)}{\bar{H}}{}^{i}_{klh},\qquad '\Gamma^{i}_{k,lh}=\frac{1}{2}\,{}''\overset{(1)}{H}{}^{i}_{klh}.$$

Из (48)–(50) следует, что система величин

$$\Pi^{i}_{kh}=\Gamma^{i}_{kh}-\frac{1}{n+1}\left(\delta^{i}_{k}\Gamma^{l}_{lh}+\delta^{i}_{h}\Gamma^{l}_{lk}\right)-\frac{v^{(1)\,l}}{n+1}\,{}''\overset{(1)}{H}{}^{i}_{lkh} \tag{51}$$

не зависит от выбора скалярной функции H. Дифференцируя эти равенства мы получим

$$d\Pi^{i}_{kh}-\Pi^{i}_{lh}\omega^{l}_{k}-\Pi^{i}_{kl}\omega^{l}_{h}+\Pi^{l}_{kh}\omega^{i}_{l}-\omega^{i}_{kh}+\frac{1}{n+1}\left(\delta^{i}_{k}\omega_{h}+\delta^{i}_{h}\omega_{k}\right)=$$

$$=\Pi^{i}_{0,kh}\Theta+\Pi^{i}_{l,kh}\omega^{l}+{}'\Pi^{i}_{l,kh}\mathfrak{d}^{(1)\,l}, \tag{52}$$

где $\omega_k=\omega^{l}_{lk}$, а величины $\Pi^{i}_{0,kh}$, $\Pi^{i}_{l,kh}$ и $'\Pi^{i}_{l,kh}$ определяются через компоненты трижды продолженного дифференциально-геометрического объекта $\overset{(1)}{H}{}^{i}$. Структура дифференциальных уравнений (52) показывает, что величины Π^{i}_{jk} являются параметрами Томаса, т. е. образуют объект проективной связности. Величины $'\Pi^{i}_{j,kh}$ образуют тензор.

§ 3. Ассоциированные пространства проективной связности

Структурные уравнения главного расслоенного пространства $E(V_n, S)$, фундаментальная группа которого является группой проективных преобразований, имеют вид [5]:

$$D\Theta^{i}_{0}=[\Theta^{0}_{0},\ \Theta^{i}_{0}]+\Theta^{k}_{0},\ \Theta^{i}_{k}],$$

$$D\Theta^{i}_{j}=[\Theta^{0}_{j},\ \Theta^{i}_{0}]+[\Theta^{k}_{j},\ \Theta^{i}_{k}]+[\Theta^{k}_{0},\ \Theta^{i}_{jk}],$$

$$D\Theta^{0}_{j}=[\Theta^{0}_{j},\ \Theta^{0}_{0}]+[\Theta^{k}_{j},\ \Theta^{0}_{k}]+[\Theta^{k}_{0},\ \Theta^{0}_{jk}],$$

$$D\Theta^{0}_{0}=[\Theta^{k}_{0},\ \Theta^{0}_{k}]. \tag{53}$$

Формы инфинитезимальной связности этого главного расслоенного пространства имеют вид

$$\overset{*}{\Theta}{}^{i}_{0}=\Theta^{i}_{0},$$

$$\overset{*}{\Theta}{}^{i}_{j}=\Theta^{i}_{j}+\overset{\circ}{\gamma}{}^{i}_{jk}\omega^{k},$$

$$\overset{*}{\Theta}{}^{0}_{j}=\Theta^{0}_{j}+\overset{\circ}{\gamma}_{jk}\omega^{k},$$

$$\overset{*}{\Theta}{}^{0}_{0}=\Theta^{0}_{0}+\overset{\circ}{\gamma}_{k}\omega^{k},$$

причем величины $(\overset{\circ}{\gamma}{}^{i}_{jk},\ \overset{\circ}{\gamma}_{ij},\ \overset{\circ}{\gamma}_{k})$ образуют дифференциально-геометрический объект (объект проективной связности Картана) следующей структуры:

$$d\overset{\circ}{\gamma}{}^{k}_{ij}-\overset{\circ}{\gamma}{}^{k}_{lj}\Theta^{l}_{i}-\overset{\circ}{\gamma}{}^{k}_{il}\Theta^{l}_{j}+\overset{\circ}{\gamma}{}^{l}_{ij}\Theta^{k}_{l}+\overset{\circ}{\gamma}{}^{k}_{ij}\Theta^{0}_{0}-\Theta^{k}_{ij}=\overset{\circ}{\gamma}{}^{k}_{ij,s}\Theta^{s}_{0},$$

$$d\overset{\circ}{\gamma}_{ij}-\overset{\circ}{\gamma}_{lj}\Theta^{l}_{i}-\overset{\circ}{\gamma}_{il}\Theta^{l}_{j}+2\overset{\circ}{\gamma}_{ij}\Theta^{0}_{0}-2\overset{\circ}{\gamma}_{(i}\Theta^{0}_{j)}+\overset{\circ}{\gamma}{}^{k}_{ij}\Theta^{0}_{k}-\Theta^{0}_{ij}=\overset{\circ}{\gamma}_{ij,k}\Theta^{k}_{0},$$

$$d\overset{\circ}{\gamma}_{i}-\overset{\circ}{\gamma}_{l}\Theta^{l}_{i}+\overset{\circ}{\gamma}_{i}\Theta^{0}_{0}=\overset{\circ}{\gamma}_{i,k}\Theta^{k}_{0}. \tag{54}$$

Когда $\overset{\circ}{\gamma}_{i}=0$, то величины $(\overset{\circ}{\gamma}{}^{i}_{jk},\ \overset{\circ}{\gamma}_{ij})$ образуют объект центропроективной связности [7]. Возникает следующий вопрос: существует ли объект $(\gamma^{i}_{jk},\ \gamma_{ij},\ \gamma_{i})$

на $\mathring{L}_n^{(1)}$ такой же структуры, как и $(\mathring{\gamma}_{jk}^i, \mathring{\gamma}_{ij}, \mathring{\gamma}_i)$. Преобразуем систему дифференциальных уравнений (52):

$$d\Pi_{kh}^i - \Pi_{lh}^i\left(\omega_k^l - \frac{1}{n+1}\,\delta_k^l\omega\right) - \Pi_{kl}^i\left(\omega_h^l - \frac{1}{n+1}\,\delta_h^l\omega\right) +$$

$$+\Pi_{kh}^l\left(\omega_l^i - \frac{1}{n+1}\,\delta_l^i\omega\right) + \Pi_{kh}^i\left(\frac{\omega}{n+1}\right) - \left(\omega_{kh}^i - \frac{1}{n+1}\,\delta_k^i\omega_h - \frac{1}{n+1}\,\delta_h^i\omega_k\right) =$$

$$= \Pi_{0,kh}^i\Theta + \Pi_{l,kh}^i\omega^l + {}'\Pi_{l,kh}^i\mathfrak{d}^{(1)l}, \tag{52'}$$

где ω – произвольная пфаффовая форма. Если положим $\Theta_0^i = \omega^i$, то

$$[\Theta_0^0,\ \Theta_0^i] + [\Theta_0^k,\ \Theta_k^i] = [\Theta_0^k,\ \omega_k^i]$$

и

$$\Theta_k^i - \delta_k^i\,\Theta_0^0 = \omega_k^i + \rho_{ks}^i\,\omega^s,$$

где $\rho_{ks}^i = \rho_{sk}^i$. Далее мы будем считать, что этот тензор равен нулю и

$$\Theta_j^i = \omega_j^i - \frac{1}{n+1}\,\delta_j^i\omega.$$

Тогда

$$\Theta_0^0 = -\frac{1}{n+1}\,\omega$$

и можно положить, что $\omega = \omega_k^k$. Отсюда следует, что

$$\Theta_i^0 = -\frac{1}{n+1}\,\omega_i,$$

$$\Theta_{jk}^i = \omega_{jk}^i - \frac{1}{n+1}\,\delta_j^i\omega_k - \frac{1}{n+1}\,\delta_k^i\omega_j,$$

$$\Theta_{jk}^0 = -\frac{1}{n+1}\,\omega_{jkl}^l \equiv -\frac{1}{n+1}\,\omega_{jk}$$

и уравнения (52′) имеют такую же структуру как и дифференциальные уравнения объекта $\mathring{\gamma}_{jk}^i$, т. е. можно положить

$$\gamma_{ij}^k = \Pi_{ij}^k. \tag{55}$$

Продолжение системы (52′) дает (при $\overset{(1)}{H_0^i} = 0$):

$$\nabla\Pi_{l,kh}^i - \Pi_{sh}^i\omega_{kl}^s - \Pi_{ks}^i\omega_{hl}^s + \Pi_{kh}^s\omega_{sl}^i - \omega_{khl}^i + \frac{1}{2}\,(\delta_k^i\,\omega_{hl} + \delta_h^i\,\omega_{kl}) -$$

$$-{}'\Pi_{s,kh}^i\,\mathfrak{d}_l^{(1)s} = \Pi_{sl,kh}^i\omega^s + {}'\Pi_{sl,kh}^i\mathfrak{d}^{(1)s}.$$

Очевидно, что величины ($\mathring{\nabla}_k$ – символ базисной производной относительно объекта Γ_j^i)

$$\mathring{\Pi}_{ij} = \frac{1}{n+1}\,(\mathring{\nabla}_k\Pi_{ij}^k - \Pi_{ih}^k\Pi_{jk}^h) \tag{56}$$

удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\nabla\mathring{\Pi}_{ij} - \frac{1}{n+1}\,\Pi_{ij}^k\omega_k + \frac{1}{n+1}\,\omega_{ij} = \mathring{\Pi}_{s,ij}\omega^s - {}'\mathring{\Pi}_{s,ij}\mathfrak{d}^{(1)s} \tag{57}$$

или

$$d\mathring{\Pi}_{ij} - \mathring{\Pi}_{sj}\Theta_i^s - \mathring{\Pi}_{is}\Theta_j^s + 2\mathring{\Pi}_{ij}\Theta_0^0 + \Pi_{ij}^k\Theta_k^0 - \Theta_{ij}^0 = \mathring{\Pi}_{s,ij}\Theta_0^s + {}'\mathring{\Pi}_{s,ij}\,\mathfrak{d}^{(1)s}, \tag{57'}$$

т. е. величины Π_{ij}^k и $\mathring{\Pi}_{ij}$ образуют объект центропроективной связности. Пространство центропроективной связности, соответствующее этому объекту, мы будем называть ассоциированным пространством центропроективной связности пространства $\mathring{L}_n^{(1)}$.

Для того, чтобы построить объект $(\gamma^i_{jk}, \gamma_{ij}, \gamma_i)$, сначала нужно построить ковектор γ_i. Оказывается, что такой ковектор можно определить различными способами и мы приведем только некоторые из них.

Величины

$$\mathfrak{R}^i_{jk} = 2\overset{\circ}{\nabla}_{[j}\Gamma^i_{k]}$$

образуют тензор, т. е. тензор кривизны связности Γ^i_j (иногда он называется основным тензором аффинной кривизны) и

$$\mathfrak{R}_i = \mathfrak{R}^k_{ik}$$

является ковектором. Другие ковекторы можно получить, например, следующим образом:

$$K_i = K^h_i \mathfrak{R}_h, \quad W_i = W^h_i \mathfrak{R}_h, \quad \mathfrak{K}_i = W^h_i K_h,$$

где K^i_j – тензор аффинного отклонения и W^i_j – тензор проективного отклонения. Эти тензоры определяются такими же формулами как и у Дугласа, но только частные производные заменяются производными Пфаффа (см. [9]).

Величины $''\overset{(1)}{H}{}^i_{jkl}$ образуют тензор. Будем рассматривать тот случай, когда тензор

$$\mathfrak{S}_{ij} = {}''\overset{(1)}{H}{}^k_{ijk} \tag{58}$$

не вырожденный. Тогда ($\mathfrak{S} = \det \| \mathfrak{S}_{ij} \|$)

$$d \ln \sqrt{|\mathfrak{S}|} - \omega = \mathfrak{S}_i \omega^i + {}'\mathfrak{S}_i \mathfrak{d}^{(1)i}$$

и величины

$$c_i = \overset{\circ}{\nabla}_i (\ln \sqrt{|\mathfrak{S}|}) \tag{59}$$

образуют дифференциально-геометрический объект следующей структуры

$$\nabla c_i - \omega_i = c_{k,i}\omega^k + {}'c_{k,i}\mathfrak{d}^{(1)k}.$$

Очевидно, что величины

$$a_{ij} = \frac{2}{n+1} c_{(i}\gamma_{j)}, \tag{60}$$

где γ_i один из ковекторов $\mathfrak{R}_i$, K_i, W_i, $\mathfrak{K}_i$, являются решением системы

$$\nabla a_{ij} - \frac{2}{n+1}\gamma_{(i}\omega_{j)} = a_{k,ij}\omega^k + {}'a_{k,ij}\mathfrak{d}^{(1)k}. \tag{61}$$

Тогда величины

$$\Pi_{ij} = \overset{\circ}{\Pi}_{ij} + \frac{2}{n+1} c_{(i}\gamma_{j)} \tag{62}$$

являются решениями системы

$$\nabla \Pi_{ij} - \frac{1}{n+1}\Pi^k_{ij}\omega_k - \frac{2}{n+1}\gamma_{(i}\omega_{j)} + \frac{1}{n+1}\omega_{ij} = \Pi_{k,ij}\omega^k + {}'\Pi_{k,ij}\mathfrak{d}^{(1)k}, \tag{63}$$

т. е. можно положить, что $\gamma_{ij} = \Pi_{ij}$. Существуют и другие дифференциально-геометрические объекты, имеющие структуру объекта c_i (например, объект Γ^k_{ik}). Таким образом, в пространстве $\overset{\circ}{L}{}^{(1)}_n$ существует пучек объектов проективной связности, который зависит от выбора ковектора γ_i и свернутого объекта аффинной связности. Отсюда следует, что пространства проективной связности ассоциируются с пространством $\overset{\circ}{L}{}^{(1)}_n$ различными инвариантными способами. Существование таких пространств впервые было отмечено Г. Ф. Лаптевым [6].

§ 4. Неголономные ковариантные производные Слебодзинского

Пусть имеем векторное поле ξ^i, определенное системой дифференциальных уравнений

$$\nabla\xi^i=\xi^i_0\Theta+\xi^i_k\omega^k+{}'\xi^i_k\mathfrak{d}^{(1)k}. \tag{64}$$

Продолжение этой системы дает:

$$\begin{gathered}\nabla\xi^i_0-\xi^i_0\Theta^{(1)}=\xi^i_{00}\Theta+\xi^i_{0k}\omega^k+{}'\xi^i_{0k}\mathfrak{d}^{(1)k},\\ \nabla\xi^i_k+\xi^l\omega^i_{lk}-{}'\xi^i_l\mathfrak{d}^{(1)l}_k=\xi^i_{0k}\Theta+\xi^i_{kl}\omega^l+{}'\xi^i_{kl}\mathfrak{d}^{(1)l},\\ \nabla{}'\xi^i_k={}'\xi^i_{0k}\Theta+{}'\xi^i_{lk}\omega^l+{}''\xi^i_{kl}\mathfrak{d}^{(1)l}.\end{gathered} \tag{65}$$

Каждая из систем величин (это следует из дифференциальных уравнений (32), (35), (39) и (65)):

$$\begin{gathered}\overset{(1)}{\nabla}_k\xi^i=\xi^i_k+\Gamma^i_{ks}\xi^s-\Gamma^s_k\,{}'\xi^i_s,\\ \overset{(2)}{\nabla}_k\xi^i={}'\xi^i_k,\\ \overset{(3)}{\nabla}_0\xi^i=\xi^i_0+\Gamma^i_s\xi^s+v^{(1)s}\xi^i_s-\overset{(1)}{H}{}^s\,{}'\xi^i_s\end{gathered} \tag{66}$$

образует тензор. Эти тензоры назовем неголономными ковариантными производными Слебодзинского (соответствующего рода) векторного поля (см. [14]). Для голономного случая эти ковариантные производные тензорными методами впервые были получены Слебодзинским. Таким образом, в пространстве $\mathring{L}^{(1)}_n$, в котором задан объект $\overset{(1)}{H}{}^i$, существуют объекты, при помощи которых можно ввести неголономное ковариантное дифференцирование тензорных величин.

Введем новые пфаффовые формы

$$\begin{gathered}\mathring{\omega}^i=\omega^i-v^{(1)i}\Theta,\\ \mathring{\mathfrak{d}}^{(1)i}=\mathfrak{d}^{(1)i}+\Gamma^i_k\mathring{\omega}^k+\overset{(1)}{H}{}^i\Theta,\\ \mathring{\omega}^i_j=\omega^i_j+\Gamma^i_{jk}\mathring{\omega}^k.\end{gathered} \tag{67}$$

Если $\Theta=0$, т. е. когда параметризация линейных элементов пространства $\mathring{L}^{(1)}_n$ фиксирована, то формы ω^i, $\mathring{\mathfrak{d}}^{(1)i}$ и $\mathring{\omega}^i_j$ определяют пространство путей с усеченной аффинной связностью (она инвариантным образом присоединена к объекту $\overset{(1)}{H}{}^i$) (см. [1]). Систему дифференциальных уравнений (64), в силу (61), можно представить в виде

$$\mathring{\nabla}\xi^i=\overset{(1)}{\nabla}_k\xi^i\mathring{\omega}^k+\overset{(2)}{\nabla}_k\xi^i\mathring{\mathfrak{d}}^{(1)k}+\overset{(3)}{\nabla}_0\xi^i\Theta. \tag{64'}$$

Отсюда и следует, что пфаффовые формы Θ, $\mathring{\omega}^i$, $\mathring{\mathfrak{d}}^{(1)i}$, $\mathring{\omega}^i_j$ являются формами той связности, которая соответствует ранее упомянутому процессу ковариантного дифференцирования.

Дифференцируя (67) внешним образом, мы получим

$$\begin{gathered}D\mathring{\omega}^i-[\mathring{\omega}^k,\ \mathring{\omega}^i_k]=[\Theta,\ \mathring{\mathfrak{d}}^{(1)i}],\\ D\mathring{\mathfrak{d}}^{(1)i}-[\mathring{\mathfrak{d}}^{(1)s},\ \mathring{\omega}^i_s]=\frac{1}{2}\,\mathfrak{R}^i_{kh}[\mathring{\omega}^k,\ \mathring{\omega}^h]+\mathfrak{S}^i_k\,[\Theta,\ \mathring{\omega}^k],\\ D\mathring{\omega}^i_j-[\mathring{\omega}^k_j,\ \mathring{\omega}^i_k]=\frac{1}{2}\,\mathfrak{R}^i_{jkh}[\mathring{\omega}^k,\ \mathring{\omega}^h]+\mathfrak{S}^i_{jkh}[\mathring{\mathfrak{d}}^{(1)k},\ \mathring{\omega}^h]+\mathfrak{S}^i_{jk}[\Theta,\ \mathring{\omega}^k],\\ \mathfrak{R}^i_{jkh}=2\,(\mathring{\nabla}_{[k}\Gamma^i_{h]j}-\Gamma^l_{j[k}\Gamma^i_{h]l}),\end{gathered} \tag{68}$$

где тензоры $\mathfrak{S}^i_k$ и $\mathfrak{S}^i_{jk}$ имеют вид ($\mathfrak{S}^i_{jkh} = {}'\Gamma^i_{k,jh}$)

$$\mathfrak{S}^i_k = \Gamma^i_{0,k} - \overset{(1)}{H}{}^i_k + \overset{(1)}{H}{}^i_k + \Gamma^l_k \Gamma^i_l - \overset{(1)}{H}{}^l \Gamma^i_{kl} + \Gamma^i_{l,k} v^{(1)l}, \tag{69}$$

$$\mathfrak{S}^i_{jk} = \Gamma^i_{0,jk} - {}'\Gamma^i_{l,jk} \overset{(1)}{H}{}^l + \Gamma^l_{jk} \Gamma^i_l - \Gamma^l_j \Gamma^i_{lk} + \Gamma^i_{l,jk} v^{(1)l} - \Gamma^i_{k,j}. \tag{70}$$

§ 5. Геометрия путей высшего порядка

Дифференцируя внешним образом (31), мы получим ($p > 1$)

$$D\overset{(p)}{\varphi}{}^i = [\overset{(p)}{\varphi}{}^k, \omega^i_k] + [\omega^k, \overset{(p)}{\varphi}{}^i_{(0)k}] + \sum_{a=1}^{p} [\mathfrak{d}^{(a)k}, \overset{(p)}{\varphi}{}^i_{(a)k}], \tag{71}$$

где

$$\overset{(p)}{\varphi}{}^i_{(a)k} = \frac{\partial \overset{(p)}{\varphi}{}^i}{\partial v^{(a)k}} \qquad (a = 0,\ 1,\ \ldots,\ p). \tag{72}$$

Для того, чтобы найти продолженные объекты объекта $\overset{(p)}{H}{}^i$, необходимо иметь структуру форм следующего вида:

$$\overset{(p)}{\varphi}{}^i_{(a_1)k_1 \ldots (a_s)k_s} = \frac{\partial^s \overset{(p)}{\varphi}{}^i}{\partial v^{(a_1)k_1} \ldots \partial v^{(a_s)k_s}}. \tag{73}$$

Заметим, что формы $\overset{(p)}{\varphi}{}^i_{(a)k}$ и $\mathfrak{d}^{(a)}_{(b)}{}^i_k$ связаны следующими соотношениями: $a = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ b$):

$$\overset{(p)}{\varphi}{}^i_{(p+a-b)j} = \frac{a!\,(p+1)!}{(b+1)!\,(p+a-b)!}\, \mathfrak{d}^{(b+1)\,i}_{(a)j}. \tag{74}$$

Очевидно, что (это следует из соотношений (21))

$$\mathfrak{d}^{(a)\,i}_{(a)j_1 \ldots j_s} = \omega^i_{j_1 \ldots j_s} \qquad \text{(для любого } a). \tag{75}$$

Алгебраическое дифференцирование соотношений (74) дает:

$$\overset{(p)}{\varphi}{}^i_{(p+a-b)j(a_1)k_1 \ldots (a_r)k_r} = \frac{a!\,(p+1)!}{(b+1)!\,(p+a-b)!}\, \mathfrak{d}^{(b+1)\,i}_{(a)j(a_1)k_1 \ldots (a_r)k_r}. \tag{76}$$

Если $\mathfrak{d}^{(b+1)\,i}_{(a)j(a_1)k_1 \ldots (a_r)k_r} \neq 0$, то $a + a_1 + \cdots + a_r \leqslant b + 1$ и при $a = b$ отличны от нуля только формы $\mathfrak{d}^{(a+1)i}_{(a)j(1)k_1(0)k_2 \ldots (0)k_r}$. При помощи структурных уравнений (19) и соотношений (76) можно получить структурные уравнения для (73). Эти структурные уравнения можно получить и непосредственно продолжая уравнения (71), т. е.

$$D\overset{(p)}{\varphi}{}^i_{(a)k} = [\mathfrak{d}^{(c)}_{(a)}{}^h_k, \overset{(p)}{\varphi}{}^i_{(c)h}] + [\overset{(p)}{\varphi}{}^h_{(a)k}, \omega^i_h] + [\overset{(p)}{\varphi}{}^h, \mathfrak{d}^{(0)}_{(a)}{}^i_{k(0)h}] + [\mathfrak{d}^{(c)h}, \overset{(p)}{\varphi}{}^i_{(a)k(c)h}], \tag{77}$$

$$\begin{aligned} D\overset{(p)}{\varphi}{}^i_{(a)k(c)h} = {} & [\mathfrak{d}^{(c)}_{(a)}{}^l_k, \overset{(p)}{\varphi}{}^i_{(b)h(c)l}] + [\mathfrak{d}^{(c)}_{(b)}{}^l_h, \overset{(p)}{\varphi}{}^i_{(a)k(c)l}] + [\mathfrak{d}^{(c)}_{(a)}{}^l_{k(b)h}, \overset{(p)}{\varphi}{}^i_{(c)l}] + \\ & + [\overset{(p)}{\varphi}{}^l_{(a)k}, \mathfrak{d}^{(0)}_{(b)}{}^i_{h(0)l}] + [\overset{(p)}{\varphi}{}^l_{(b)h}, \mathfrak{d}^{(0)}_{(a)}{}^i_{k(0)l}] + [\overset{(p)}{\varphi}{}^l, \mathfrak{d}^{(0)}_{(a)}{}^i_{k(b)h(0)l}] + \\ & + [\mathfrak{d}^{(c)l}, \overset{(p)}{\varphi}{}^i_{(a)k(b)h(c)l}]. \end{aligned} \tag{78}$$

Продолжая систему (30), мы получим (считаем, что $\overset{(p)}{H}{}^i_0=0$)

$$d\overset{(p)}{H}{}^i_{(a)k}-\overset{(p)}{H}{}^i_{(e)h}\,\mathfrak{d}^{(e)\,h}_{(a)\,k}+\overset{(p)}{H}{}^h_{(a)k}\,\omega^i_h+\overset{(p)}{H}{}^h\,\mathfrak{d}^{(0)\,i}_{(a)\,k\,(0)\,h}-\overset{(p)}{\varphi}{}^i_{(a)k}=\sum_{e=0}^{p}\overset{(p)}{H}{}^i_{(e)h(a)k}\,\mathfrak{d}^{(e)h}, \tag{79}$$

$$\begin{aligned}&d\overset{(p)}{H}{}^i_{(a)k(b)h}-\overset{(p)}{H}{}^i_{(e)l(b)h}\,\mathfrak{d}^{(e)\,l}_{(a)\,k}-\overset{(p)}{H}{}^i_{(a)k(c)l}\,\mathfrak{d}^{(c)\,l}_{(b)\,h}+\overset{(p)}{H}{}^l_{(a)k(b)h}\,\omega^i_l-\overset{(p)}{H}{}^i_{(c)l}\,\mathfrak{d}^{(c)\,l}_{(a)\,k\,(b)\,h}+\\&+\overset{(p)}{H}{}^l_{(a)k}\,\mathfrak{d}^{(0)\,i}_{(b)\,h\,(0)\,l}+\overset{(p)}{H}{}^l_{(b)h}\,\mathfrak{d}^{(0)\,i}_{(a)\,k\,(0)\,l}+\overset{(p)}{H}{}^l\,\mathfrak{d}^{(0)\,i}_{(a)\,k\,(b)\,h\,(0)\,l}-\overset{(p)}{\varphi}{}^i_{(a)k(b)h}=\\&=\sum_{e=0}^{p}\overset{(p)}{H}{}^i_{(e)l(a)k(b)h}\,\mathfrak{d}^{(e)l}\qquad (a,\ b=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p),\end{aligned} \tag{80}$$

где

$$\overset{(p)}{H}{}^i_{(a)k(b)h}=\overset{(p)}{H}{}^i_{(b)h(a)k},\quad \overset{(p)}{H}{}^i_{(e)k(b)h(e)l}=\overset{(p)}{H}{}^i_{(b)h(a)k(e)l}=\overset{(p)}{H}{}^i_{(a)k(e)l(b)h}.$$

Для того, чтобы построить объекты связностей, аналогичные объектам (40) и (41) (для $p=1$), необходимо знать структуру дифференциальных уравнений искомых объектов.

Пфаффовые формы

$$\overset{*}{\mathfrak{d}}{}^{(a)i}=\mathfrak{d}^{(a)i}+\sum_{c=0}^{a-1}\Gamma^{(a)\,i}_{(c)\,k}\,\mathfrak{d}^{(c)k}\qquad (a=1,\ 2,\ \ldots,\ p) \tag{81}$$

определяют линейную дифференциально-геометрическую связность пространства $\overset{\circ}{L}{}^{(p)}_n$ тогда и только тогда, когда дифференциально-геометрический объект $\Gamma^{(a)\,i}_{(c)\,k}$ $(c<a)$ имеет следующую структуру:

$$d\Gamma^{(a)\,i}_{(c)\,k}+\Gamma^{(a)\,l}_{(c)\,k}\,\omega^i_l-\Gamma^{(a)\,i}_{(b)\,l}\,\mathfrak{d}^{(b)\,l}_{(c)\,k}-\mathfrak{d}^{(a)\,i}_{(c)\,k}=\sum_{b=0}^{p}\Gamma^{(a)\,i}_{(b)\,l\,(c)\,k}\,\mathfrak{d}^{(b)l}. \tag{82}$$

Пфаффовые формы $(m\leqslant p)$:

$$\overset{*}{\omega}{}^i_j=\omega^i_j+\sum_{a=0}^{m}\Gamma^i_{j(a)k}\,\mathfrak{d}^{(a)k} \tag{83}$$

являются формами аффинной связности тогда и только тогда, когда величины $\Gamma^i_{j(a)k}$ $(a=0,\ 1,\ \ldots,\ m)$ образуют дифференциально-геометрический объект следующей структуры:

$$d\Gamma^i_{j(a)k}-\Gamma^i_{l(a)k}\,\omega^l_j+\Gamma^l_{j(a)k}\,\omega^i_l-\Gamma^i_{j(b)l}\,\mathfrak{d}^{(b)\,l}_{(a)\,k}-\mathfrak{d}^{(0)\,i}_{(a)\,k\,(0)\,j}=\Gamma^i_{(b)lj(a)k}\,\mathfrak{d}^{(b)l}, \tag{84}$$

который состоит из объекта аффинной связности $\Gamma^i_{j(0)k}$ (это следует из того, что $\mathfrak{d}^{(0)\,i}_{(0)\,k\,(0)\,j}=\omega^i_{kj}$) и экстензора $\Gamma^i_{j(a)k}$ $(a\neq 0)$. Если $p=1$, то экстензор $\Gamma^i_{j(a)k}$ является тензором. В общем случае экстензор $\Gamma^i_{j(a)k}$ $(a\neq 0)$ охватывает тензор $\Gamma^i_{j(m)k}$. Число $p-m$ будем называть порядком усеченности рассматриваемой связности.

Систему дифференциальных уравнений (82), в силу (74), можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}&d\Gamma^{(a+1)\,i}_{(0)\,k}+\Gamma^{(a+1)\,l}_{(0)\,k}\,\omega^i_l-\Gamma^{(a+1)\,i}_{(0)\,l}\,\omega^l_k-\\&-\frac{(a+1)!\,(p-a)!}{(p+1)!}\overset{(p)}{\varphi}{}^i_{(p-a)k}=\sum_{c=0}^{p}\Gamma^{(a+1)\,i}_{(c)\,l\,(0)\,k}\,\mathfrak{d}^{(c)l},\end{aligned} \tag{82$'_0$}$$

$$d\Gamma^{(a+1)i}_{(b)k}+\Gamma^{(a+1)l}_{(b)k}\omega^i_l-\Gamma^{(a+1)i}_{(e)l}\mathfrak{d}^{(e)l}_{(b)k}-\frac{(a+1)!\,(p+b-a)!}{b!\,(p+1)!}\overset{(p)}{\varphi}{}^i_{(p+b-a)k}=$$

$$=\sum_{c=0}^{p}\Gamma^{(a+1)i}_{(c)l(0)k}\mathfrak{d}^{(c)l}.\qquad (b\leqslant a,\ a,b=1,\ 2,\ \ldots,\ p-1).\qquad (82'_b)$$

При $c=p-a$ $(1\leqslant c\leqslant p;\ a=0,\ 1,\ \ldots,\ p-1)$ из (79) следует, что

$$d\overset{(p)}{H}{}^i_{(p-a)k}-\overset{(p)}{H}{}^i_{(p-e)h}\mathfrak{d}^{(p-c)h}_{(p-a)k}+\overset{(p)}{H}{}^h_{(p-a)k}\omega^i_h-\overset{(p)}{\varphi}{}^i_{(p-a)k}=\overset{(p)}{H}{}^i_{(e)l(p-a)k}\mathfrak{d}^{(e)l},\qquad (85)$$

т. е. можно положить

$$\check{\Gamma}^{(a+1)i}_{(0)k}=\frac{(a+1)!\,(p-a)!}{(p+1)!}\overset{(p)}{H}{}^i_{(p-a)k}.\qquad (86)$$

Если $c=p+b-a$, то из (79) следует, что

$$d\overset{(p)}{H}{}^i_{(p+b-a)k}-\overset{(p)}{H}{}^i_{(e)h}\mathfrak{d}^{(e)h}_{(p+b-a)k}+\overset{(p)}{H}{}^h_{(p+b-a)k}\omega^i_h-\overset{(p)}{\varphi}{}^i_{(p+b-a)k}=\overset{(p)}{H}{}^i_{(c)l(p+b-a)k}\mathfrak{d}^{(c)l}.\qquad (87)$$

Отсюда следует, что величины $\Gamma^{(a+1)i}_{(b)k}$ $(b\neq 0)$, в силу (21), можно выбрать следующим образом:

$$\check{\Gamma}^{(a+1)i}_{(b)k}=\frac{(a+1)!\,(p+b-a)!}{b!\,(p+1)!}\overset{(p)}{H}{}^i_{(p+b-a)k}.\qquad (88)$$

Равенства (86) и (88) можно объединить в одно равенство (88) считая, что $b\leqslant a$, $a,b=0,\ 1,\ \ldots,\ p-1$. Таким образом, мы доказали, что дифференциально-геометрический объект $(\overset{(p)}{H}{}^i,\ \overset{(p)}{H}{}^i_{(a)k})$ в качестве подобъекта имеет объект линейной дифференциально-геометрической связности $\check{\Gamma}^{(a)i}_{(b)k}$.

Из (76) следует, что (при $b=a$, $c=0,\ 1,\ \ldots,\ p-1$)

$$\overset{(p)}{\varphi}{}^i_{(p)j(1+c)k}=\frac{p+1}{a+1}\mathfrak{d}^{(a+1)i}_{(a)j(1+c)k}\qquad (\text{для любого } a)\qquad (89)$$

или

$$\overset{(p)}{\varphi}{}^i_{(p)j(1+c)k}=(p+1)\,\delta^0_c\,\omega^i_{jk}.\qquad (89')$$

Очевидно, что система дифференциальных уравнений (80) имеет подсистему (при $a\neq 0$, $b\neq 0$, $a+b>p$), не содержащую $\overset{(p)}{H}{}^i$, $\overset{(p)}{H}{}^i_{(a)k}$. Если $a=p$ и $b>0$, то (80), в силу (75) и (89), принимает вид

$$d\overset{(p)}{H}{}^i_{(p)k(1+b)h}-\overset{(p)}{H}{}^i_{(p)l(1+b)h}\omega^l_k-\overset{(p)}{H}{}^i_{(p)k(c)l}\mathfrak{d}^{(c)l}_{(1+b)h}+$$

$$+\overset{(p)}{H}{}^l_{(p)k(1+b)h}\omega^i_l-\frac{p+1}{b+1}\mathfrak{d}^{(0)i}_{(b)k(0)h}=\overset{(p)}{H}{}^i_{(c)l(p)k(1+b)h}\mathfrak{d}^{(c)l}\quad (b=0,1,2,\ldots,p-1).\qquad (90)$$

Отсюда следует, что система величин

$$\check{\Gamma}^i_{k(a)h}=\frac{a+1}{p+1}\overset{(p)}{H}{}^i_{(p)k(a+1)h}\qquad (a=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p-1)\qquad (91)$$

образует дифференциально-геометрический объект такой же структуры, как и (84) при $m=p-1$. Таким образом, дифференциально-геометрический объект $\overset{(p)}{H}{}^i$, $\overset{(p)}{H}{}^i_{(a)k}$, $\overset{(p)}{H}{}^i_{(a)k(b)h}$ охватывает объект, определяющий аффинную связность, порядок усеченности которой $\rho=1$*). Заметим, что в том случае когда $\overset{(p)}{H}{}^i_0\neq 0$ структура объектов (88) и (91) такая же, как и для $\overset{(p)}{H}{}^i_0=0$.

---

*) Существование аффинной связности, порядок усеченности которой $\rho=0$ и которая охватывается объектом $(\overset{(p)}{H}{}^i,\ \overset{(p)}{H}{}^i_{(a)k},\ \overset{(p)}{H}{}^i_{(a)k(b)h})$ не доказано.

§ 6. Неголономные ковариантные производые

Если введем обозначения

$$G^{(a)\,i}_{(b)\,j}=\begin{cases}\check{\Gamma}^{(a)\,i}_{(b)\,j}, & \text{при}\quad a=b+1,\\ \check{\Gamma}^{(a)\,i}_{(b)\,j}-\sum\limits_{c=b+1}^{a-1}\check{\Gamma}^{(a)\,i}_{(c)\,h}\,G^{(c)\,h}_{(b)\,j}, & \text{при}\quad a>b+1,\end{cases}\tag{92}$$

$$(a=1,\ 2,\ \ldots,\ p;\ b=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p-1),$$

то (81) примет вид ($\overset{*}{\omega}{}^{i}=\omega^{i}$)

$$\overset{*}{\mathfrak{d}}{}^{(a)\,i}=\mathfrak{d}^{(a)\,i}+\sum_{c=0}^{a-1}G^{(a)\,i}_{(c)\,k}\,\overset{*}{\mathfrak{d}}{}^{(c)\,k}.\tag{81'}$$

Очевидно, что система (92) разрешима относительно $\check{\Gamma}^{(a)\,i}_{(c)\,h}$, т. е.

$$\check{\Gamma}^{(a)\,i}_{(b)\,j}=\begin{cases}G^{(b+1)\,i}_{(b)\,j}, & \text{при}\quad a=b+1,\\ G^{(a)\,i}_{(b)\,j}+\sum\limits_{c=b+1}^{a-1}G^{(a)\,i}_{(c)\,h}\,\check{\Gamma}^{(c)\,h}_{(b)\,j}, & \text{при}\quad a>b+1.\end{cases}\tag{98}$$

Формы $\overset{*}{\omega}{}^{i}_{j}$ можно выразить через ω^{i}_{j} и $\overset{*}{\mathfrak{d}}{}^{(a)\,i}$ $(m=p-1)$:

$$\overset{*}{\omega}{}^{i}_{j}=\omega^{i}_{j}+\sum_{c=0}^{p-1}G^{i}_{j\,(c)\,k}\,\overset{*}{\mathfrak{d}}{}^{(c)\,k},\tag{83'}$$

где

$$G^{i}_{j\,(a)\,k}=\begin{cases}\Gamma^{i}_{j\,(p-1)\,k}, & \text{при}\ a=p-1,\\ \Gamma^{i}_{j\,(a)\,k}-\sum\limits_{b=a+1}^{p-1}G^{(b)\,h}_{(a)\,k}\,\Gamma^{i}_{j\,(b)\,h}, & 0\leqslant a<p-1.\end{cases}\tag{94}$$

Если на $\overset{\circ}{L}{}^{(p)}_{n}$ задано векторное поле

$$d\xi^{i}+\xi^{k}\omega^{i}_{k}=\xi^{i}_{(a)\,k}\,\mathfrak{d}^{(a)\,k},\tag{95}$$

то, в силу (81') и (83'), эту систему дифференциальных уравнений можно переписать следующим образом:

$$d\xi^{i}+\xi^{k}\overset{*}{\omega}{}^{i}_{k}=\sum_{a=0}^{p-1}\nabla_{(a)\,k}\,\xi^{i}\,\overset{*}{\mathfrak{d}}{}^{(a)\,k}+\nabla_{(p)\,k}\,\overset{*}{\mathfrak{d}}{}^{(p)\,k},\tag{95'}$$

где

$$\nabla_{(p)\,k}\,\xi^{i}=\xi^{i}_{(p)\,k},\tag{96}$$

$$\nabla_{(a)\,k}\,\xi^{i}=\xi^{i}_{(a)\,k}-\sum_{c=a+1}^{p}\xi^{i}_{(c)\,h}\,G^{(c)\,h}_{(a)\,k}+\xi^{h}\,G^{i}_{h\,(a)\,k}\qquad(0\leqslant a\leqslant p-1).\tag{97}$$

Величины $\nabla_{(a)\,k}\,\xi^{i}$ (при фиксированном a) образуют тензор, который называется неголономной ковариантной производной $a+1$-го рода. Аналогичным образом определяются неголономные ковариантные производые и тензорных полей произвольной валентности.

Объект кривизны связности $G\{^a_b\}^i_k$ можно построить таким же образом, что и объект кривизны дифференциально-геометрической связности кратного составного многообразия [3], а другие объекты кривизны определяются таким же способом, что и для пространства опорных элементов [2].

Вильнюсский Государственный педагогический институт

Поступило в редакцию 25.VI.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Близникас, Неголономное дифференцирование Ли и линейные связности в пространстве опорных элементов, Лит. мат. сб., VI, № 2, 141—209, 1966.
2. В. И. Близникас, Линейные дифференциально-геометрические связности высшего порядка в пространстве опорных элементов, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, № 6, 1966.
3. В. Близникас, Объект дифференциально-геометрической связности p-кратного составного многообразия, Лит. мат. сб., т. 5, № 2, 221—220, 1965.
4. Э. Картан, Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенные методом подвижного репера, Изд. Московского у-та, 1963.
5. Г. Ф. Лаптев, Многообразия, погруженные в обобщенные пространства, Труды четв. всесоюзн. мат. съезда, т. 2, 226—233, 1964.
6. Г. Ф. Лаптев, Геометрия дифференциальных уравнений, Первая всесоюзн. геометрическая конф. (Киев), 6—7, 1962.
7. В. Г. Лемлейн, Локальные центро-проективные пространства и связности в дифференцируемом многообразии, Лит. мат. сб., IV, № 1, 41—132, 1964.
8. L. Berwald, Über Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Integralkurven mit dem System der geraden Linien topologisch äquivalent sind. Annals of Math., (2) 48, 193—215, 147.
9. J. Douglas, The general geometry of paths, Annals of Math., 29, 143—168, 1928.
10. A. Kawaguchi, H. Hombu, Die Geometrie des Systems der partiellen Differentialgleichungen Journal of the Faculty of Scien. Hokkaido Imp. Univ., ser. I, Vol. 6, № 1, 21—62, 1936.
11. H. V. Craig, On tensor relative of the extended point transformation, Amer. Journ. of Math., 59, 764—774, 1937.
12. A. Moor, Begründung einer affinen Geometrie der Bahnen dritter Ordnung, Tensor (N. S.), Vol. 16, № 1, 35—55, 1965.
13. A. Rapcsák, Theorie der Bahnen in Linienelementmannigfaltigkeiten und eine Verallgemeinerung ihrer affinen Theorie, Acta scient. Math., T. 26, fasc. 3—4 251—265, 1955.
14. W. Slebodzinski, Sur deux connexions affines généralisées, Prace Mathematyczno-Fizyczne, Bd. 43, 167—205, 1935.
15. K. Żorawski, Über gewisse Differentialinvarianten der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnug, Bulletin Int., Acad. de Boheme, 1915.

AUKŠTESNĖS EILĖS PAPRASTŲ DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ NORMALINIŲ SISTEMŲ GEOMETRIJOS KLAUSIMU

V. BLIZNIKAS

(Reziumė)

Antros eilės ($p=2$) paprastų diferencialinių lygčių normalinių sistemų geometrijos klausimai yra nagrinėti M. Žoravskio, V. Slebodzinskio, J. Duglaso, G. Laptevo, A. Moro, A. Kavagučio ir kitų darbuose. Aukštesnės eilės ($p>2$) diferencialinių lygčių sistemų geometrijos klausimai mažai išnagrinėti.

Straipsnyje pateikiamas naujas diferencialinių lygčių sistemų geometrijos nagrinėjimo metodas. Pirmą kartą G. Laptevo metodu išdėstomi ekstenzorinio skaičiavimo teorijos elementai. Surastos asocijuotosios projektyvinio sąryšio erdvės ($p=2$), diferencialiniai-geometrinių bei afininio sąryšių objektai ($p>2$).

ZUR GEOMETRIE DER NORMALSYSTEME VON EINFACHEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN HÖHERER ORDNUNG

V. BLIZNIKAS

(Zusammenfassung)

Das Problem der Geometrie der Normalsysteme von einfachen Differentialgleichungen zweiter Ordnung ($p=2$) ist von M. Żorawski, V. Slebodzinski, J. Douglas, G. Laptew, A. Moor, A. Kawaguchi und anderen untersucht. Die Geometrie der Systeme von Differentialgleichungen höherer Ordnung ($p>2$) ist dagegen weniger bekannt. Im Artikel wird eine neue Methode der Untersuchung der Geometrie der Systeme von Differentialgleichungen gegeben. Mit Hilfe der Methode vom G. Laptew werden die Elemente der Extensorrechnung dargestellt. Hier sind die Räume vom projektiven Zusammenhänge ($p=2$), sowie die Objekte vom affinen Zusammenhänge und die Objekte anderen Zusammenhängen gefunden ($p>2$).