LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 2, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 2, 1967

О НЕПРЕРЫВНОСТИ ОПЕРАТОРА СУПЕРПОЗИЦИИ, ДЕЙСТВУЮЩЕГО В НОРМИРОВАННЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ПРОСТРАНСТВ

П. МЕНЦ

Рядом авторов изучалась непрерывность оператора суперпозиции $fx(t)=$ $=f\Big(t,\ x(t)\Big)$, где $f(t,\ x)$ – функция Каратеодори, а $x(t)$ – элемент некоторого пространства функций (см. [1, 2] и имеющиеся там литературные указания). В настоящей статье устанавливается непрерывность оператора суперпозиции, действующего в нормированных произведениях, и указываются некоторые приложения полученных результатов к теории бесконечных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Нормированные произведения и оператор суперпозиции

Пусть E_i, $i=1,2,\ \ldots$ – банаховы пространства и l – банахово пространство последовательностей. Множество последовательностей $x=(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots)$, $\xi_i \in E_i$, для которых $|x|=(\|\xi_1\|_1,\ \|\xi_2\|_2,\ \ldots)\in l$ и норма определена по формуле $\|x\|=\|\,|x|\,\|_l$, образуют банахово пространство, которое называют нормированным произведением. Мы будем его обозначать через $l[E_i]$.

Будем говорить, что x_n σ – сходится к x_0 в $l[E_i]$, если 1. $\|x_n\|\leqslant M$, 2. $\|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(o)}\|_i\to 0$ при $n\to\infty$, $i=1,\ 2,\ \ldots$ Соотвествующее топологическое пространство обозначим через $l_\sigma[E_i]$.

Если оператор F, вообще говоря, нелинейный, действует из $l[E_i]$ в нормированное произведение $l^1[E_k']$, то он представим в виде $F=(F_1,\ F_2,\ \ldots)$, где F_k – операторы, действующие из $l[E_i]$ в E_k'. Оператор F называется непрерывным, если он преобразует сходящиеся последовательности в сходящиеся. Обозначим для каждого k через $\varphi(k)\geqslant 1$ наибольший индекс i, при котором F_k не зависит от $\xi_1,\ \ldots,\ \xi_{i-1}$, т. е.

$$F_k x=F_k(\xi_1,\ \xi_2,\ldots)\equiv F_k(0,\ \ldots,\ 0,\ \xi_i,\ \xi_{i+1},\ \ldots)$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия: l таково, что* $\|P(1,\ n)y\|_l\to\|y\|_l$, $\|P(n,\ \infty)y\|_l\to 0$ *при* $n\to\infty$, $y\in l^{*)}$. 2. *Оператор F действует из $l[E_i]$ или из $m_\sigma[E_i]$ в одно из пространств $l^p[E_i]$, $(p\geqslant 1)$, $c_0[E_i]$, $m_\sigma[E_i]$*. 3. *Операторы F_k непрерывны*. 4. $\varphi(k)\to\infty$ *при* $k\to\infty$.

Тогда оператор F непрерывен.

Эта теорема может быть доказана методом, примененным нами в [3], без существенных изменнний.

*) Здесь $P(i,\ j)\,y=(0,\ \ldots,\ 0,\ \eta_i,\ \eta_{i+1},\ldots,\ \eta_j,\ 0,\ldots)$.

Будем говорить, что $F_k(t,x)$ функционал Каратедори, определенный на $[0, a] \times d$, если он удовлетворяет условиям: 1. $F_k(t, x)$ измеримо по t для всякого $x \in d$, 2. $F_k(t, x)$ непрерывен по x для почти всех $t \in [0, a]$, где d — одно из пространств s, m_σ*), c_0, l^r, $(r \geqslant 1)$.

Пусть $x(t)$ — измеримая абстрактная функция**) со значениями в d. Тогда определена суперпозиция $F_k\Big(t, x(t)\Big)$ и легко показать, что она будет измеримой функцией от t. Если $k=1, 2, \ldots$, то на множестве измеримых абстрактных функций определяется оператор $F\Big(t, x(t)\Big)=\Big(F_1\Big(t, x(t)\Big), F_2\Big(t, x(t)\Big), \ldots\Big)$, который мы будем называть оператором суперпозиции.

2. Вспомогательная лемма

Лемма 1. *Пусть d одно из простронств s, m_σ, c_0, l^r и на $[0, a]\times d$ определен функционал Каратеодори $f(t, x)$. Пусть далее измеримые абстрактные функции $v(t)$, $w(t)\in d$ для почти всех t и удовлетворяют требованиям:* 1. $v(t)\leqslant w(t)$***). 2. *Если d отлично от s, то функции $v(t)$, $w(t)\in d[L^\infty]$.*

Тогда существует измеримая функция $x^*(t)$ такая, что $v(t)\leqslant x^*(t)\leqslant w(t)$ и

$$\sup_{v(t)\leqslant x\leqslant w(t)} |f(t, x)|=\Big|f\Big(t, x^*(t)\Big)\Big|.$$

Доказательство. Положим

$$\sup_{v(t)\leqslant x\leqslant w(t)} |f(t, x)|=z(t).$$

На множестве $\Omega \subset [0, a]$ полной меры функционал $f(t, x)$ непрерывен по x и $v(t)$, $w(t)\in d$. Множества $\{t: v(t)\leqslant x\leqslant w(t),\ t\in\Omega$ фиксировано$\}$ компактны в d. Поэтому $\sup|f(t, x)|$ достигается на некотором замкнутом множестве X_t. Сравним первые координаты ξ_1 точек $x\in X_t$. Наименьшую из них обозначим через $\xi_1^*(t)$. В множестве X_t может быть несколько элементов, у которых первая координата равна $\xi_1^*(t)$. Сравним вторые координаты этих элементов и обозначим наименьшую из них через $\xi_2^*(t)$. Продолжая этот процесс, получим элемент $x^*(t)=\Big(\xi_1^*(t), \xi_2^*(t), \ldots\Big)$. Очевидно, $v(t)\leqslant x^*(t)\leqslant w(t)$. Осталось доказать, что координатные функции $\xi_i^*(t)$ измеримы.

Рассмотрим при произвольном $h: -\infty<h<+\infty$ измеримые множества $V_h^{(i)}=\{t: v_i(t)\leqslant h\}$, $i=1,2, \ldots$ Определим функции $w_i^{(h)}(t)=\min\{h, w_i(t)\}$, $t\in V_h^{(i)}$ и элементы

$$w_h^{(i)}(t)=\Big(\xi_1^*(t), \ldots, \xi_{i-1}^*(t), w_i^{(h)}(t), w_{i+1}(t), w_{i+2}(t), \ldots\Big),\ t\in V_h^{(i)},\ i=1,2, \ldots$$

Далее положим

$$\sup_{v(t)\leqslant x\leqslant w_h^{(i)}(t)} |f(t, x)|=z_h^{(i)}(t),\ t\in V_h^{(i)},\quad i=1,2, \ldots$$

---

*) $m_\sigma=m_\sigma[R^1]$, где R^1 — одномерное евклидово пространство.

**) $x(t)$ называется измеримой, если измеримы все ее координатные функции $\xi_i(t)$, $i=1,2, \ldots$

***) в смысле $v_i(t)\leqslant w_i(t)$ для $t\in[0, a]$, $i=1,2, \ldots$

Нетрудно видеть, что имеют место следующие соотношения:

$$\{t: z(t) > z_h^{(i)}(t)\} = \{t: \xi_i^*(t) > h\}, \text{ если } t \in V_h^{(i)}, \qquad (1)$$
$$\xi_i^*(t) > h, \text{ если } t \bar{\in} V_h^{(i)}.$$

Обобщая лемму 17. 1 из [1], можно установить измеримость функций $z(t)$, $z_h^{(1)}(t)$. Тогда из (1) вытекает измеримость $\xi_1^*(t)$, и по индукции — измеримость каждой функции $\xi_i^*(t)$, $i=2,3, \ldots$

3. Непрерывность оператора суперпозиции

Теорема 2. *Пусть компонента* $F_k x(t) = F_k\Big(t, x(t)\Big)$ *оператора суперпозиции действует из пространства* B в $L^q (q \geqslant 1)$, *причем выполняются следующие условия: 1.* $B = l[E_i]$ *— одно из пространств* $m_\sigma[E]$, $c_0[E]$, $l^r[E]$, *где* $E = L^\infty$, $L^p (p \geqslant 1)$. 2. $F_k(t, x)$ *— функционал Каратеодори, определенный на* $[0, a] \times d$. 3. *Если* $E = L\infty$, *то* $d = l$. *Если* $E = L^p$, *то* $d = s$.

Тогда оператор $F_k x(t)$ *непрерывен.*

Доказательство. Достаточно показать, что из любой последовательности $x_n(t)$, сходящейся в B к $x_0(t)$, можно выбрать $y_n(t)$ — подпоследовательность, для которой

$$\| F_k y_n(t) - F_k x_0(t) \|_{L^q} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty. \qquad (2)$$

Укажем, как нужно выбрать $y_n(t)$.

Без ограничения общности, можно считать, что $x_n(t) \to x_0(t)$ для почти всех t. Оператор F_k переводит $x_n(t)$ в последовательность $F_k x_n(t)$, сходящуюся к $F_k x_0(t)$ для почти всех t (условие Каратеодори!). Кроме того, если $B \neq m_s[L^p]$, можно построить такой элемент $\bar{x}(t) \in B$, $\bar{x}(t) \geqslant 0$, что для некоторой последовательности $y_n(t) \in \{x_n(t)\}$ имеем $-\bar{x}(t) \leqslant y_n(t) \leqslant \bar{x}(t)$. Из леммы 1 тогда следует

$$\left| F_k\Big(t, y_n(t)\Big) \right| \leqslant \sup_{-\bar{x}(t) \leqslant x \leqslant \bar{x}(t)} |F_k(t, x)| = \left| F_k\Big(t, x^*(t)\Big) \right|, \quad x^*(t) \in B.$$

Последнее неравенство означает, что функции $F_k y_n(t)$ имеют равностепенно абсолютно непрерывные нормы в L^q и по теореме Лебега справедливо (2).

Рассмотрим наиболее сложный случай $B = m_\sigma[L^p]$. Сначала заметим, что для любого элемента $x(t)$ имеем

$$\| F_k P(1, i) x(t) - F_k x(t) \|_{L^q} \to 0 \quad \text{при } i \to \infty. \qquad (3)$$

Действительно, $P(1, i) x(t) \to x(t)$, $(i \to \infty)$ в $m_\sigma[L^p]$ и $-\bar{x}(t) \leqslant P(1, i) x(t) \leqslant \leqslant \bar{x}(t)$, $i = 1,2, \ldots$, где $\bar{x}(t) = \Big(|\xi_1(t)|, |\xi_2(t)|, \ldots \Big)$. Повторяя рассуждение первой части доказательства, убедимся в справедливости (3).

Зафиксируем некоторое произвольное $\varepsilon > 0$. В силу (3) для всякого n можно найти $j^{(n)} \geqslant n$ так, что

$$\| F_k P(1, i) x_n(t) - F_k x_n(t) \|_{L^q} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при } i \geqslant j^{(n)}. \qquad (4)$$

Тем же методом, с помощью которого доказывалось (3), проверяется и соотношение

$$\| F_k P(1, j^{(n)}) x_n(t) - F_k x_0(t) \|_{L^q} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

В самом деле, при $n\to\infty$ последовательность $P(1, j^{(n)})x_n(t)$ сходится в $m_\sigma[L^p]$ к $x_0(t)$. Построим для некоторой ее подпоследовательности мажоранту $\bar{x}(t)$. При достаточно большом $M>0$ выполняется оценка $\|x_n(t)-x_0(t)\|_B\leqslant \leqslant\frac{1}{2}M$, $n=1,2,\ldots$ Положим $x_{11}(t)=x_1(t)$. Выберем теперь подпоследовательность $x_{nn}(t)\in\{x_n(t)\}$ $(n>1)$ так, чтобы выполнялись соотношения

$$\|P(1, j^{(n-1, n-1)})[x_{nn}(t)-x_0(t)]\|_B\leqslant\frac{1}{2^n}M.$$

Тогда для последовательности $P(1, j^{(n,n)})x_{nn}(t)$ будем иметь

$$-\bar{x}(t)\leqslant P(1, j^{(n,n)})x_{nn}(t)\leqslant\bar{x}(t),\quad n=1,2\ \ldots,$$

где

$$\bar{\xi}_i(t)=|\xi_i^{(0)}(t)|+\sum_{\substack{n:\\ j^{(n,n)}\geqslant i}}|\xi_i^{(n,n)}(t)-\xi_i^{(0)}(t)|.$$

$\bar{x}(t)\in m[L^p]$, так как $\|\bar{\xi}_i(t)\|_{L^p}\leqslant\|\xi_i^{(0)}(t)\|_{L^p}+M$, $i=1,2,\ldots$

Непрерывность оператора F_k на последовательности $P(1, j^{(n,n)})x_{nn}(t)$ означает, что при $n>n_0$ (n_0 — достаточно велико)

$$\|F_kP(1, j^{(n,n)})x_{nn}(t)-F_kx_0(t)\|_{L^q}<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Объединяя (4) и (5), получаем

$$\|F_kx_{nn}(t)-F_kx_0(t)\|_{L^q}<\varepsilon\quad\text{при } n>n_0.$$

Так как $\varepsilon>0$ произвольно, то отсюда следует (2) для последовательности $y_n(t)=x_{nn}(t)$.

Теорема доказана.

Из теорем 1 и 2 непосредственно вытекает

Теорема 3. *Пусть оператор $Fx(t)=(F_1x(t), F_2x(t), \ldots)$ действует из B в одно из пространств $m_\sigma[L^q]$, $c_0[L^q]$, $l^s[L^q]$ и выполнены условия 1, 2 и 3 теоремы 2. Пусть далее $\varphi(k)\to\infty$. при $k\to\infty$.*

Тогда оператор $Fx(t)$ непрерывен.

Сформулируем еще одну лемму, которая будет использоваться в пункте 4.

Лемма 2. *Пусть l — одно из пространств m_σ, c_0, l^r и $F_k(t, x)$ — функционал Каратеодори, определенный на $[0, a]\times l$.*

Если оператор $F_kx(t)$ действует из $l[C]$ в L^q, то он действует и из $l[L^\alpha]$ в L^q.

Доказательство является простым обобщением доказательства теоремы 1 из [4].

4. Теорема Пеано для бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающими аргументами

В последних пунктах мы рассмотрим ряд вопросов из теории бесконечных систем дифференциальных уравнений, связанных прямо или косвенно с предыдущими теоремами. В начале приведем одну теорему существования.

Пусть дано семейство неотрицательных функций $h_i(t)\in L^\infty(0, a)$, $i=1,2,\ldots$ и элемент $x_0(s)=\left(\xi_1^{(0)}(s_1), \xi_2^{(0)}(s_2), \ldots\right)\in l[\tilde{C}_i]$, где $\tilde{C}_i$ — банаховы пространства функций $\xi_i(s_i)$, непрерывных на $[-\|h_i(t)\|_{L^\infty}, 0]$, за исключением, может быть, некоторого фиксированного замкнутого счетного множества A точек, в которых функции имеют конечные односторонние пределы (норма в $\tilde{C}_i$ определяется по формуле $\|\xi_i(s_i)\|_i = \sup\{|\xi_i(s_i)|: s_i \in [-\|h_i(t)\|_{L^\infty}, 0], s_i \bar{\in} A\}$).

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с запаздывающими аргументами

$$\frac{d\xi_i(t)}{dt} = F_i\Big(t,\ x(t),\ x_h(t)\Big),\quad t\in[0,\ a],\quad i=1,2,\ \dots, \tag{6}$$

где

$$x(t) = \Big(\xi_1(t),\ \xi_2(t),\ \dots\Big),\quad x_h(t) = \Big(\bar{\xi}_1\Big(t-h_1(t)\Big),\ \bar{\xi}_2\Big(t-h_2(t)\Big),\ \dots\Big),$$

а

$$\bar{\xi}_i\Big(t-h_i(t)\Big) = \begin{cases} \xi_i\Big(t-h_i(t)\Big) & \text{при } t-h_i(t)\geqslant 0, \\ \xi_i^{(0)}\Big(t-h_i(t)\Big) & \text{при } t-h_i(t)<0. \end{cases}$$

Мы исследуем задачу о существовании решения – функции $x(t)$ со значениями в l при $t\in[0,\ \gamma]$, удовлетворяющей при почти каждом t системе (6) и условию $x(0)=x_0\in l$. Таким образом, элемент $\{x_0,\ x_0(s)\}$ является начальным условием задачи Коши.

Замечание. Если $h_i(t)\equiv h_i$, то вместо $\tilde{C}_i$ можно взять $L^\infty(-h_i,\ 0)$.

Ниже всегда будет предполагаться, что правые части в (6) удовлетворяют следующим требованиям:

1. $F_i(t,\ x,\ y)$ – функционал Каратеодори, определенный на $[0,\ a]\times l\times l$.

2. $|F_i(t,\ x,\ y)|\leqslant M_i(t;\ R)\in L^1$, $\|x-x_0\|_l$, $\|y-y_0\|_l\leqslant R$. (7)

Замечание. Если $l=m_\sigma$, то 2 является необходимым условием действия оператора $F_i\{x(t),\ y(t)\}=F_i\Big(t,\ x(t), y(t)\Big)$ из $m[C(0,\ a)]\times m[L^\infty(0,\ a)]$ в L^1. Действительно, с помощью лемм 2 и 1 показывается, что $F_i\{x(t), y(t)\}$ действует из $m[L^\infty(0,\ a)]\times m[L^\infty(0,\ a)]$ в L^1 и выполняется (7).

При условиях 1 и 2 система (6) эквивалентна системе интегральных уравнений, которую запишем в векторной форме

$$x(t)=x_0+\int\limits_0^t F\Big(\tau,\ x(\tau),\ x_h(\tau)\Big)\,d\tau. \tag{8}$$

Теорема 4. *Пусть $l=m_\sigma$ и операторы $F_i\,x(t)$, $i=1,2,\ \dots$ удовлетворяют условиям 1, 2 и*

3. Функции $M_i(t;\ R)$ имеют равностепенно абсолютно непрерывные нормы в L^1 в точке Θ.

Тогда при $\gamma>0$ достаточно малом система (8) имеет решение $x(t)\in m$, $t\in[0,\ \gamma]$.

Доказательство. Найдем γ так, чтобы

$$\int\limits_0^\gamma M_i(t;\ R)\,dt\leqslant R,\quad i=1,2,\ \dots \tag{9}$$

и рассмотрим в пространстве $m_\sigma[C(0,\ \gamma)]$ шар $\|x(t)-x_0\|\leqslant R$. Оператор правой части (8) $Sx(t)$ преобразует этот шар в себя. Более того, $Sx(t)$ отображает элементы из шара, для которых $x(0)=x_0$, в множество функций с равностепенно непрерывными компонентами, которое компактно. Действительно, для произвольного $\varepsilon_i>0$ найдется $\delta_i>0$ так что

$$|\xi_i(t)-\xi_i(t')|=\left|\int_{t'}^{t} F_i\Big(\tau,\ x(\tau),\ x_h(\tau)\Big)\,d\tau\right|\leqslant\int_{t'}^{t} M_i(\tau;\ R)\,d\tau<\varepsilon_i,$$

если $|t-t'|<\delta_i$. Таким образом, оператор S отображает выпуклое компактное множество в себя. Кроме того, S непрерывен на шаре $\|x(t)-x_0\|\leqslant R$. Его ограниченность вытекает из (9), а непрерывность компонент S_i — из условия 2. Для завершения доказательства осталось применить теорему Тихонова.

5. Оператор сдвига бесконечной системы дифференциальных уравнений с запаздывающими аргументами

Пусть система (6), для которой выполняются предположения пункта 4 и, кроме того, $x_0(s)\in l[C_i]$ (т. е. координатные функции непрерывны везде) имеет решение $x(t)\in l$ при каждом t, единственное и продолжимое. Тогда для системы (6) определен оператор сдвига $U(t)$, сопоставляющий начальному элементу $x_0(s)\in l[C_i]$ в момент t функцию $x(t+s)\in l[C_i]$.

Теорема 5. *Пусть l — одно из пространств m, l^r и пусть оператор сдвига $U(t)$ на шаре $T=\{\|x_0(s)\|\leqslant\rho\}$ пространства $l_\sigma[C_i]$ ограничен равномерно относительно t, т.е. $\|U(t)x_0(s)\|\leqslant R$ при любом $t\in[0,\ a]$.*

Тогда оператор $U(t)$ непрерывен на шаре T пространства $l_\sigma[C_i]$ равномерно по t.

Доказательство. Оператор

$$\tilde S\{x(t),\ x_0(s)\}=x_0+\int_0^t F\Big(\tau,\ x(\tau),\ x_h(\tau)\Big)\,d\tau$$

на множестве X решений $x(t)=\tilde S\{x(t),\ x_0(s)\}$, соответствующих начальным условиям $x_0(s)\in T$, замкнут. Кроме того, из условия 2 следует, что X содержится в некотором множестве, компактном в $l_\sigma[C]$.

Допустим теперь, что заключение теоремы неверно, т. е. существует последовательность начальных элементов $x_0^{(n)}(s)\to x_0(s)$ в $l_\sigma[C_i]$ и соответствующие решения $x^{(n)}(t)\not\to x(t)$ в $l_\sigma[C]$. Не ограничивая общности, будем считать, что для некоторой окрестности V элемента $x(t)$ в $l_\sigma[C]$ $x^{(n)}(t)\,\overline{\in}\,V$. Но последовательность $x^{(n)}(t)$ лежит в компактном множестве и, следовательно, имеет предельный элемент $z(t)\,\overline{\in}\,V$. Ясно, что должно быть $U(t)x_0(s)=z(t+s)$, а это противоречит условию единственности решения. Тем самым, равномерная относительно t непрерывность оператора $U(t)$ доказана.

Теорема 6. *Пусть l — одно из пространств c_0, l^r. Пусть оператор сдвига $U(t)$ системы (6) на шаре T пространства $l_\sigma[C_i]$ непрерывен равномерно по t и функционалы $F_k(t,\ x,\ y)$ удовлетворяют следующему условию. Существует последовательность индексов $k_n\to\infty$ при $n\to\infty$, для которых*

$$F_k(t,\ x,\ y)\equiv F_k\Big(t,\ P(k_n,\ \infty)x,\ P(k_n,\ \infty)y\Big),\quad k\geqslant k_n, \tag{10}$$

т. е. общая для переменных x, y функция $\varphi(k) \geqslant k_n$ при $k \geqslant k_n$.

Тогда оператор сдвига $U(t)$ на шаре T пространства $l[C_i]$ непрерывен равномерно относительно t.

Доказательство. Так как компоненты $U_k(t)$ оператора сдвига непрерывны в $l_\sigma[C_i]$ равномерно по t, то они тем более непрерывны равномерно по t в $l[C_i]$. Поэтому ввиду теоремы 1 достаточно показать, что компоненты $U_k(t)$ имеют функцию $\varphi'(k) \to \infty$ при $k \to \infty$.

Пусть k таково, что $\varphi(j) \geqslant k$ при $j \geqslant k$ и пусть $x(t)$ — решение уравнения (8). Так как для выбранного k имеем (10), то справедливо соотношение

$$P(k,\ \infty)\,x(t) = P(k,\ \infty)\,x_0 + \int\limits_0^t P(k,\ \infty)\,F\Big(\tau,\ P(k,\ \infty)\,x(\tau),\ P(k,\ \infty)\,x_h(\tau)\Big)\,d\tau.$$

Отсюда следует, что $y(t) = P(k,\ \infty)\,x(t)$ является решением системы

$$y(t) = y_0 + \int\limits_0^t P(k,\ \infty)\,F\Big(\tau,\ y(\tau),\ y_h(\tau)\Big)\,d\tau$$

в подпространстве $P(k,\ \infty)\,l$. Следовательно,

$$P(k,\ \infty)\,U(t)\,x_0(s) = P(k,\ \infty)\,U(t)\,[P(k,\ \infty)\,x_0(s)]. \tag{11}$$

Так как (11) верно для $k = k_n$, то существование требуемой функции $\varphi'(k)$ доказано.

Автор выражает благодарность Ю. Г. Борисовичу за постоянное внимание к работе.

Воронежский
Государственный университет

Поступило в редакцию
24.X.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Красносельский и др., Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, «Наука», М., 1966.
2. П. П. Забрейко, Нелинейные интегральные операторы, Тр. семинара по функц. анализу, вып. 8., Воронеж, 1966.
3. П. Менц, О непрерывности нелинейных операторов в пространствах последовательностей, Сборник научных работ аспирантов ВГУ, Воронеж, 1966 (печатается).
4. И. В. Шрагин, Оператор Немыцкого из C в L^M, Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1959, 77, вып. 5.

APIE SUPERPOZICIJOS OPERATORIAUS, VEIKIANČIO NORMUOTŲ ERDVIŲ SANDAUGOSE, TOLYDINUMĄ

P. MENCAS

(Reziumė)

Straipsnyje įrodyta superpozicijos operatoriaus $Fx(t) = F(t,\ x(t))$, veikiančio normuotų erdvių sandaugose, tolydinumo kriterijai. Nurodoma, kad rezultatai pritaikomi begalinės eilės diferencialinių lygčių su vėluojančiu argumentu teorijoje.

ÜBER DIE STETIGKEIT DES OPERATORS $Fx(t)=F(t, x(t))$ IN NORMIERTEN PRODUKTRÄUMEN

P. Mänz

(Zusammenfassung)

Der Artikel enthält Kriterien für die Stetigkeit des Operators $Fx(t)=F(t, x(t))$ in normierten Produkträumen. Die Ergebnisse werden bei der Untersuchung unendlicher Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen mit nacheilenden Argumenten angewandt.