LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 2, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 2, 1967

АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО РЯДА

Н. С. НАСЕКОВСКАЯ

Будем рассматривать ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z), \tag{1}$$

где

$$P_0(z)=1, \quad P_n(z)=\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{z}{\lambda_\nu}\right),$$

и пусть $\{\lambda_\nu\}$ – последовательность комплексных чисел, $\lambda_\nu=|\lambda_\nu|e^{i\Theta_\nu}$, причем $|\lambda_\nu|\uparrow\infty$, $\lambda_1\neq 0$.

Пусть $\arg\lambda_\nu\in\alpha$ $(\nu=1, 2, \ldots)$, где α – некоторый интервал (открытый, полуоткрытый или замкнутый).

Оценим модуль $|P_n(z)|$. Пусть $|z|\leqslant r$, и $z\neq\lambda_\nu$ $(\nu=1, 2, \ldots)$. Определим число N так, чтобы неравенства $|\lambda_\nu|\geqslant 2r$ и $|\lambda_\nu|\geqslant\frac{2r^2}{\varepsilon}$ имели место для $\nu\geqslant N$, ε – заранее заданное положительное число.

Имеем

$$\left|\ln\left(1-\frac{z}{\lambda_\nu}\right)+\frac{z}{\lambda_\nu}\right|\leqslant\left|\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\lambda_\nu}\right)^2\right|\cdot\left(1+\left|\frac{z}{\lambda_\nu}\right|+\left|\frac{z}{\lambda_\nu}\right|^2+\ldots\right)\leqslant\left|\left(\frac{z}{\lambda_\nu}\right)^2\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2|\lambda_\nu|};$$

следовательно,

$$-\frac{\varepsilon}{|\lambda_\nu|}\leqslant\ln\left|1-\frac{z}{\lambda_\nu}\right|+\operatorname{Re}\left(\frac{z}{\lambda_\nu}\right)\leqslant\frac{\varepsilon}{|\lambda_\nu|};$$

$$-\frac{\varepsilon}{|\lambda_\nu|}-\operatorname{Re}\left(\frac{z}{\lambda_\nu}\right)\leqslant\ln\left|1-\frac{z}{\lambda_\nu}\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{|\lambda_\nu|}-\operatorname{Re}\left(\frac{z}{\lambda_\nu}\right);$$

$$\exp\left\{-\frac{\varepsilon}{|\lambda_\nu|}-\operatorname{Re}\left(\frac{z}{\lambda_\nu}\right)\right\}\leqslant\left|1-\frac{z}{\lambda_\nu}\right|\leqslant\exp\left\{\frac{\varepsilon}{|\lambda_\nu|}-\operatorname{Re}\left(\frac{z}{\lambda_\nu}\right)\right\};$$

$$\exp\left\{\sum_{\nu=N}^{n}\left[-\frac{\varepsilon}{|\lambda_\nu|}-\operatorname{Re}\left(\frac{z}{\lambda_\nu}\right)\right]\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\prod_{\nu=N}^{n}\left|1-\frac{z}{\lambda_\nu}\right|\leqslant\exp\left\{\sum_{\nu=N}^{n}\left[\frac{\varepsilon}{|\lambda_\nu|}-\operatorname{Re}\left(\frac{z}{\lambda_\nu}\right)\right]\right\};$$

$$\exp\left\{\sum_{\nu=N}^{n}\left[-\frac{\varepsilon}{|\lambda_\nu|}-\operatorname{Re}\left(\frac{z}{\lambda_\nu}\right)\right]\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|P_n(z)|}{|P_{N-1}(z)|}\leqslant\exp\left\{\sum_{\nu=N}^{n}\left[\frac{\varepsilon}{|\lambda_\nu|}-\operatorname{Re}\left(\frac{z}{\lambda_\nu}\right)\right]\right\}.$$

Величины

$$|P_{N-1}(z)|\cdot\exp\left\{\sum_{\nu=1}^{N-1}\left[\operatorname{Re}\left(\frac{z}{\lambda_\nu}\right)\mp\frac{\varepsilon}{|\lambda_\nu|}\right]\right\}$$

для $|z|\leqslant r$ заключены между двумя константами M_1 и $M_2>0$, которые зависят только от ε.

Итак,

$$M_2\cdot\exp\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\left[-\frac{\varepsilon}{|\lambda_\nu|}-\operatorname{Re}\left(\frac{z}{\lambda_\nu}\right)\right]\right\}\leqslant|P_n(z)|\leqslant$$

$$\leqslant M_1\cdot\exp\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\left[\frac{\varepsilon}{|\lambda_\nu|}-\operatorname{Re}\left(\frac{z}{\lambda_\nu}\right)\right]\right\}.$$

Имеем

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z}{\lambda_\nu}\right)=\operatorname{Re}\left[\frac{x+iy}{|\lambda_\nu|(\cos\Theta_\nu+i\sin\Theta_\nu)}\right]=\frac{1}{|\lambda_\nu|}\cdot(x\cos\Theta_\nu+y\sin\Theta_\nu).$$

Пусть φ_1 — такое число в замкнутом интервале $\bar{\alpha}$, что при $\Theta=\varphi_1$ выражение $x\cos\Theta+y\sin\Theta$ принимает наименьшее для этого интервала значение, равное $x\cos\varphi_1+y\sin\varphi_1$ (точка $z=x+iy$ фиксирована), а φ_2 — значение Θ, соответствующее наибольшему значению $x\cos\Theta+y\sin\Theta$ в том же интервале.

Тогда

$$M_2\cdot\exp\left\{(-\varepsilon-x\cos\varphi_2-y\sin\varphi_2)\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{|\lambda_\nu|}\right\}\leqslant|P_n(z)|\leqslant$$

$$\leqslant M_1\cdot\exp\left\{(\varepsilon-x\cos\varphi_1-y\sin\varphi_1)\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{|\lambda_\nu|}\right\}. \qquad (2)$$

Пусть теперь последовательнось $\{\arg\lambda_\nu\}$ произвольна. Разобьем плоскость на q частей лучами $\arg z=\psi_k$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ q)$ и обозначим через α_k интервал $[\psi_k,\psi_{k+1})$.

Пусть $\{\lambda_{\nu_k}\}$ — подпоследовательность последовательности $\{\lambda_\nu\}$, для членов которой $\arg\lambda_{\nu_k}\in\alpha_k$, а

$$P_n^{(k)}(z)=\prod_{\nu_k\leqslant n}\left(1-\frac{z}{\lambda_{\nu_k}}\right).$$

Для каждого $P_n^{(k)}(z)$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ q)$ можно написать неравенства вида (2).

С другой стороны, если z фиксировано,

$$|z|\leqslant r,\ |z-\lambda_\nu|\geqslant\eta>0\ (\nu=1,\ 2,\ \ldots),$$

то

$$\frac{\eta^{N-1}}{\prod\limits_{\nu=1}^{N-1}|\lambda_\nu|}\leqslant{\prod_{\nu=1}^{N-1}}'\left|1-\frac{z}{\lambda_\nu}\right|\leqslant\prod_{\nu=1}^{N-1}\left(1+\frac{r}{|\lambda_\nu|}\right),$$

где произведение Π' распространено либо на все индексы, для которых $1\leqslant\nu\leqslant N-1$, либо на любую группу таких индексов.

Величины

$$\exp\left\{\sum_{\nu=1}^{N-1}{}'\left[\operatorname{Re}\left(\frac{z}{\lambda_\nu}\right)\mp\frac{\varepsilon}{|\lambda_\nu|}\right]\right\},$$

где сумма Σ' распространена на те же индексы, что и произведение Π', ограничены сверху и снизу в области $|z|\leqslant r$ положительными числами, не зависящими от того на какую группу индексов сумма Σ' распространена.

Поэтому

$$\tilde{M}_2<\prod_{\nu=1}^{N-1}{}'\left|1-\frac{z}{\lambda_\nu}\right|\cdot\exp\left\{\sum_{\nu=1}^{N-1}{}'\left[\operatorname{Re}\left(\frac{z}{\lambda_\nu}\right)\mp\frac{\varepsilon}{|\lambda_\nu|}\right]\right\}<\tilde{M}_1,$$

где $\tilde{M}_1$ и $\tilde{M}_2$ зависят только от ε, причем $\tilde{M}_2>0$ (r — фиксировано).

Перемножив неравенства (2) для $k=1,\ 2,\ \ldots,\ q$, получим, следовательно,

$$\tilde{M}_2\cdot\exp\left\{\sum_{k=1}^{q}\left(-\varepsilon-x\cos\varphi_2^{(k)}-y\sin\varphi_2^{(k)}\right)S_n^{(k)}\right\}\leqslant\prod_{k=1}^{q}|P_n^{(k)}(z)|\leqslant$$

$$\leqslant\tilde{M}_1\cdot\exp\left\{\sum_{k=1}^{q}\left(\varepsilon-x\cos\varphi_1^{(k)}-y\sin\varphi_1^{(k)}\right)S_n^{(k)}\right\},$$

где

$$S_n^{(k)}=\sum_{\nu_k\leqslant n}\frac{1}{|\lambda_{\nu_k}|},\qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ q),$$

то есть

$$\tilde{M}_2\cdot\exp\left\{-\left(x\sum_{k=1}^{q}\cos\varphi_2^{(k)}\frac{S_n^{(k)}}{S_n}+y\sum_{k=1}^{q}\sin\varphi_2^{(k)}\frac{S_n^{(k)}}{S_n}+\varepsilon\right)S_n\right\}\leqslant|P_n(z)|\leqslant$$

$$\leqslant\tilde{M}_1\cdot\exp\left\{-\left(x\sum_{k=1}^{q}\cos\varphi_1^{(k)}\frac{S_n^{(k)}}{S_n}+y\sum_{k=1}^{q}\sin\varphi_1^{(k)}\frac{S_n^{(k)}}{S_n}-\varepsilon\right)S_n\right\},\tag{3}$$

где $S_n=\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{|\lambda_\nu|}$, а $\varphi_1^{(k)}$ и $\varphi_2^{(k)}$ принадлежат интервалу $[\psi_k,\psi_{k+1}]$.

Пусть $S_n^{\vartheta_1,\vartheta_2}=\sum\limits_{\vartheta_1,\vartheta_2}\frac{1}{|\lambda_\nu|}$, где сумма распространена на те индексы $\nu\leqslant n$, для которых $\vartheta_1<\arg\lambda_\nu<\vartheta_2$.

Предположим, что для всех ϑ_1, ϑ_2, не принадлежащих некоторому исключительному счетному множеству, существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^{\vartheta_1,\vartheta_2}}{S_n}.$$

Тогда для всех ϑ_1, ϑ_2, не принадлежащих исключительному множеству

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^{\vartheta_1,\vartheta_2}}{S_n}=F(\vartheta_2)-F(\vartheta_1),$$

где $F(\vartheta)$ — некоторая монотонная функция.

Будем говорить, что, если указанные условия выполнены, то последовательность $\{\lambda_\nu\}$ имеет относительную угловую плотность. (Это понятие введено Г. Л. Лунцем).

В неравенствах (3) разбиение последовательности $\{\lambda_\nu\}$ на последовательности $\{\lambda_{\nu_k}\}$ произвольно, число q также любое. Поэтому выбрав $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_q$ ак, чтобы эти числа не принадлежали исключительн ому множеству, получим при достаточно большом n

$$\tilde{M}_2 \cdot \exp\left\{-\left(x \sum_{k=1}^{q} \cos\varphi_2^{(k)}[F(\psi_{k+1})-F(\psi_k)]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+y\sum_{k=1}^{q}\sin\varphi_2^{(k)}[F(\psi_{k+1})-F(\psi_k)]+2\varepsilon\right)S_n\right\} \leqslant |P_n(z)| \leqslant$$

$$\leqslant \tilde{M}_1 \cdot \exp\left\{-\left(x \sum_{k=1}^{q} \cos\varphi_1^{(k)}[F(\psi_{k+1})-F(\psi_k)]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+y\sum_{k=1}^{q}\sin\varphi_1^{(k)}[F(\psi_{k+1})-F(\psi_k)]-2\varepsilon\right)S_n\right\},$$

где $\varepsilon>0$ произвольно, а $\tilde{M}_1$ и $\tilde{M}_2$ зависят только от ε, $\tilde{M}_2(\varepsilon)>0$. Так как число q произвольно и разбиение интервала $[0, 2\pi)$ на интервалы α_k также произвольно (требуется только, чтобы ψ_k не принадлежали исключительному множеству), то, следовательно, при достаточно большом n

$$\tilde{M}_2 \cdot \exp\left\{-\left[x\int_0^{2\pi}\cos\psi\, dF(\psi)+y\int_0^{2\pi}\sin\psi\, dF(\psi)+\varepsilon_1\right]S_n\right\} \leqslant |P_n(z)| \leqslant$$

$$\leqslant \tilde{M}_1 \cdot \exp\left\{-\left[x\int_0^{2\pi}\cos\psi\, dF(\psi)+y\int_0^{2\pi}\sin\psi\, dF(\psi)-\varepsilon_1\right]S_n\right\}, \tag{4}$$

причем $\varepsilon_1>0$ — любое, а $\tilde{M}_1$ и $\tilde{M}_2>0$ не зависят от n.

Рассмотрим ряд Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\mu_n z}, \tag{5}$$

где $\mu_n = S_n(A-iB)$, S_n определено выше,

$$A=\int_0^{2\pi}\cos\psi\, dF(\psi), \quad B=\int_0^{2\pi}\sin\psi\, dF(\psi),$$

и предположим, что хотя бы одно из чисел A, B отлично от нуля.

Очевидно, что все μ_n расположены на одном луче и $|\mu_n| = S_n\cdot\sqrt{A^2+B^2}$. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, то [2] ряд Дирихле (5) абсолютно сходится в полуплоскости

$$Ax+By-h>0, \tag{6}$$

где

$$h=\begin{cases}\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{\ln\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|}{S_n}, & \text{если}\quad \sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|=\infty,\\[2ex] \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{\ln\sum\limits_{k=n}^{\infty}|a_k|}{S_n}, & \text{если}\quad \sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|<\infty,\end{cases}$$

и не сходится абсолютно ни в одной точке полуплоскости

$$Ax+By-h<0.$$

Докажем следующую теорему.

Теорема. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$, *последовательность* $\{\lambda_\nu\}$ *имеет относительную угловую плотность и хотя бы одно из чисел* A, B *отлично от нуля, то ряд* (1) *сходится абсолютно в полуплоскости* (6) *и не сходится абсолютно во всякой точке* z, *внешней к этой полуплоскости* ($z\neq\lambda_\nu$).

Возьмем $z=x+iy$ — внутреннюю точку полуплоскости (6). Докажем, что ряд (1) абсолютно сходится в этой точке. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n e^{-\mu_n z}|,$$

то есть ряд

$$\sum_{h=1}^{\infty}|a_n|\,e^{-S_n(Ax+By)}. \tag{7}$$

Этот ряд сходится во всех точках, достаточно близких к точке $z=x+iy$. Следовательно, он сходится в точке $z'=x'+iy'=z+\eta$, где $|\eta|$ достаточно мал, $\eta=a+bi$, то есть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\,e^{-S_n(Ax+By+Aa+Bb)}$$

сходится при всех достаточно малых $|a|$ и $|b|$. Выберем a и b так, чтобы $Aa+Bb<0$. Из второго неравенства (4) в силу произвольности ε_1 следует сходимость ряда (1) в точке z, и первая часть теоремы доказана.

Доказательство того, что ряд (1) не сходится абсолютно в точках z внешних к полуплоскости (6) ($z\neq\lambda_\nu$), проводится аналогично с использованием первого неравенства (4).

Из хода доказательства теоремы очевидно, что ряд (1) сходится равномерно в любой полуплоскости, лежащей внутри полуплоскости абсолютной сходимости, и, следовательно, сумма его голоморфна в любой внутренней точке этой полуплоскости.

Замечание. Условия теоремы, в частности, выполнены, если последовательность $\{\arg\lambda_\nu\}$ сходится. Этот случай рассматривался ранее [1], [3].

Рассмотрим случай, когда $A=B=0$. При этом оценки (4) будут иметь вид

$$\tilde{M}_2\cdot e^{-\varepsilon_1 S_n}\leqslant|P_n(z)|\leqslant\tilde{M}_1\cdot e^{\varepsilon_1 S_n},$$

где $\varepsilon_1 > 0$ любое, или

$$\tilde{M}_2 |a_n| e^{-\varepsilon_1 S_n} \leqslant |a_n P_n(z)| \leqslant \tilde{M}_1 |a_n| e^{\varepsilon_1 S_n}. \tag{4'}$$

Пусть $h > 0$. Тогда ряд Дирихле

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n e^{-zS_n}| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{-xS_n}$$

сходится в какой-то полуплоскости $x > x_0$, $x_0 > 0$.

Можно указать число $\delta (x_0 > \delta > 0)$ такое, что при $z = \delta$ ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{-\delta S_n}$$

будет расходиться, и притом такое, что будет выполняться неравенство

$$|a_n| \cdot e^{-\delta S_n} < |a_n| e^{-\varepsilon_1 S_n}.$$

Следовательно, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{-\varepsilon_1 S_n}$$

будет расходиться, а значит и ряд (1) не будет сходиться абсолютно ни при каком z (кроме $z = \lambda_\nu$), что следует из первого неравенства (4').

Пусть теперь $h < 0$.

Аналогичными рассуждениями с использованием второго неравенства (4') можно доказать, что ряд (1) сходится абсолютно при любом z.

До сих пор мы предполагали, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$. Пусть теперь $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = L$, то есть последовательность $\{ S_n \}$ ограничена. В этом случае при достаточно большом n неравенства (4) примут вид

$$\tilde{M}_2 e^{-(xA+yB+\varepsilon_2)\cdot L} \leqslant |P_n(z)| \leqslant \tilde{M}_1 \cdot e^{-(xA+yB-\varepsilon_2) L},$$

где $\varepsilon_2 > 0$ любое; или

$$\tilde{M}_2 |a_n| e^{-(xA+yB+\varepsilon_2) L} \leqslant |a_n P_n(z)| \leqslant \tilde{M}_1 |a_n| e^{-(xA+yB-\varepsilon_2) L}. \tag{4''}$$

Из этих неравенств следует, что, если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ расходится, то и ряд (1) не сходится абсолютно ни в какой точке плоскости, кроме $z = \lambda_\nu$. С другой стороны, если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ сходится, то и ряд (1) сходится абсолютно при любом z.

Рассмотрим некоторые частные случаи. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{S_n} = 0. \tag{8}$$

Если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{S_n} = 0,$$

последовательность $\{\lambda_\nu\}$ имеет относительную угловую плотность и хотя бы одно из чисел A, B отлично от нуля, то ряд (1) расходится вне полуплоскости абсолютной сходимости, так как в этом случае, как известно, аналогичное утверждение имеет место для ряда (5). При этом в неравенстве, определяющем полуплоскость абсолютной сходимости, величину h можно [2] заменить величиной

$$k = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|a_n|}{S_n}.$$

Пусть теперь

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{S_n} = l < \infty. \tag{9}$$

Предположим, что ряд (1) сходится в точке $z=z_0$ и в некоторой ее окрестности. Тогда в этой окрестности $a_n P_n(z)$ стремится к нулю. Но, первое из неравенств (4) показывает, что будет стремиться к нулю и общий член ряда Дирихле

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n e^{-\mu_n z}| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{-(Ax+By)S_n}.$$

Для рядов Дирихле известно [2], что, если выполнено условие (9), то расстояние между точкой, в которой общий член ряда стремится к нулю, и границей полуплоскости абсолютной сходимости не превосходит числа

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{|\mu_n|} = \frac{l}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Пользуясь вторым из неравенств (4), легко поэтому заключить, что такое же утверждение справедливо и для ряда (1), и, в частности, можно утверждать, что в полуплоскости $Ax+By-h+l<0$ ряд (1) расходится.

Рассмотрим, в заключение, ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R_n(z), \tag{10}$$

где

$$R_0(z)=1, \quad R_n(z) = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\lambda_\nu}{z+\lambda_\nu}.$$

Пусть $\{\lambda_\nu\}$ — последовательность комплексных чисел, $\lambda_\nu = |\lambda_\nu| e^{i\Theta_\nu}$, причем $|\lambda_\nu| \uparrow \infty$, и пусть $z \neq -\lambda_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ и предположим, что для последовательности $\{\lambda_\nu\}$ выполнены условия доказанной выше теоремы.

Ряды (1) и (10) называют сопряженными интерполяционными рядами [1].

Имеем

$$R_n(z) = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\lambda_\nu}{z+\lambda_\nu} = \frac{1}{\prod\limits_{\nu=1}^{n} \frac{z+\lambda_\nu}{\lambda_\nu}} = \frac{1}{\prod\limits_{\nu=1}^{n} \left(1+\frac{z}{\lambda_\nu}\right)} = \frac{1}{\prod\limits_{\nu=1}^{n} \left(1-\frac{z}{-\lambda_\nu}\right)};$$

и поэтому, если учесть, что

$$\cos[\arg(-\lambda_\nu)] = -\cos\arg\lambda_\nu$$

и

$$\sin[\arg(-\lambda_\nu)] = -\sin\arg\lambda_\nu,$$

для $|R_n(z)|$ получим оценки, аналогичные оценкам (3), с той лишь разницей, что вместо констант $\tilde{M}_1$ и $\tilde{M}_2$ появятся константы $\frac{1}{\tilde{M}_1}$ и $\frac{1}{\tilde{M}_2}$.

Следовательно, ряд (10) сходится абсолютно во всех точках полуплоскости (6), кроме точек $z=-\lambda_\nu$ $(\nu=1, 2, \ldots)$ и не сходится абсолютно вне этой полуплоскости.

Московский институт
химического машиностроения

Поступило в редакцию
31.X.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Гандлер, Э. Голосова и А. Нафталевич, О сходимости факториальных рядов, Лит. матем. сб., I (1961), 58—76.
2. V. Bernstein, Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet, Paris, 1933.
3. Y. Martin, Séries d'interpolation et de facultés, Bult. Sc. math., t 75, 1951.

INTERPOLIACINĖS EILUTĖS ABSOLIUTI KONVERGENCIJA

N. NASEKOVSKAJA

(*Reziumė*)

Darbe nagrinėjama eilutė

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right),$$

kur $\{\lambda_n\}$ – kompleksinių skaičių seka $(\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\infty)$, tenkinanti tam tikras sąlygas (seka $\{\lambda_n\}$ turi „reliatyvų kampinį tankį“). Įrodoma, kad tokios eilutės absoliučios konvergencijos sritis yra pusplokštumė, ir surandama ta sritis.

LA CONVERGENCE ABSOLUE DE LA SÉRIE D'INTERPOLATION

N. NASEKOVSKAJA

(*Résumé*)

On demontre que le domaine de la convergence absolue de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right),$$

où $\{\lambda_n\}$ est une suite de nombres complexes $(\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\infty)$ qui satisfait à certaines conditions (la suite $\{\lambda_n\}$ possède une „densité angulaire relative“) est un demi-plan. On trouve ce demi-plan.