LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 2, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 2, 1967

О СПЕКТРАЛЬНОМ РАДИУСЕ ИНТЕГРАЛРНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВОЛЬТЕРРА

П. П. ЗАБРЕЙКО

Основную роль в теории интегральных уравнений Вольтерра второго рода с интегральным оператором

$$Kx(t)=\int_a^t k(t,\ s)\,x(s)\,ds, \tag{1}$$

ядро $k(t,\ s)$ которого непрерывно, играет тот факт, что спектральный радиус $\rho(K)$ оператора K (в пространстве C) равен нулю. Именно отсюда вытекает, что уравнение Вольтерра второго рода имеет единственное непрерывное решение при любой непрерывной правой части.

Известно (см., напр., [1]), что спектральный радиус, действующего в пространстве C интегрального оператора Вольтерра с произвольным ядром $k(t,\ s)$ не обязательно равен нулю. В связи с этим, представляют интерес различные достаточные признаки равенства $\rho(K)=0$; ряд таких признаков изложен в [1].

В настоящей статье приводится формула для спектрального радиуса интегральных операторов Вольтерра, действующих в общих банаховых пространствах измеримых функций. Из этой формулы, в частности, вытекают общие признаки равенства нулю спектрального радиуса операторов Вольтерра; эти признаки значительно обобщают признаки из [1].

1. Пусть Ω – ограниченное замкнутое множество конечномерного пространства. Интегральный оператор

$$Kx(t)=\int_\Omega k(t,\ s)\,x(s)\,ds \tag{2}$$

будем называть *оператором Вольтерра*, если $k(t,\ s)=0$ при $t\in\Omega(\lambda)$, $s\,\bar{\in}\,\Omega(\lambda)$, где $\Omega(\lambda)\,(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$ – некоторое семейство ограниченных замкнутых подмножеств Ω, удовлетворяющее условиям:

а) $\Omega(0)=0,\ \Omega(1)=\Omega$;

б) $\Omega(\lambda')\subseteq\Omega(\lambda'')$, если $\lambda'\leqslant\lambda''$;

в) $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0}\operatorname{mes}\{\Omega(\lambda)\backslash\Omega(\lambda_0)\}=0$.

Примером интегрального оператора Вольтерра может служить оператор (1) (здесь $\Omega(\lambda)=[a,\ a+\lambda(b-a)]$), или оператор

$$Kx(t)=\int_t^b k(t,\ s)\,x(s)\,ds \tag{3}$$

(здесь $\Omega(\lambda)=[a+(1-\lambda)(b-a),\ b]$). Более общим примером интегрального оператора Вольтерра может служить оператор

$$Kx(t)=\int_{c_1(t)}^{c_2(t)} k(t,\ s)\,x(s)\,ds, \tag{4}$$

где $c_1(t)$ неубывающая, а $c_2(t)$ невозрастающая непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$c_1(a)=c_2(a),\quad c_1(b)=a,\quad c_2(b)=b.$$

В этом примере $\Omega(\lambda)=\Big[c_1[(1-\lambda)a+\lambda b],\ c_2[(1-\lambda)a+\lambda b]\Big]$.

При изучении интегральных операторов (2) важную роль играет транспонированный оператор (см., напр., [6]), который определяется равенством

$$K^*x(t)=\int_{\Omega} k^*(t,\ s)\,x(s)\,ds, \tag{5}$$

где $k^*(t,\ s)=\overline{k(s,\ t)}$. Для оператора Вольтерра транспонированный оператор также является оператором Вольтерра; при этом $\Omega^*(\lambda)=\Omega\backslash\Omega(1-\lambda)$.

2. Напомним, что банахово пространство E измеримых на Ω функций называется *идеальным* (или идеальной структурой), если из $|x|\leqslant|y|$ и $y\in E$, где x – измеримая функция, вытекает, что $x\in E$ и $\|x\|\leqslant\|y\|$. Через P_D, где $D\subset\Omega$, ниже обозначается оператор умножения на характеристическую функцию множества D; оператор P_D действует в каждом идеальном пространстве E и его норма равна единице.

Примерами идеальных пространств являются широко известные пространства $L_p\,(1\leqslant p\leqslant\infty)$ и их естественные обобщения – пространства Орлича, различные классы пространств, рассматривавшихся в работах Лоренца, Марцинкевича, Гальперина и других авторов, и т. д.

Пусть E – идеальное пространство и K – интегральный оператор Вольтерра с ядром $k(t,\ s)$, действующий в пространстве E. Введем в рассмотрение определенные при $0\leqslant u\leqslant v\leqslant 1$ функции

$$\Phi_n(u,\ v)=\sqrt[n]{\|[P_{\Omega(v)\backslash\Omega(u)}KP_{\Omega(v)\backslash\Omega(u)}]^n\|}\qquad(n=1,\ 2,\ \ldots) \tag{6}$$

и

$$\Phi_\infty(u,\ v)=\lim_{n\to\infty}\Phi_n(u,\ v) \tag{7}$$

(предел справа здесь всегда существует).

Ниже через $\delta(\Psi)$, где $\Psi=\Psi(u,\ v)$ определенная при $0\leqslant u\leqslant v\leqslant 1$ функция, обозначается число

$$\delta(\Psi)=\inf_{0=u_0<u_1<\ldots<u_n=1}\ \max_{1\leqslant i\leqslant n}\Psi(u_{i-1},\ u_i). \tag{8}$$

Теорема 1. *Пусть K – действующий в идеальном пространстве E оператор Вольтерра с ядром $k(t,\ s)$.*

Тогда $\rho(K)=\delta(\Psi_\infty)$.

Доказательство. Неравенство

$$\rho(K)\geqslant\delta(\Phi_\infty) \tag{9}$$

вытекает очевидным образом из неравенств

$$\|K^n\|\geqslant\|[P_{\Omega(v)\backslash\Omega(u)}KP_{\Omega(v)\backslash\Omega(u)}]^n\|. \tag{10}$$

Для доказательства обратного неравенства достаточно показать, что при любом λ, $|\lambda| > \delta(\Phi_\infty)$ уравнение

$$\lambda x - Kx = f \tag{11}$$

имеет единственное решение в E при любом $f \in E$.

Пусть $|\lambda| > \delta(\Phi_\infty)$. Выберем числа $0 = u_0 < u_1 < \cdots < u_n = 1$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\Phi_\infty(u_{i-1}, u_i) < |\lambda| \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{12}$$

и обозначим через E_i $(i = 1, \ldots, n)$ подпространство функций, аннулирующихся вне $D_i = \Omega(u_i) \backslash \Omega(u_{i-1})$. Очевидно, пространство E является прямой суммой подпространств $E_1, \ldots, E_n$.

Интегральное уравнение

$$\lambda x(t) - \int\limits_\Omega k(t, s) x(s) ds = f(t) \tag{13}$$

эквивалентно системе

$$\begin{gathered}
\lambda x_1(t) - \int\limits_{D_1} k(t, s) x_1(s) ds = f_1(t) \qquad (t \in D_1), \\
\lambda x_2(t) - \int\limits_{D_2} k(t, s) x_2(s) ds = f_2(t) + \int\limits_{D_1} k(t, s) x_1(s) ds \qquad (t \in D_2) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\lambda x_n(t) - \int\limits_{D_n} k(t, s) x_n(s) ds = f_n(t) + \\
+ \int\limits_{D_1} k(t, s) x_1(s) ds + \cdots + \int\limits_{D_{n-1}} k(t, s) x_{n-1}(s) ds \qquad (t \in D_n);
\end{gathered} \tag{14}$$

здесь $x_i(t) = P_{D_i} x(t)$, $f_i(t) = P_{D_i} f(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Эта система имеет единственное решение $\{x_1, \ldots, x_n\}$ $(x_i \in E_i)$ какова бы ни была функция $f \in E$, так как спректральный радиус каждого из операторов

$$K_i x(t) = \int\limits_{D_i} k(t, s) x(s) ds \qquad (t \in D_i) \tag{15}$$

в E_i меньше $|\lambda|$. Тем самым, и уравнение (13) имеет единственное решение в E при любом $f \in E$.

Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Пусть K действующий в идеальном пространстве E интегральный оператор Вольтерра с ядром $k(t, s)$.*

Тогда при любом $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$\rho(K) \leqslant \delta(\Phi_n). \tag{16}$$

Отметим, что для интегрального оператора Вольтерра с ядром

$$k(t, s) = \begin{cases} 2^n, & \text{если } \frac{1}{2^n} \leqslant s \leqslant t < \frac{1}{2^{n-1}}, \\ 0 & \text{при всех остальных } t, s, \end{cases} \tag{17}$$

действующего в L_∞, справедливы равенства

$$\delta(\Phi_n) = \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \quad \delta(\Phi_\infty) = 0. \tag{18}$$

Отметим еще, что при доказательстве теорем 1 и 2 свойство в) множеств $\Omega(\lambda)$ не использовалось.

3. В этом пункте приводятся различные достаточные условия равенства нулю спектрального радиуса $\rho(K)$ интегрального оператора K.

Напомним [4], что оператор K обладает свойством Андо, если

$$\lim_{\mathrm{mes}\, D+\mathrm{mes}\, F\to 0} \|P_D K P_F\| = 0. \tag{19}$$

Из теоремы 2 поэтому немедленно следует

Теорема 3. *Пусть действующий в идеальном пространстве E интегральный оператор Вольтерра K с ядром $k(t, s)$ обладает свойством Андо.*

Тогда $\rho(K)=0$.

Пространство E называется правильным, если оно идеальное и если конус неотрицательных функций в нем является правильным [3]. Пространства L_p $(1 \leqslant p < \infty)$ правильные. К правильным пространствам относятся пространства Орлича с N-функцией, удовлетворяющей Δ_2-условию, и некоторые другие пространства.

Теорема 4. *Пусть интегральный оператор Вольтерра K с ядром $k(t, s)$ действует в правильном пространстве E и вполне непрерывен.*

Тогда $\rho(K)=0$.

Теорема 5. *Пусть интегральный оператор Вольтерра K с ядром $k(t, s)$ действует в L_1 (или L_∞) и (слабо) вполне непрерывен.*

Тогда $\rho(K)=0$.

Эти теоремы следуют из свойств (слабо) вполне непрерывных операторов, действующих в идеальных пространствах (см., напр., [4–5]) и из теоремы 3.

4. Пару идеальных пространств E, F измеримых функций называют двойственными, если

$$\|x\|_E = \sup_{\|y\|_F\leqslant 1} (x, y), \tag{20}$$

$$\|y\|_F = \sup_{\|x\|_E\leqslant 1} (x, y), \tag{21}$$

где

$$(x, y) = \int_\Omega x(s)\overline{y(s)}\,ds. \tag{22}$$

Примерами двойственных пространств являются пары пространств

$$L_p,\ L_{p'}\ \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right),$$

пары пространств Орлича с дополнительными по Юнгу N-функциями, пары пространств Лоренца и Марцинкевича и др.

Пусть E и F – пара двойственных пространств. Допустим, что оператор K действует в E и, кроме того, для любого $y\in F$ функционал (Kx, y) представим в виде $(x, \bar{y})$, где $\bar{y}\in F$. В этом случае говорят, что для оператора K в паре $\{E, F\}$ определен двойственный оператор $K'y=\bar{y}$. Двойственный оператор (если он существует) совпадает с сужением сопряженного к K оператора K^* на F (здесь считается, что F вложено в E^* естественным гомоморфизмом).

Допустим, что F совершенное пространство (см., напр., [6]). Тогда для регулярного (см. [2,6]) интегрального оператора Вольтерра K двойственный существует и совпадает с транспонированным оператором K^*.

Ниже через E^0, где E идеальное пространство, обозначается множество функций с абсолютно непрерывной нормой (т. е. функций $x \in E$, для которых $\lim\limits_{\text{mes}\, D\to 0} \|P_D x\| = 0$). Множество E^0 может содержать только нулевую функцию. В общем случае оно является правильным пространством (в случае, когда E — это пространство Орлича, порожденное N-функцией $M(u)$, E^0 — это пространство E_M).

Теорема 6. *Пусть E и F пара двойственных пространств, причем F совершенное пространство. Пусть K вполне непрерывный регулярный интегральный оператор Вольтерра, действующий в E. Пусть выполнено одно из условий:*

а) *K действует из E в E^0;*

б) *K^* действует из F в F^0;*

Тогда $\rho(K)=0$.

Доказательство следует из теоремы 3 и из свойств вполне непрерывных операторов (см. [6]).

5. Для интегральных операторов в пространстве C установленные выше теоремы непосредственно неприменимы, так как C не является идеальным пространством. Однако каждый действующий в C линейный интегральный оператор допускает продолжение в интегральный оператор, действующий в L_∞. Поэтому из теоремы о слабо вполне непрерывных операторах (см. [3]) и из теоремы 3 следует

Теорема 7. *Пусть интегральный оператор Вольтерра K с ядром $k(t, s)$ действует в C и слабо вполне непрерывен.*

Тогда $\rho(K)=0$.

6. Абстрактным аналогом изложенных выше результатов является теория операторов K, имеющих семейство инвариантных подпространств $\mathscr{E}=\{E_\lambda = P_\lambda E;\ 0\leqslant\lambda\leqslant 1\}$, где P_λ семейство проекторов, удовлетворяющее следующим условиям:

а) $P_0=0,\ P_1=I$;

б) $P_\lambda P_\mu = P_{\min\{\lambda,\mu\}}$;

в) $\|P_\lambda\|\leqslant a \quad (0\leqslant\lambda\leqslant 1)$.

Такие семейства подпространств будем называть нормальными семействами. Если $\mathscr{E}=\{E_\lambda=P_\lambda E;\ 0\leqslant\lambda\leqslant 1\}$ — нормальное семейство подпространств, то $\mathscr{E}^*=\{\bar{E}_\lambda=(I-P^*_{1-\lambda})E^*;\ 0\leqslant\lambda\leqslant 1\}$ нормальное семейство подпространств в сопряженном пространстве. Очевидно, что если K оставляет инвариантными подпространства из нормального семейства $\mathscr{E}$, то K^* оставляет инвариантными подпространства из нормального семейства $\mathscr{E}^*$.

Теоремы 1 и 2 остаются справедливыми для абстрактных операторов; нужно только считать, что в определении функций $\Phi_n(u, v)$ (см. (6)) вместо ператора $P_{\Omega(v)\setminus\Omega(u)}$ взят оператор $P_{(u,v)}=P_v-P_u$. Теорема 3 также остается праведливой, если свойство Андо заменить следующим свойством:

$$\lim_{v\to u}\|P_{(u,v)}KP_{(u,v)}\|=0. \tag{23}$$

Будем говорить, что норма x из E $\mathscr{E}$ — абсолютно непрерывна, если

$$\lim_{u\to v} \| P_{(u, v)} \| = 0. \qquad (24)$$

Множество E^0 всех x из E с $\mathscr{E}$ — абсолютно непрерывной нормой является замкнутым подпространством E. Если $E = E^0$, то будем называть E $\mathscr{E}$ — правильным. Отметим, что для компактных множеств $\mathfrak{M} \subset E^0$ выполняется соотношение

$$\lim_{u\to v} \sup_{x\in\mathfrak{M}} \| P_{(u, v)} x \| = 0. \qquad (25)$$

Из этого свойства вытекает приводимая ниже теорема, которая является абстрактным аналогом теорем 4 и 6.

Теорема 8. *Пусть E — банахово пространство, $\mathscr{E}$ — нормальное семейство подпространств E, K — действующий в E вполне непрерывный оператор, оставляющий инвариантным подпространства из $\mathscr{E}$. Пусть выполнено одно из условий:*

а) *K действует из E в E^0;*

б) *K^* действует из F в F^0, где F — определяющее подпространство сопряженного к E пространства E^*.*

Тогда $\rho(K) = 0$.

7. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн сообщили мне, что ими получены близкие результаты для случая, когда E — гильбертово пространство (см. их монографию „Теория Вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения") и что М. А. Баркарь и И. Ц. Гохберг часть из этих результатов перенесли на случай банаховых пространств.

Автор выражает благодарность М. А. Красносельскому, под руководством которого он работает.

Воронежский Государственный университет

Поступило в редакцию 10.X.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. A. C. Zaanen, Linear analysis, New-York — Amsterdam, 1953.
2. Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер, Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, Гостехиздат, 1950.
3. М. А. Красносельский, Положительные решения операторных уравнений, Физматгиз, 1963.
4. М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, П. Е. Соболевский, Е. И. Пустыльник, Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, Наука, 1966.
5. Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, Линейные операторы, общая теория, ИЛ, 1963.
6. П. П. Забрейко, Нелинейные интегральные операторы, Труды семинара по функциональному анализу, вып. 8, Воронеж, 1966.

APIE INTEGRALINIŲ VOLTEROS OPERATORIŲ SPEKTRINĮ SPINDULĮ

P. ZABREIKO

(Reziumė)

Bendrose funkcionalinėse erdvėse nagrinėjami integraliniai Volteros operatoriai. Išvedama tokių operatorių spektrinio spindulio formulė ir nustatomos pakankamos spektrinio spindulio lygybės nuliui sąlygos. Tarp kitko įrodoma, kad, esant natūralioms papildomoms sąlygoms, pilnai tolydinių Volteros operatorių spektrinis spindulys yra lygus nuliui.

A FORMULA OF SPECTRAL RADIUS OF INTEGRAL VOLTERRA OPERATORS

P. ZABREIKO

(Summary)

This paper is concerned with the study of integral Volterra operators in general function spaces. Here the formula of spectral radius of such operators is proved and sufficient conditions of equality of spectral radius to zero are given. In particular it is shown that under added non-essential conditions the spectral radius of complete continuous operators Volterra is equal to zero.