LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 2, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 2, 1967

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКЕ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Б. ГРИГЕЛИОНИС

Введение

Пусть $X=\{x_t, \zeta, \mathcal{M}_t, \mathbf{P}_x\}$ – однородный марковский процесс*) с непрерывным временем $t \geqslant 0$ в полукомпакте $(E, \mathscr{B}, g(x))$ – некоторая неотрицательная функция, заданная на E. Обозначим

$$s(x)=\sup_{\tau \in \mathfrak{M}} \mathbf{M}_x g(x_\tau),$$

где $\mathfrak{M}$ – класс марковских моментов (м. м.), называемых моментами остановки процесса X. М. м. τ называют оптимальным моментом остановки процесса X, если для всех $x \in E$

$$s(x)=\mathbf{M}_x g(x_\tau).$$

Е. Б. Дынкиным в работе [2] (см. также [3]) при общих условиях доказано, что функция $s(x)$, называемая ценой, является наименьшей эксцессивной мажорантой (н.э.м.) функции $g(x)$ и что оптимальный момент остановки при широких предположениях определяется как момент первого достижения процессом X множества $D=\{x \cdot s(x)=g(x)\}$. В нашей совместной с А. Н. Ширяевым статье [3] установлено, что для обширного класса непрерывных марковских процессов задача отыскания оптимального момента остановки τ и цены $s(x)$ эквивалентна так называемой обобщенной задаче Стефана. С другой стороны, автором в работе [4] при общих предположениях показано, что задача об оптимальной остановке ступенчатых марковских процессов эквивалентна аналогичной задаче для определенного марковского процесса с дискретным временем. Последняя же задача в настоящее время хорошо исследована.

Настоящая статья примыкает к работе [3] и ее целью является обобщение многих результатов, полученных в [3] для непрерывных процессов, на случай широкого класса марковских процессов, имеющих разрывные траектории. Основным результатом является доказательство эквивалентности задачи оптимальной остановки марковского процесса из рассматриваемого класса некоторому аналогу обобщенной задачи Стефана.

В § 1 показывается, что н. э. м. $s(x)$ функции $g(x)$ является решением нелинейного интегрального уравнения

$$s(x)=\max\{g(x),\ T_{\tau(U)}s(x)\}, \tag{1}$$

где T_t – полугруппа операторов, отвечающая процессу X, U – достаточно малая окрестность точки x и $\tau(U)$ – момент первого выхода процесса X из окрестности U. В § 2 исследуется вопрос единственности уравнения (1).

*) Мы будем пользоваться обозначениями и терминологией монографии [1].

Из уравнения (1) следует, что

$$\mathfrak{A} s(x)=0, \qquad x\in E\backslash D,$$

$$s(x)=g(x), \qquad x\in D,$$

где $\mathfrak{A}$ – характеристический оператор процесса X. В § 3 в предположении, что $E\subseteq R^n$, доказывается, что $s(x)$ удовлетворяет определенным условиям „склеивания", которые в случае непрерывных процессов превращаются в так называемые условия „гладкого склеивания":

$$\frac{\partial s}{\partial x_i}=\frac{\partial g}{\partial x_i}, \quad i=1, \ldots, n, \; x\in\partial D.$$

Таким образом, устанавливается, что $\big(s(x), D\big)$ является решением некоторого аналога обобщенной задачи Стефана.

§ 4 носит вспомогательный характер, хотя полученный там результат о гармонических функциях стандартных марковских процессов может представлять и самостоятельный интерес.

В § 5 даются условия эквивалентности задач оптимальной остановки марковского процесса и соответствующей обобщенной задачи Стефана. Наконец, в § 6 в качестве примера рассматривается задача Вальда различения двух простых гипотез о параметре пуассоновского процесса.

§ 1. Интегральное уравнение

Пусть стандартный марковский процесс $X=\{x_t, \zeta, \mathcal{M}_t, \mathbf{P}_x\}$ и ограниченная непрерывная функция $g(x)$ заданы на полукомпакте $(E, \mathscr{B})$. Обозначим через $\mathfrak{M}$ – класс м. м., т. е. совокупность неотрицательных случайных величин τ таких, что при любом $t\geqslant 0\{\tau>t\}\in\mathcal{M}_t$, и положим $s(x)=\sup \mathbf{M}_x g(x_\tau)$. Из результатов работ [2] и [3] следует, что $s(x)$ будет н. э. м. функции $g(x)$. Напомним, что почти борелевская c_0 – непрерывная (т. е. непрерывная в естественной топологии, связанной с процессом X) функция $f(x)$, определенная на $(E, \mathscr{B})$, со значениями в $[0, \infty]$ называется *эксцессивной функцией* (э. ф.) относительно процесса X, если $T_t f(x)\leqslant f(x)$ для всех $x\in E$ и $t\geqslant 0$; $T_t f(x)=\mathbf{M}_x f(x_t)$. Э. ф. $f(x)$ называется н. э. м. функции $g(x)$, если $f(x)\geqslant g(x)$ и $f(x)\leqslant f_1(x)$ для любой э. ф. $f_1(x)$, $f_1(x)\geqslant g(x)$, $x\in E$. Известно (см. [1], [2], [5]), что если $f(x)$ – э.ф., то для любого м.м. τ $T_\tau f(x)\leqslant f(x)$ и если м.м. τ является моментом первого достижения какого – нибудь множества Γ, то $f_1(x)=t_\tau f(x)$ также является э. ф.

Далее для нас будет существенным следующее предположение.

А. *Для* $x\in E$ *и каждого* $\varepsilon>0$ *существует окрестность точки* x $\tilde{U}=\tilde{U}(x)$ *с компактным замыканием такая, что*

$$\mathbf{P}_y\{x_{\tau(u)}\bar{\in}\,\tilde{U}\}\leqslant\varepsilon$$

и

$$\mathbf{P}_y\{\tau(u)<\zeta\}\geqslant 1-\varepsilon$$

для любой окрестности $U=U(x)$, $U\leqslant\tilde{U}$ *и любого* $y\in U$, *где* $\tau(U)$ – *момент первого выхода процесса* X из U, а $\bar{U}$ – *замыкание множества* U.

Обозначим $D=\{x: g(x)=s(x)\}$, $C=E\setminus D$ и предположим, что $s(x)$ — непрерывна снизу. Тогда легко убедиться, что C — открытое множество (см. [3]).

Теорема 1. *Если для всех $x\in C$ выполнено условие* A*), *то для каждой точки $x\in E$ существует такая достаточно малая окрестность с компактным замыканием $\tilde U=\tilde U(x)$, что для всех окрестностей $U=U(x)$, $U\subseteq\tilde U$, н. э. м. $s(x)$ функции $g(x)$ удовлетворяет уравнению*

$$s(x)=\max\{g(x),\ T_{\tau(U)}s(x)\}. \qquad (1)$$

Доказательство. Поскольку для любого множества $U\in\mathscr{B}$ $T_{\tau(U)}s(x)\leqslant s(x)$, то при $x\in D$ (1) всегда выполнено. Пусть теперь $x_0\in C$. Выберем окрестность точки $x_0 U_1=U_1(x_0)$ так, чтобы $\bar U_1$ было компактно и $\bar U_1\subseteq C$. Обозначим $\inf\limits_{x\in U_1}[s(x)-g(x)]=\delta>0$. В силу непрерывности функции $g(x)$ можно выбрать окрестность U_2 точки x_0 так, что $\bar U_2\subseteq U_1$ и $|g(x)-$ $-g(y)|\leqslant\frac{\delta}{2}$ при $x,\ y\in U_2$. Наконец, в силу условия А можно выбрать окрестность с компактным замыканием $\tilde U=\tilde U(x_0)$ так, что $\tilde U\subseteq U_2$ и для любой окрестности $U=U(x_0)$, $U\subseteq\tilde U$,

$$\mathbf{P}_x\{x_{\tau(U)}\,\bar\in\,\bar U\}\leqslant\frac{\delta}{2(\delta+2K)}$$

и

$$\mathbf{P}_x\{\tau(U)<\zeta\}\geqslant 1-\frac{\delta}{2(\delta+2K)},\quad x\in U,$$

где

$$K=\sup_{x\in E}g(x).$$

Пусть U — любая такая окрестность точки x_0. Положим $s_U(x)=T_{\tau(U)}s(x)$. Функция $s_U(x)$, по сказанному выше, эксцессивна и $s_U(x)\leqslant s(x)$. Докажем, что $s_U(x)\geqslant g(x)$. Отсюда и из минимальности э. м. $s(x)$ будет следовать, что $s(x)=s_U(x)=T_{\tau(U)}s(x)$, и тем самым равенство (1) для всех $x\in E$.

При $x\,\bar\in\,U\,\mathbf{P}_x\{\tau(U)=0\}=1$ и $s_U(x)=s(x)\geqslant g(x)$. Пусть $x\in U$. Тогда

$$s_U(x)=\mathbf{M}_x s(x_{\tau(U)})=g(x)+\mathbf{M}_x[s(x_{\tau(U)})-g(x_{\tau(U)})]+$$
$$+\mathbf{M}_x[g(x_{\tau(U)})-g(x)]-g(x)(1-\mathbf{P}_x\{\tau(U)<\zeta\})\geqslant$$
$$\geqslant g(x)+\int\limits_{\{x_{\tau(U)}\in\bar U\}}[s(x_{\tau(U)})-g(x_{\tau(U)})]\,d\mathbf{P}_x+\int\limits_{\{x_{\tau(U)}\in\bar U\}}[g(x_{\tau(U)})-g(x)]\,d\mathbf{P}_x+$$
$$+\int\limits_{\{x_{\tau(U)}\bar\in\bar U\}}[g(x_{\tau(U)})-g(x)]\,d\mathbf{P}_x-g(x)(1-\mathbf{P}_x\{\tau(U)<\zeta\})\geqslant$$

*) Примечание при корректуре. Используя равенство $\mathbf{M}_x s(x_{\tau_\varepsilon})=s(x)$ для любых $x\in E$ и $\varepsilon>0$, где τ_ε — момент первого достижения множества $\{x: s(x)\leqslant g(x)+\varepsilon\}$ (см. [2]), можно убедится, что требование выполнимости условия А при $x\in C$ — в теореме 1, а также в лемме 1, излишне.

$$\geqslant g(x)+\delta \mathbf{P}_x\{x_{\tau(U)}\in \bar U\}-\frac{\delta}{2}\mathbf{P}_x\{x_{\tau(U)}\in \bar U\}-$$
$$-K\mathbf{P}_x\{x_{\tau(U)}\bar\in U\}-K(1-\mathbf{P}_x\{\tau(U)<\zeta\})\geqslant$$
$$\geqslant g(x)+\frac{\delta}{2}(\mathbf{P}_x\{\tau(U)<\zeta\}-\mathbf{P}_x\{x_{\tau(U)}\bar\in \bar U\})-K\mathbf{P}_x\{x_{\tau(U)}\bar\in \bar U\}-$$
$$-K(1-\mathbf{P}_x\{\tau(U)<\zeta\})\geqslant g(x)+\frac{\delta}{2}\left(1-\frac{\delta}{\delta+2K}\right)-K\frac{\delta}{\delta+2K}=g(x).$$

Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Отметим, что, если $x\in E$ является поглощающей точкой процесса X, то условие А не выполнено, но в этом случае для любого $\tau\in\mathfrak{M}$ $\mathbf{M}_x g(x_\tau)=g(x)$ и $s(x)=g(x)$, т. е. все поглощающие точки процесса X принадлежат множеству D.

Замечание 2. Функция $s(x)$ будет непрерывной снизу, если, например, X будет феллеровским процессом (см. [3]).

Замечание 3. Нетрудно убедиться, что условиям теоремы 1 удовлетворяют, кроме непрерывных, широкий класс разрывных марковских процессов, у которых, грубо говоря, не вырождена непрерывная часть.

Следствие 1. *При предположениях теоремы* 1 *функция* $s(x)$ *удовлетворяет условиям:*

$$\mathfrak{A}s(x)=0,\qquad x\in C,$$
$$s(x)=g(x),\qquad x\in D, \tag{2}$$

где $\mathfrak{A}$ *— характеристический оператор процесса* X.

Соотношения (2) прямо следуют из уравнения (1) и определения оператора $\mathfrak{A}$ (см. [1], гл. 5).

§ 2. Единственность решения

Решение уравнения (1), вообще говоря, не единственно. Например, если процесс X — не обрывающийся, то любая функция $f(x)\equiv C>K=\sup\limits_{x\in E} g(x)$ этому уравнению удовлетворяет.

Исследуем поэтому условия единственности решения уравнения (1) в определенном классе функции.

Обозначим $P(t, x, A)=\mathbf{P}_x\{x_t\in A\}$, $A\in\mathcal{B}$, $\mu(t, x, A)=\frac{1}{t}\int\limits_0^t P(s, x, A)\,ds$ и предположим, что существует мера $\mu(A)$ такая, что для каждой измеримой ограниченной C_0 — непрерывной функции $f(x)$

$$\int\limits_E f(y)\,\mu(t, x, dy)\to\int\limits_E f(y)\,\mu(dy),\quad t\to\infty, \tag{3}$$

для всех $x\in E$.

Теорема 2. *Пусть X — необрывающийся стандартный процесс, $s_1(x)$ и $s_2(x)$ — два измеримых ограниченных C_0 — непрерывных решения уравнения* (1), *совпадающие на некотором множестве $A\in\mathcal{B}$. Если $\mu(A)>0$, то $s_1(x)\equiv s_2(x)$.*

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 6 из [3] и мы его опускаем.

Следствие 2. *Пусть необрывающийся стандартный процесс X, функции $g(x)$ и $s(x)$ удовлетворяют предположениям теоремы* 1 *и $s_1(x)$ — какое то измеримое ограниченное C_0 — непрерывное решение уравнения* (1)., *совпадающее с $g(x)$ на множестве A* с $\mu(A)>0$. *Тогда $s_1(x)\cong s(x)$.*

Действительно, из (1) следует, что $s_1(x)\geqslant g(x)$ и $s_1(x)$ — локально эксцессивна. Тогда по теореме 2 из [6] следует, что $s_1(x)$ является э. м. функции $g(x)$, а из минимальности э. м. $s(x)$ функции $g(x)$ получаем, что $s(x)=$ $=s_1(x)=g(x)$ на множестве A с $\mu(A)>0$. Отсюда из теорем 1 и 2 следует, что $s_1(x)\equiv s(x)$.

Замечание 4. Выполнимость условия (3) связана с вопросами существования конечных инвариантных мер процессов X. Последние задачи подробно исследовались в работах [7] [8].

Пусть далее X — любой стандартный процесс и G — некоторое открытое подмножество E. Обозначим через $\tilde{X}$ — процесс, полученный из X остановкой в момент $\tau(G)$ (см. [1], гл. 10), $\pi(x)=\mathbf{P}_x\{\tau(G)<\zeta\}$, $\tilde{P}(t, x, A)=$ $=\mathbf{P}_x\{\tilde{x}_t\in A\}$, $\tilde{\mu}(t, x, A)=\frac{1}{t}\int\limits_0^t P(s, x, A)\,ds$. Предположим, что существует мера $\tilde{\mu}(A)$, заданная на σ — алгебре измеримых подмножеств множества G, такая, что для каждой измеримой ограниченной C_0 — непревывной функции $f(x)$

$$\int\limits_G f(y)\tilde{\mu}(t, x, dy)\to\int\limits_G f(y)\tilde{\mu}(dy),\quad t\to\infty, \tag{4}$$

для всех $x\in G$.

Теорема 3. *Пусть $s_1(x)$ и $s_2(x)$ — два измеримых C_0 — непревывных решения уравнения* (1) *совпадающие на множестве $E\backslash G$ и $|s_1(x)-s_2(x)|\leqslant$ $\leqslant K_1\pi(x)$ для всех $x\in E$, где K_1 — некоторая константа. Если $\tilde{\mu}(G)<1$, то $s_1(x)\equiv s_2(x)$.*

Доказательство. Заметим, что процесс $\tilde{X}$ — стандартный (в силу теоремы 10.3 из [1]) и функции $s_1(x)$ и $s_2(x)-\tilde{C}_0$ — непрерывны (т. е. непрерывны в естественной топологии, связанной с процессом $\tilde{X}$), так как, очевидно, $C_0\subseteq\tilde{C}_0$.

Обозначим $r(x)=|s_1(x)-s_2(x)|$ и $\tilde{r}(x)=K_1\pi(x)-r(x)$. Из уравнения (1) следует, что для каждой точки $x\in E$ существует окрестность $\tilde{U}$ с компактным замыканием такая, что

$$r(x)\leqslant T_{\tau(U)}r(x),\quad U\leqslant\tilde{U},$$

причем для $x\in G$ $\tilde{U}$ можно выбрать так, что $\tilde{U}\subseteq G$. Отсюда следует, что

$$r(x)\leqslant\tilde{T}_{\tau(U)}r(x),\quad U\subseteq\tilde{U}, \tag{5}$$

где $T_tf(x)=\mathbf{M}_xf(\tilde{x}_t)$, поскольку для $U\subseteq G$ $T_{\tau(U)}r(x)=\tilde{T}_{\tau(U)}r(x)$, а при $x\bar{\in} G$ $\tilde{T}_{\tau(U)}r(x)=r(x)$ для всех $U\in\mathscr{B}$.

По теореме 4.6 из [1] имеем, что

$$\pi(x)=\tilde{T}_{\tau(U)}\pi(x),\quad U\subseteq\tilde{U},\quad x\in E, \tag{6}$$

Из (5) и (6) получим, что

$$\tilde{r}(x)\geqslant\tilde{T}_{\tau(U)}\tilde{r}(x),\quad U\subseteq\tilde{U},\quad x\in E. \tag{7}$$

Поскольку функция $\tilde{r}(x)$ измерима $\tilde{C}_0$ – непрерывна и процесс $\tilde{X}$ – стандартный, то по теореме 2 из [6] $\tilde{r}(x)$ будет эксцессивной для процесса $\tilde{X}$. Значит, для любого $t \geqslant 0$

$$\tilde{T}_t \tilde{r}(x) \leqslant \tilde{r}(x). \tag{8}$$

Но $T_t \pi(x) = \pi(x)$ (см. [1] стр. 519), и из (8) получаем, что

$$r(x) \leqslant \tilde{T}_t r(x).$$

Отсюда и из (4)

$$r(x) \leqslant \int_G r(y) \tilde{\mu}(t, x, dy)$$

и

$$r(x) \leqslant \int_G r(y) \tilde{\mu}(dy).$$

Поскольку

$$\sup_{x \in E} r(x) \leqslant \sup_{x \in E} r(x) \mu(G)$$

и

$$\tilde{\mu}(G) < 1,$$

то

$$r(x) \equiv 0,$$

т. е.

$$s_1(x) \equiv s_2(x).$$

Теорема 3 доказана.

Следствие 3. *Пусть стандартный процесс X, функции $g(x)$ и $s(x)$ удовлетворяют предположениям теоремы 1 и $s_1(x)$ – какое-то измеримое ограниченное C_0 – непрерывное решение уравнения (1), совпадающее с $g(x)$ на некотором замкнутом множестве $E \backslash G$. Если $\tilde{\mu}(G) < 1$ и $\inf_{x \in G} \pi(x) > 0$, то $s_1(x) \equiv s(x)$.*

Действительно, как и при доказательстве следствия 2, убеждаемся, что $s_1(x)$ является э. м. функции $g(x)$ и $s(x) = s_1(x) = g(x)$, $x \in E \backslash G$. По условиям следствия $|s(x) - g(x)| \leqslant K_1 \pi(x)$, и утверждения следствия 3 вытекают из теорем 1 и 3.

Замечание 5. Мера $\tilde{\mu}(A)$, $A \in G$, может быть тождественно равна нулю и тем самым условия единственности решения уравнения (1) выполнены в то время как инвариантной меры, удовлетворяющей условиям теовемы 2, для процесса X вообще не существует. С другой стороны, поскольку, очевидно, $\tilde{\mu}(t, x, A) \leqslant \mu(t, x, A)$ для всех $t \geqslant 0$, $x \in G$ и $A \subset G$, то два измеримые C_0 – непрерывные решения $s_1(x)$ и $s_2(x)$ уравнения (1), совпадающие на множестве $E \backslash G$ и такие, что, $|s_1(x) - s_2(x)| \leqslant K_1 \pi(x)$ для всех $x \in E$, совпадают тождественно, если выполняется соотношение (3) и $\mu(G) < 1$.

§ 3. Условия „склеивания"

Будем теперь предполагать, что $X = \{x_t, \zeta, \mathcal{M}_t, \mathbf{P}_x\}$ – стандартный процесс, фазовое пространство которого $E \leqslant R^n$.

Если процесс X и функции $g(x)$ и $s(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 1, то, как мы доказали в § 1, функция $s(x)$ является решением задачи

$$\mathfrak{A} s(x) = 0, \qquad x \in C,$$
$$s(x) = g(x), \qquad x \in D,$$

где D — замкнутое множество, но нам неизвестное, поскольку, вообще говоря, нам неизвестна функция $s(x)$. Как видим, нахождение цены $s(x)$ и множества D неразрывны между собой. Сейчас мы займемся выводом дополнительных условий, так называемых условий „склеивания", помогающих среди решений задачи (9) выделить решение, являющееся ценой.

Обозначим через Γ границу множества $D=\{x:s(x)=g(x)\}$, t_x — касательную гиперплоскость в точке $x\in\Gamma$ и $\vec{\nu}_x$ — вектор нормали в точке $x\in\Gamma$, направленный внутрь множества C. Далее мы всюду будем обозначать $U=U(x)$ окрестности точки $x\in E$ вида $\{y:\|x-y\|<\rho\}$, где $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $y=(y_1, \ldots, y_n)$, $\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$. С каждой точкой $x\in\Gamma$ свяжем ортогональную систему координат $(\vec{\nu}, \vec{\varkappa}_1, \ldots, \vec{\varkappa}_{n-1})$, где направление орта $\vec{\nu}$ совпадает с направлением вектора $\vec{\nu}_x$, и пусть $\nu=\nu(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n-1})$ — уравнение границы Γ в окрестности точки $x\in\Gamma$, а $(\nu_t, \varkappa_t^{(1)}, \ldots, \varkappa_t^{(n-1)})$ — координаты процесса $x_t=(x_t^{(1)}, \ldots, x_t^{(n)})$ в новой системе координат.

В дальнейшем мы будем пользоваться следующими предположениями.

A_1. *Для* $x\in\Gamma$ $\mathbf{M}_x\tau(U)=\beta(x)\rho+o(\rho)$, *где* $\beta(x)$ — *неотрицательная конечная функция, и* $\mathbf{P}_x\{x_{\tau(U)}\in\bar{U}\}=O(\mathbf{M}_x\tau(U))$;

A_2. *Для* $x\in\Gamma$ $g(x)=T_{\tau(U)}g(x)-o(\rho)$ *в случае, когда* $\beta(x)=0$ *и* $f(x)=s(x)-g(x)\in D_{\mathfrak{A}}(x)$ *и*

$$\lim_{U\downarrow x}\frac{1}{\mathbf{M}_x\tau(U)}\int_{\{x_{\tau(U)}\in\bar{U}\}} f(x_{\tau(U)})\,d\mathbf{P}_x=\mathfrak{A}_2 f(x)$$

существует в случае, когда $\beta(x)>0$.

A_3. *В окрестности точки* $x\in\Gamma$ *производные* $\frac{\partial g}{\partial x_i}$, $i=1, \ldots, n$, *существуют и непрерывны, а также для* $y\in U\cap C\cup\{x\}$ *существуют и непрерывны „односторонние" производные* $\frac{\partial s}{\partial x_i}$, $i=1, \ldots, n$, *понимаемые как определяющие производные пределы, когда переменная точка стремится к точке* x, *оставаясь в области* C (*см.* [3]).

A_4. *В точке* $x\in\Gamma$ *определена касательная гиперплоскость* t_x, *производные* $\frac{\partial\nu}{\partial\varkappa_i}$, $i=1, \ldots, n-1$, *существуют и непрерывны в окрестности точки* $x\in\Gamma$.

A_5. Для $x\in\Gamma$

$$\int_{\{x_{\tau(U)}\in C\cap\bar{U}\}}\nu_{\tau(U)}\,d\mathbf{P}_x=\alpha(x)\rho+o(\rho),$$

где $\alpha(x)$ — некоторая функция $\left(0\leqslant\alpha(x)\leqslant 1\right)$.

Теорема 4. *Пусть* $s(x)$ — *н. э. м. функции* $g(x)$, $f(x)=s(x)-g(x)$, $D=\{x:f(x)=0\}$, $\Gamma=\partial D$ *и* $\Gamma_1\subseteq\Gamma$ — *множество тех точек границы* Γ, *для которых справедливы предположения* A_1-A_5. *Кроме того, пусть выполнены условия теоремы* 1.

Тогда необходимо выполнены условия:

$$\mathfrak{A} s(x)=0, \quad x \in C, \tag{10}$$

$$s(x)=g(x), \quad x \in D, \tag{11}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_x=0, \ i=1, \ \ldots, \ n-1, \quad x \in \Gamma_1, \tag{12}$$

$$\alpha(x) \left.\frac{\partial f}{\partial \nu}\right|_x=\beta(x) \mathfrak{A}_1 f(x), \quad x \in \Gamma_1, \tag{13}$$

где

$$\mathfrak{A}_1=\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_2.$$

Доказательство. Соотношения (10) и (11) установлены в следствии 1. Доказательство условий (12) аналогично доказательству таких же условий в теореме 8 из [3] и мы его опускаем. Займемся выводом условия [13]

Пусть сначала $\beta(x)=0$ для $x \in \Gamma_1$. Тогда по предположению A_2 и эксцессивности $s(x)$

$$g(x)=T_{\tau(U)} g(x)+o(\rho)=s(x) \geqslant T_{\tau(U)} s(x),$$

откуда

$$o(\rho) \geqslant T_{\tau(U)} f(x) \geqslant 0$$

или

$$T_{\tau(U)} f(x)=o(\rho). \tag{14}$$

Имеем

$$T_{\tau(U)} f(x)=\int_{\{x_{\tau(U)} \in C\}} f(x_{\tau(U)})\, d\mathbf{P}_x=\int_{\{x_{\tau(U)} \in C \cap \bar{U}\}} f(x_{\tau(U)})\, d\mathbf{P}_x+$$

$$+\int_{\{x_{\tau(U)} \bar{\in} \bar{U}\}} f(x_{\tau(U)})\, d\mathbf{P}_x=\int_{\{x_{\tau(U)} \in C \cap \bar{U}\}} f(x_{\tau(U)})\, d\mathbf{P}_x+$$

$$+O(\mathbf{P}_x\{_{\tau(U)} \bar{\in} \bar{U}\}). \tag{15}$$

Далее, имея ввиду A_1, A_3 и (12), разлагая $f(y)$ в ряд Тейлора, из (15) получим, что

$$T_{\tau(U)} f(x)=\left.\frac{\partial f}{\partial \nu}\right|_x \int_{\{x_{\tau(U)} \in C \cap \bar{U}\}} \nu_{\tau(U)}\, d\mathbf{P}_x+o(\rho). \tag{16}$$

Из (14), (16) и A_5 следует, что

$$\alpha(x) \left.\frac{\partial f}{\partial \nu}\right|_x \rho+o(\rho)=0.$$

Отсюда выводим, что

$$\alpha(x) \left.\frac{\partial f}{\partial \nu}\right|_x=0.$$

Таким образом, в случае, когда $\beta(x)=0$, условие (13) доказано.

В случае, когда $\beta(x)>0$, по предположению A_2

$$T_{\tau(U)} f(x)=\mathfrak{A} f(x) \cdot \mathbf{M}_x \tau(U)+o\left(\mathbf{M}_x \tau(U)\right)$$

и по предположению A_1

$$T_{\tau(U)}f(x)=\beta(x)\mathfrak{A}f(x)\rho+o(\rho). \tag{16}$$

Имеем

$$T_{\tau(U)}f(x)=\int\limits_{\{x_{\tau(U)}\in C\}} f(x_{\tau(U)})\,d\mathbf{P}_x=\int\limits_{\{x_{\tau(U)}\in C\cap \bar{U}\}} f(x_{\tau(U)})\,d\mathbf{P}_x+$$

$$+\int\limits_{\{x_{\tau(U)}\bar{\in} \bar{U}\}} f x_{\tau(U)})\,d\mathbf{P}_x. \tag{17}$$

Так же как и в случае, когда $\beta(x)=0$, находим, что

$$\int\limits_{\{x_{\tau(U)}\in C\cap \bar{U}\}} f(x_{\tau(U)})\,d\mathbf{P}_x=\alpha(x)\frac{\partial f}{\partial\nu}\Big|_x\rho+o(\rho). \tag{18}$$

Так как

$$\int\limits_{\{x_{\tau(U)}\bar{\in} \bar{U}\}} f(x_{\tau(U)})\,d\mathbf{P}_x=\mathbf{M}_x\tau(U)\,\mathfrak{A}_2f(x)+o\left(\mathbf{M}_x\tau(U)\right)=$$

$$=\beta(x)\,\mathfrak{A}_2f(x)\rho+o(\rho), \tag{19}$$

то из (16) – (19) получаем, что

$$\left(\alpha(x)\frac{\partial f}{\partial\nu}\Big|_x-\beta(x)\,\mathfrak{A}_1f(x)\right)\rho+o(\rho)=0,$$

откуда

$$\alpha(x)\frac{\partial f}{\partial\nu}\Big|_x=\beta(x)\,\mathfrak{A}_1f(x).$$

Теорема 4 полностью доказана.

Замечание 6. Из теоремы 4 следует, что цена $s(x)$ является решением некоторого аналога обобщенной задачи Стефана, хотя в общем случае „склеивание“ не будет гладким.

Замечание 7. Если для всех

$$x\in\Gamma_1\;\mathbf{P}_x\{x_{\tau(U)}\bar{\in}\bar{U}\}=o(\rho)$$

и

$$\alpha(x)>0,$$

то условия (12) и (13) превращаются в условия „гладкого склеивания“:

$$\frac{\partial s}{\partial x_i}=\frac{\partial g}{\partial x_i},\quad i=1,\;\ldots,\;n,\quad x\in\Gamma_1.$$

§ 4. О гармонических функциях стандартных марковских процессов

При исследовании эквивалентности задачи оптимальной остановки процесса X и соответствующей обобщенной задачи Стефана нам понадобятся некоторые результаты о гармонических функциях рассматриваемых процессов. Общее определение супергармонических и гармонических функций $f(x)$ для непрерывных марковских процессов на открытом множестве G, принадлежит Е. Б. Дынкину (см. [1] гл. 12). Эти определения разумно распространить и на любые стандартные процессы, считая, что функции $f(x)$ заданы не только на рассматриваемом множестве G, но и для всех $x \in E$.

Мы будем обозначать через $\mathfrak{N}(G)$ совокупность всех открытых множеств, замыкания которых компактны и содержатся в G.

Пусть $X = \{x_t, \zeta, \mathcal{M}_t, \mathbf{P}_x\}$ – стандартный процесс в полукомпакте $(E, \mathcal{B})$. Следуя определению в [1], функцию $f(x)$, заданную на $(E, \mathcal{B})$ и принимающую значения из интервала $(-\infty + \infty]$ назовем *супергармонической для процесса X на открытом множестве G*, если она удовлетворяет следующим условиям.

B_1. *Функция $f(x)$ является C_0 – непрерывной и почти борелевской;*

B_2. *Функция $f(x)$ ограничена снизу на каждом множестве $U \in \mathfrak{N}(G)$;*

B_3. *Для любых $x \in G$, $U \in \mathfrak{N}(G)$*

$$T_{\tau(U)} f(x) \leqslant f(x).$$

Говорят, что $f(x)$ – супергармоническая функция для процесса X, если она является супергармонической функцией на всем пространстве E. Из теоремы 12.4 в [1] вытекает, что *множество всех неотрицательных супергармонических функций совпадает с множеством всех эксцессивных функций для процесса X.*

Функция $f(x)(x \in E)$ называется *субгармонической для X на открытом множестве G*, если функция $-f(x)$ является супергармонической для X на G. Функции, являющиеся одновременно супер и субгармоническими, называются *гармоническими.*

Напомним еще, что функцию $f(x)$, заданную на полукомпакте $(E, \mathcal{B})$, называют *$\hat{C}$ – функцией*, если она непрерывна в случае компактного E, а в случае локально компактного, но не компактного E, если $f(x)$ непрерывна и для каждого $\varepsilon > 0$ существует компакт K_ε такой, что $|f(x)| < \varepsilon$ для всех $x \overline{\in} K_\varepsilon$.

Теорема 5. *Пусть X – стандартный процесс, G – открытое множество, $\bar{\mathfrak{N}}(G)$ – подсистема $\mathfrak{N}(G)$ такая, что каждое множество из $\mathfrak{N}(G)$ содержится в некотором множестве из $\bar{\mathfrak{N}}(G)$. Предположим, что для каждого $U \in \bar{\mathfrak{N}}(G)$ процесс, полученный из X путем остановки в момент $\tau(U)$ первого выхода из U, является феллеровским и $\inf_{x \in M} \mathbf{P}_x\{\tau(U) < \zeta\} > 0$.*

При этих условиях для того, чтобы $\hat{C}$ – функция $f(x)(x \in E)$ была гармонической для процесса X на множестве G необходимо и достаточно, чтобы $f \in D_{\mathfrak{A}}(G)$ и

$$\mathfrak{A} f(x) = 0, \qquad x \in G.$$

Доказательство. Необходимость прямо следует из определений $\mathfrak{A}$, $D_{\mathfrak{A}}(G)$ и гармоничности функции $f(x)$ для X на G.

Пусть теперь U – произвольное множество из $\mathfrak{N}(G)$. Для доказательства достаточности нам следует показать, что для всех $x \in E$

$$T_{\tau(U)} f(x) = f(x).$$

Выберем $\tilde{U} \supset U$, $\tilde{U} \in \mathfrak{N}(G)$ и обозначим через $\tilde{X}$ – процесс, полученный из X путем остановки в момент $\tau(\tilde{U})$. Из условий теоремы следует, что $\tilde{X}$ является стандартным $\hat{C}$ – процессом, т.е. отвечающая ему полугруппа операторов $\tilde{T}_t$ переводит в себя пространство $\hat{C}$ всех $\hat{C}$ – функций. Обозначим через $\tilde{A}$ и $\tilde{\mathfrak{A}}$ его $\hat{C}$ – инфинитезимальный (см. [1] стр. 88) и характеристический операторы, соответственно. Очевидно, что $f \in D_{\tilde{\mathfrak{A}}}$ и $\tilde{\mathfrak{A}} f(x) = 0$ для всех $x \in E$. Поскольку $f \in \hat{C}$ и $\mathfrak{A} f \in \hat{C}$, то по теореме 5.5 в [1] $f \in D_{\tilde{A}}$ и $\tilde{A} f = \tilde{\mathfrak{A}} f = 0$. В силу 1.3.В из [1]' отсюда следует, что для всех $t \geqslant 0$ $\tilde{T}_t f(x) = f(x)$.

Обозначим $\pi(x) = \mathbf{P}_x\{\tau(\tilde{U}) < \zeta\}$. Поскольку $\tilde{T}_t \pi(x) = \pi(x)$ для всех $t \geqslant 0$ (см. [1] стр. 519) и $\inf\limits_{x \in E} \pi(x) > 0$, то при достаточно большой константе K_2 функции $f(x) + K_2\pi(x)$ и $-f(x) + K_2\pi(x)$ будут эксцессивными для процесса $\tilde{X}$. Отсюда, в частности, следует, что

$$\tilde{T}_{\tau(U)}[f(x) + K_2\pi(x)] \leqslant f(x) + K_2\pi(x) \tag{20}$$

и

$$\tilde{T}_{\tau(U)}[-f(x) + K_2\pi(x)] \leqslant -f(x) + K_2\pi(x).$$

Из теоремы 4.6 в [1] следует, что

$$\tilde{T}_{\tau(U)}\pi(x) = \pi(x). \tag{21}$$

Тогда из (20) и (21) получаем, что

$$\tilde{T}_{\tau(U)} f(x) \leqslant f(x)$$

и

$$-\tilde{T}_{\tau(U)} f(x) \leqslant -f(x),$$

т.е.

$$\tilde{T}_{\tau(U)} f(x) = f(x).$$

Поскольку, очевидно, $\tilde{T}_{\tau(U)} f(x) = T_{\tau(U)} f(x)$, то $T_{\tau(U)} f(x) = f(x)$ и теорема доказана.

Замечание 8. Заметим, что аналогичный несколько белее сильный результат для непрерывных стандартных процессов получен Е. Б. Дынкиным в м. 12.21 из [1].

§ 5. Об эквивалентности задачи оптимальной остановки и обобщенной задачи Стефана

Предположим, что мы нашли некоторое решение $\left(s(x),\, D\right)$ задачи (10)–(13). Возникает естественный вопрос о том, при каких условиях найденное решение $s(x)$ совпадает с ценой.

Сначала докажем следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть X – стандартный процесс, $g(x)$ – непрерывная ограниченная функция и ее н.э.м. $s(x)$ непрерывна снизу. Сделаем следующие предположения.*

C_1. *Эксцессивная $\hat{C}$ – функция $s_1(x) \geqslant g(x)$, $x \in E$, в некотором откры том множестве C удовлетворяет уравнению*

$$\mathfrak{A} s_1(x) = 0, \qquad x \in C,$$

и

$$s_1(x) = g(x), \qquad x \in D = E \setminus C;$$

C_2. *Для каждого $U \in \tilde{\mathfrak{U}}(C)$ процесс, полученный из X путем остановки в момент $\tau(U)$ является феллеровским и $\inf_{x \in U} \mathbf{P}_x \{\tau(U) < \zeta\} > 0$;*

C_3. *Существует мера $\tilde{\mu}(\cdot)$ на C, удовлетворяющая* (4), *и*

$$\mu(C) < 1;$$

C_4. *Для процесса X выполнено условие* A *при $x \in C$.*

Тогда

$$s_1(x) \equiv s(x).$$

Доказательство. Из теоремы 5 и эксцессивности функции $s_1(x)$ легко вытекает, что $s_1(x)$ удовлетворяет уравнению (1):

$$s_1(x) = \max\{g(x),\ T_{\tau(U)} s_1(x)\},$$

где U – достаточно малые окрестности точки $x \in E$. Утверждение леммы 1 вытекает из следствия 3.

Теорема 6. *Пусть стандартный процесс X с фазовым пространством $E \subseteq R^n$, функция $g(x)$ и ее н. э. м. $s(x)$ удовлетворяют условиям леммы* 1. *Пусть $\hat{C}$ – функция $s_1(x)$ является решением задачи* (10) – (13) *и множество $C = \{x : s_1(x) \neq g(x)\}$ такое, что:*

D_1. *$g(x) \geqslant T_{\tau(U)} g(x)$ для достаточно малых окрестностей точек*

$$x \in E \setminus C;$$

D_2. *$g(x) \geqslant T_{\tau(U)} g(x) + c_1(\rho)$, $x \in \Gamma = \partial C$,* где *$U$ – сфера радиуса ρ с центром в точке x;*

D_3. *$s_1(x) \geqslant g(x)$, $x \in E$* и *$s_1(y) - g(y) \leqslant c_2(\rho)$ для достаточно малых ρ* и *$y \in C$ таких, что $\|x - y\| < \rho$, $x \in \Gamma$, причем $c_1(\rho) \geqslant c_2(\rho) \geqslant 0$.*

Тогда

$$s_1(x) \equiv s(x).$$

Доказательство теоремы 6 аналогично доказательству теоремы 9 из [3] и, используя результат теоремы 5, сводится к проверке того, что $s_1(x)$ является эксцессивной. Мы этого проводить не будем. Окончательное утверждение теоремы тогда следует из леммы 1.

Сделаем сейчас два замечания относительно возможного обобщения развитой в §§ 1–5 теории. Во-первых, вместо функционала $\mathbf{M}_x g(x_\tau)$ можно рассматривать более общий функционал $\mathbf{M}_x\left(g(x_\tau) + \int\limits_0^\tau c(x_t)\,dt\right)$. Во многих случаях эта задача сводится к прежней, если заменить функцию g на некоторую другую функцию $\tilde{g}$ (по этому поводу см. [2] и [3]).

Во-вторых, если или функция g зависит от времени t, или процесс x_t неоднороден, или то и другое, то, рассматривая вместо процесса x_t однородный процесс (x_t, t), задачу опять сведем к исследованной.

§ 6. Задача Вальда различения двух простых гипотез о параметре пуассоновского процесса

В качестве примера рассмотрим вальдовскую задачу различения двух простых гипотез о неизвестном параметре пуассоновского процесса по результатам наблюдения и покажем, что она сводится к задаче оптимальной остановки некоторого процесса изученного нами класса, а последняя – к некоторой обобщенной задаче Стефана.

Предположим, что наблюдается случайный процесс x_t, $t \geqslant 0$, на R^1, удовлетворяющий стохастическому уравнению Ито

$$dx_t = p\left(dt \times \left[\frac{1}{\lambda_\Theta}, \infty\right)\right),$$

где $p(dt \times du)$ – стандартная пуассоновская мера (см., например, [9]), Θ – случайная величина ($\mathbf{P}\{\Theta=0\}=\pi$, $\mathbf{P}\{\Theta=1\}=1-\pi$), $\lambda_0 \neq \lambda_1$ – некоторые положительные константы.

Рассматриваемая задача состоит в различении двух гипотез $H_0 : \Theta = 0$ и $H_1 : \Theta = 1$ по результатам наблюдений за процессом x_t. Пусть штрафы за ошибки первого и второго рода будут a и b, соответственно, а плата за единицу времени наблюдения процесса равна c.

Обозначим

$$\pi_t = \mathbf{P}\{\Theta = 0 \mid x_s, s \leqslant t\},$$

$$g(\pi) = \min\left(a\pi, b(1-\pi)\right).$$

Аналогично, как это сделано в случае той же задачи для винеровского процесса в [10], можно доказать, что вальдовская задача сводится к оптимальной остановке процесса π_t, $t \geqslant 0$, когда минимизируется функционал $\mathbf{M}_\pi\left(c\tau + g(\pi_\tau)\right)$.

Нетрудно непосредственно проверить, что π_t, $t \geqslant 0$, является марковским процессом и удовлетворяет стохастическому уравнению Ито:

$$d\pi_t = a(\pi_t)\,dt + \int_{R^1} f(\pi_t, u)\,p(dt \times du),$$

где

$$a(\pi) = (\lambda_1 - \lambda_0)\,\pi(1-\pi)$$

и

$$f(\pi, u) = \begin{cases} 0 & \text{при } u < \dfrac{1}{(\lambda_0-\lambda_1)\pi+\lambda_1}, \\ \dfrac{\pi(1-\pi)(\lambda_0-\lambda_1)}{(\lambda_0-\lambda_1)\pi+\lambda_1} & \text{при } u \geqslant \dfrac{1}{(\lambda_0-\lambda_1)\pi+\lambda_1}. \end{cases}$$

Легко также убедиться, что для процесса $\{\pi_t, t \geqslant 0\}$ применимы результаты полученные в §§ 1–5.

Находим, что функция

$$s(\pi)=\inf_{\tau\in\mathfrak{M}}\mathbf{M}_\pi\left(c\tau+g(\pi_\tau)\right)$$

удовлетворяет уравнению

$$s(\pi)=\min\{g(\pi),\ c\ \mathbf{M}_\pi\tau(u)+T_{\tau(U)}s(\pi)\}$$

и для некоторого открытого интервала $(\pi_1,\ \pi_2)\subset[0,\ 1]$

$$\mathfrak{A}s(\pi)=-c,\quad \pi\in(\pi_1,\ \pi_2),$$

и

$$s(\pi)=g(\pi),\quad \pi\overline{\in}(\pi_1,\ \pi_2), \tag{22}$$

где

$$\mathfrak{A}s(\pi)=(\lambda_1-\lambda_0)\pi(1-\pi)\frac{ds}{d\pi}+[(\lambda_0-\lambda_1)\pi+\lambda_1]\left(s\left(\frac{\pi\lambda_0}{(\lambda_0-\lambda_1)\pi+\lambda_1}\right)-s(\pi)\right).$$

Имеем, что

$$\alpha(\pi_1)=\begin{cases}1 & \text{при}\quad \lambda_0<\lambda_1,\\ 0 & \text{при}\quad \lambda_0>\lambda_1,\end{cases}$$

$$\alpha(\pi_2)=\begin{cases}0 & \text{при}\quad \lambda_0<\lambda_1,\\ 1 & \text{при}\quad \lambda_0>\lambda_1,\end{cases}$$

$$\beta(\pi_i)=\frac{1}{|a(\pi_i)|},\qquad i=1,\ 2.$$

Далее, при $\lambda_0<\lambda_1$ $\left(f(\pi)=s(\pi)-g(\pi)\right)$

$$\mathfrak{A}_2f(\pi_1)=0,\quad \mathfrak{A}_2f(\pi_2)=\mathfrak{A}f(\pi_2)-a(\pi_2)\frac{df(\pi_2)}{d\pi},$$

а при $\lambda_0>\lambda_1$

$$\mathfrak{A}_2f(\pi_1)=\mathfrak{A}f(\pi_1)-a(\pi_1)\frac{ds(\pi_1)}{d\pi},\quad \mathfrak{A}_2f(\pi_2)=0.$$

Таким образом, условия „склеивания" будут в случае $\lambda_0<\lambda_1$

$$s(\pi_1)=g(\pi_1)\quad\text{и}\quad \frac{ds(\pi_2)}{d\pi}=\frac{dg(\pi_2)}{d\pi},$$

а в случае $\lambda_0>\lambda_1$

$$\frac{ds(\pi_1)}{d\pi}=\frac{dg(\pi_1)}{d\pi}\quad\text{и}\quad s(\pi_2)=g(\pi_2).$$

Ими и (22) цена $s(\pi)$ и константы π_1 и π_2 определяются однозначно.

В заключение заметим, что некоторые исследования о последовательном выборе между двумя решениями для процесса Пуассона проводились В. С. Михалевичем [11 – 12].

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
10.XI.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Б. Дынкин, Марковские процессы, М., Физматгиз, 1963.
2. Е. Б. Дынкин, Оптимальный выбор момента остановки марковского процесса. ДАН СССР, 150, 2 (1963), 238—240.
3. Б. И. Григелионис, А. Н. Ширяев, О задаче Стефана и оптимальных правилах остановки марковских процесов, Теория вероятн. и ее применение, **XI**, 4 (1966).

4. Б. Григелионис, Об эксцессивных функциях и оптимальных правилах остановки ступенчатых марковских процессов, Лит. мат. сб., **VII**, 2, 37—44 (1967).
5. Дж. А. Хант, Марковские процессы и потенциалы, М., ИЛ, 1962.
6. М. Г. Шур, Локализация понятия эксцессивной функции, связанной с марковским процессом, Теория вероятн. и ее применение, **VII**, 2 (1962), 191—196.
7. Р. З. Хасьминский, Эргодические свойства возвратных диффузионных процессов и стабилизация решений задачи Коши для параболических уравнений, Теория вероятн. и ее применение, **V**, 2 (1960), 196—214.
8. G. Maruyama, H. Tanaka, Ergodic property of N-dimensional recurrent Markov process, Mem. Fac. Kyushu Univ., A- XIII, 2, (1959), 157—172.
9. А. В. Скороход, Исследования по теории случайных процессов, Киев, Из-во Киевского ун-та, 1961.
10. А. Н. Ширяев, О двух задачах последовательного анализа, Кибернетика, 5 (1966).
11. В. С. Михалевич, Последовательные байсовские решения и оптимальные методы приемочного статистического контроля, Теория веротн. и ее применение, **I**, 4 (1956), 437—465.
12. В. С. Михалевич, Последовательный выбор между двумя решениями для процесса Пуассона, Теория вероятн. и ее применение, **III**, 4 (1958), 465—470.

APIE MARKOVO PROCESŲ OPTIMALŲ SUSTABDYMĄ

B. GRIGELIONIS

(Reziumė)

[3] darbe gautos sąlygos, kai tolydinio Markovo proceso optimalaus sustabdymo uždavinys yra ekvivalentus taip vadinamam apibendrintam Stefano uždaviniui. Šiame straipsnyje tie rezultatai apibendrinami plačiai netolydinių Markovo procesų klasei.

ON OPTIMAL STOPPING OF MARKOV PROCESSES

B. GRIGELIONIS

(Summary)

In the paper [3] the conditions, when the optimal stopping problem for continuous Markov processes is equivalent to the so called generalized Stefan problem, are given. These results are extended for the wide class of discontinuous Markov processes in this paper.