LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 2, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 2, 1967

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМ ПОЛИА И В. БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ РЯДОВ ДИРИХЛЕ

Л. А. ОСКОЛКОВ

Пусть $\{\lambda_n\}$ – последовательность действительных положительных чисел и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{\lambda_n} = \bar{D} < \infty,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{\lambda_n} = \underline{D}.$$

Из результатов А. А. Гольдберга [1] следуют точные оценки вида

$$\underline{h}(\varphi) - \varepsilon < \frac{\ln |L(r \cdot e^{i\varphi})|}{r} < \bar{h}(\varphi) + \varepsilon \tag{1}$$

для характеристической функции

$$L(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)$$

последовательности $\{\lambda_n\}$. $\underline{h}(\varphi)$ и $\bar{h}(\varphi)$ – некоторые элементарные функции, зависящие от $\underline{D}$ и $\bar{D}$, $\varepsilon > 0$ – любое и r достаточно велико. Функция $\underline{h}(\varphi)$ при этом такова, что

$$\lim_{\varphi\to 0} \underline{h}(\varphi) = -\infty.$$

Г. Л. Лунцем было показано [2], что если $\underline{D} > 0$ и существует функция $F(t)$ такая, что

$$\lambda_n = F(n) \, (n = 1, 2, \ldots)$$

и

$$F'(t) > \omega > 0,$$

то неравенства (1) могут быть уточнены. А именно, при любом $\varepsilon > 0$ и достаточно большом r имеют место неравенства

$$\pi \underline{D} \cdot |\sin\varphi| - \varepsilon < \frac{\ln |L(re^{i\varphi})|}{r} < \pi \bar{D} \cdot |\sin\varphi| + \varepsilon, \tag{1'}$$

если

$$\frac{\pi}{4} \leqslant |\varphi| \leqslant \frac{3}{4}\pi,$$

и

$$\pi \underline{D} \cdot |\sin\varphi| - H_1 \cdot (|\cos\varphi| - |\sin\varphi|) - \varepsilon < \frac{\ln |L(re^{i\varphi})|}{r} < \pi \bar{\bar{D}} \cdot |\sin\varphi| +$$
$$+ H_2 \cdot (|\cos\varphi| - |\sin\varphi|) + \varepsilon, \tag{1''}$$

если

$$0 < |\varphi| \leqslant \frac{\pi}{4}$$

и

$$\frac{3}{4}\pi \leqslant |\varphi| < \pi,$$

где $H_1 = H_1(\underline{D}, \bar{D}, \omega)$ и $H_2 = H_2(\underline{D}, \bar{D})$ — некоторые элементарные функции, которые малы вместе с разностью $\bar{D} - \underline{D}$. Неравенства вида (1′), (1″) справедливы и при некоторых более общих условиях.

§ 1. Пусть индекс конденсации δ последовательности $\{\lambda_n\}$ конечен, то есть

$$\delta = \varlimsup_{n \to \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_n)} \right| < \infty,$$

и для характеристической функции этой последовательности выполняются неравенства (1′) и (1″). Рассмотрим финкции

$$I_\gamma(s) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_\gamma} \frac{e^{-s \cdot z}}{L(z)} dz,$$

$$I_{-\gamma}(s) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_{-\gamma}} \frac{e^{-s \cdot z}}{L(z)} \cdot dz \, (s = \sigma + i\tau),$$

где пути интегрирования l_γ $l_{-\gamma}$ идут из точки $z = 0$ в точку $z = \infty$ вдоль лучей $\arg z = \gamma$ и $\arg z = -\gamma \, (0 < \gamma < \pi)$, соотвественно.

Так как $z = r \cdot e^{i\gamma}$ на l_γ, то, используя нижнюю оценку из неравенств (1), получим

$$\left| \frac{e^{-sz}}{L(z)} \right| < \exp \{ [-\sigma \cdot \cos \gamma + \tau \cdot \sin \gamma - \underline{h}(\gamma) + \varepsilon] \cdot r \},$$

где r — достаточно велико, а $\varepsilon > 0$. Отсюда следует, что $I_\gamma(s)$ сходится и определяет функцию, голоморфную в полуплоскости

$$\tau \cdot \sin \gamma - \sigma \cdot \cos \gamma < \underline{h}(\gamma). \tag{1.1}$$

Неравенство (1.1) означает, что

$$\tau \cdot \sin \gamma - \sigma \cdot \cos \gamma < \pi \underline{D} \cdot \sin \gamma - H_1 \cdot (\cos \gamma - \sin \gamma), \tag{1.1′}$$

если $0 < \gamma \leqslant \frac{\pi}{4}$,

$$\tau \cdot \sin \gamma - \sigma \cdot \cos \gamma < \pi \underline{D} \cdot \sin \gamma, \tag{1.1″}$$

если $\frac{\pi}{4} \leqslant \gamma \leqslant \frac{3}{4}\pi$, и

$$\tau \cdot \sin \gamma - \sigma \cdot \cos \gamma < \pi \underline{D} \cdot \sin \gamma + H_1 \cdot (\cos \gamma + \sin \gamma), \tag{1.1‴}$$

если $\frac{3}{4}\pi \leqslant \gamma < \pi$.

Объединение всех полуплоскостей (1.1) для $0 < \gamma < \pi$ представляет собой область G_1, дополнительную к заштрихованной на рис. 1.

Совершенно аналогично можно показать, что интеграл $I_{-\gamma}(s)$ является функцией, голоморфной в полуплоскости

$$\sigma\cdot\cos\gamma+\tau\cdot\sin\gamma>-\underline{h}(\gamma).$$

Объединение всех таких полуплоскостей для $0<\gamma<\pi$ является областью G_2, симметричной с G_1 относительно действительной оси.

Рассмотрим функцию

$$g_R(s)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R}\frac{e^{-sz}}{L(z)}\cdot dz,$$

где C_R — замкнутый контур, состоящий из участков лучей l_γ и $l_{-\gamma}$, и дуги окружности $|z|=R$. На основании теоремы о вычетах можно утверждать, что если окружность $|z|=R$ не проходит ни через одну из точек λ_n, то

$$g_R(s)=\sum_{n=1}^{m}\frac{e^{-\lambda_n s}}{L'(\lambda_n)},$$

где суммирование ведется по тем n, для которых $\lambda_n<R$.

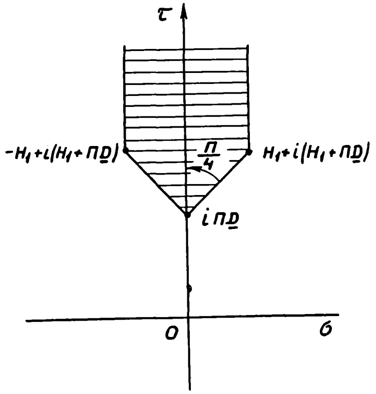

Рис. 1

Если $f(z)$ — целая функция экспоненциального типа, то при достаточно большом $A>0$ существует неограниченно возрастающая последовательность $\{R_n\}$ такая, что во всех точках каждой окружности $|z|=R_n$ имеет место неравенство $|f(z)|>e^{-A\cdot|z|}$ (см. [3]).

Отсюда следует, что, выбрав достаточно большое $A>0$, мы можем построить последовательность окружностей $|z|=R_n (n=1, 2, \ldots)$, на которых

$$|L(z)|>e^{-A\cdot|z|}.$$

Если $z=r\cdot e^{i\psi}$, $s>0$ — действительное и достаточно большое и

$$|\psi|<\frac{\pi}{2},$$

то на дугах окружностей $|z|=R_n$, лежащих в указанном угле,

$$\left|\frac{e^{-sz}}{L(z)}\right|<e^{-(s\cdot\cos\psi-A)r}<e^{-a\cdot r},$$

где $a>0$.

Поэтому, если Γ_{R_n} — дуга окружности, входящая в контур C_{R_n}, и

$$\gamma<\frac{\pi}{2},$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\Gamma_{R_n}}\frac{e^{-sz}}{L(z)}\cdot dz=0,$$

и, следовательно, при достаточно больших действительных s

$$I_{-\gamma}(s)-I_\gamma(s)=\lim_{n\to\infty}g_{R_n}(s)=g(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_n s}}{L'(\lambda_n)}. \tag{1.2}$$

Абсцисса сходимости ряда (1.2) совпадает с индексом конденсации δ последовательности $\{\lambda_n\}$, и, так как по предположению $\delta<\infty$, то этот ряд обладает полуплоскостью сходимости, содержащей бесконечный отрезок действительной положительной полуоси, и его сумма $g(s)$ в области сходимости ряда голоморфна.

Нетрудно показать (см. [3]), что если

$$0<\gamma_1<\pi$$

и

$$0<\gamma_2<\pi,$$

то функции $I_{\gamma_1}(s)$ и $I_{\gamma_2}(s)$, $I_{-\gamma_1}(s)$ и $I_{-\gamma_2}(s)$ являются аналитическими продолжениями друг друга. Поэтому при любом

$$0<\gamma<\pi$$

имеем

$$I_\gamma(s)=I^+(s)$$

и

$$I_{-\gamma}(s)=I^-(s),$$

где $I^+(s)$ – функция, голоморфная в области G_1, $I^-(s)$ – функция, голоморфная в G_2.

Следовательно мы доказали, что $g(s)=I^-(s)-I^+(s)$ и функция $g(s)$ голоморфна во всей плоскости вне области, заштрихованной на рис. 1 и симметричной ей относительно действительной оси.

§ 2. Пусть ряд Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n\cdot s}$ имеет непустую область сходимости.

Рассмотрим функцию $\varphi(z)$ экспоненциального типа в угле $|\arg z|<\beta$ имеющую в этом угле индикатрису, не превышающую функции

$$h(\varphi)=k\cdot\pi\bar{D}\cdot(|\sin\psi|+\cos\psi),$$

где k – некоторое действительное число, удовлетворяющую условиям

$$\varphi(\lambda_n)=a_n\cdot L'(\lambda_n)(n=1,\ 2,\ \dots),$$

причем

$$0<\beta<\frac{\pi}{4},$$

если $k>0$.

Если $k>0$, то, очевидно, индикаторная (а, следовательно, сопряженная) диаграмма функции $\varphi(z)$ содержится в области I, являющейся общей частью полуплоскостей $(z=x+iy)$

$$x\cdot\cos\beta+y\cdot\sin\beta-k\cdot\pi\bar{D}\cdot(\sin\beta+\cos\beta)<0, \tag{2.1}$$

$$x\cdot\cos\beta-y\cdot\sin\beta-k\cdot\pi\bar{D}\cdot(\sin\beta+\cos\beta)<0, \tag{2.1'}$$

$$x<k\cdot\pi\bar{D}. \tag{2.1''}$$

Точки пересечения границ полуплоскостей (2.1) и (2.1″), (2.1′) и (2.1″) имеют координаты

$$x=k\cdot\pi\bar{D},\ y=k\cdot\pi\bar{D}$$

и

$$x=k\cdot\pi\bar{D},\ y=-k\cdot\pi\bar{D},$$

соответственно. Область S, точки которой имеют вид z_1+z_2, где z_1 принадлежит I, а z_2 – области, дополнительной к $G_1 \cap G_2$ имеет вид, изображенный на рис. 2, если

$$0<k<\frac{H_1+\pi\cdot \underline{D}}{\pi\bar{D}}\,.$$

В случае, если $k<0$, область I представляет собой угол $\left(0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{\pi}{2}+\beta<\arg(z-z_0)<\frac{3}{2}\cdot\pi-\beta,$$

где

$$z_0=k\cdot\pi\bar{D}+k\cdot\pi\bar{D}\cdot\operatorname{tg}\beta.$$

Область S для этого случая изображена на рис. 3 $\left(\text{для } \beta<\frac{\pi}{4}\right)$. Точки B и B' имеют координаты

$$x=H_1+k\cdot\pi\bar{D}+k\cdot\pi\bar{D}\cdot\operatorname{tg}\beta,\quad y=H_1+\pi\underline{D}$$

и

$$x=H_1+k\pi\bar{D}+k\pi\bar{D}\cdot\operatorname{tg}\beta,\quad y=-(H_1+\pi\underline{D}),$$

соответственно.

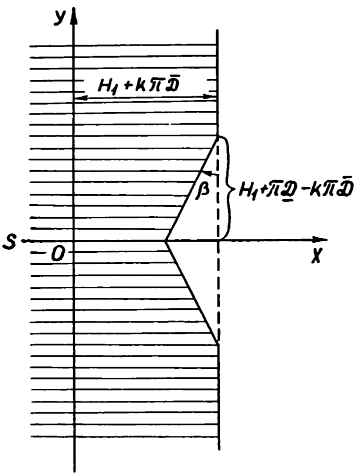

Рис. 2

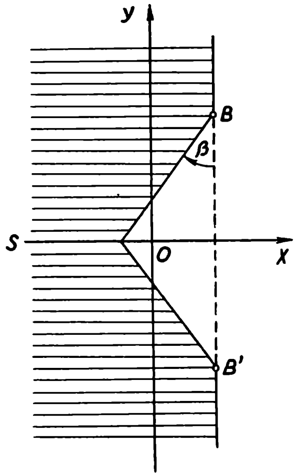

Рис. 3

В соответствии с теоремой Крамера – Полиа [3] можно утверждать, что функция $f(s)$, являющаяся суммой ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(\lambda_n)\cdot e^{-\lambda_n\cdot s}}{L'(\lambda_n)}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot e^{-\lambda_n\cdot s}$$

голоморфна внутри области, дополнительной к S.

Итак, доказана

Теорема 1. *Если существует функция $\varphi(z)$ экспоненциального типа в угле $|\arg z|<\beta$, имеющая в этом угле индикатрису, не превышающую функции*

$$h(\psi)=k\cdot\pi\bar{D}\cdot(|\sin\psi|+\cos\psi),$$

и такая, что,

$$\varphi(\lambda_n)=a_n\cdot L'(\lambda_n)\,(n=1,\ 2,\ \ldots),$$

то при

$$0<k<\frac{H_1+\pi\cdot\underline{D}}{\pi\bar{D}}$$

и

$$0<\beta\leqslant\frac{\pi}{4}$$

сумма ряда

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\lambda_n s}$$

голоморфна в полуплоскости

$$\operatorname{Re}s>H_1+k\cdot\pi\bar{D}$$

и на отрезке

$$|\operatorname{Im}s|<H_1+\pi\underline{D}-k\cdot\pi\bar{D}$$

оси голоморфности; при

$$k<0\left(0<\beta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

в полуплоскости

$$\operatorname{Re}s>H_1+k\cdot\pi\bar{D}+k\cdot\pi\bar{D}\cdot\operatorname{tg}\beta$$

и тем более — в полуплоскости

$$\operatorname{Re}s>H_1+k\cdot\pi\bar{D}.$$

Пусть теперь функция

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot e^{-\lambda_n s} \tag{2.2}$$

голоморфна в полуплоскости

$$\operatorname{Re}s>H_1+k\cdot\pi\bar{D},$$

на отрезке

$$|\operatorname{Im}s|<H_1+\pi\underline{D}-k\pi\bar{D}$$

оси голоморфности и в области Δ, представляющей собой внутренность равнобедренного треугольника, основанием которого является этот отрезок, а боковые стороны образуют с действительной осью углы $\frac{\pi}{2}-\beta$ и $\beta-\frac{\pi}{2}$, соответственно

$$\left(k<\frac{H_1+\pi\underline{D}}{\pi\bar{D}},\ 0<\beta<\frac{\pi}{2}\right).$$

Выберем какое-либо $\psi (0<\psi<\beta)$ и подберем острый угол Θ так, чтобы $\psi+\Theta>0$ (рис. 4). Докажем, что функция

$$F(z)=\int_{\sigma_0}^{\sigma_0+\infty\cdot e^{i\theta}} f(s)\cdot e^{sz}ds,$$

где $z=r\cdot e^{i\psi}$, $\sigma_0>0$ и достаточно велико, мероморфна во всей плоскости.

Обозначив

$$s=\sigma_0+t\cdot e^{i\theta},$$

будем иметь

$$|e^{-\lambda_n s}|=\exp\{-\lambda_n\sigma_0\}\cdot\exp\{-t\cdot\lambda_n\cdot\cos\Theta\}.$$

Если σ_0 выбрано так, что ряд (2.2) сходится абсолютно в точке σ_0, то, так как

$$\cos\Theta>0,$$

ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot e^{-\lambda_n s}$$

мажорируется вдоль луча

$$\arg(s-\sigma_0)=\Theta$$

числовым сходящимся рядом. С другой стороны имеем

$$|e^{sz}|=\exp\{r\sigma_0\cdot\cos\psi\}\cdot\exp\{t\cdot r\cdot\cos(\psi+\Theta)\},$$

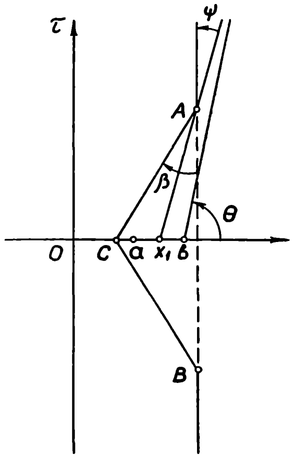

Рис. 4

где $|e^{sz}|$ может быть сделан сколь угодно малым, так как

$$\cos(\psi+\Theta)<0.$$

Поэтому ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot e^{-\lambda_n s}e^{sz}$$

можно почленно интегрировать вдоль любого конечного отрезка луча

$$\arg(s-\sigma_0)=\Theta,$$

и, следовательно,

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma_0+\infty e^{i\theta}} f(s)\cdot e^{sz}ds=\lim_{h\to\infty}\int_{\sigma_0}^{\sigma_0+h\cdot e^{i\theta}} f(s)\cdot e^{sz}\cdot ds=$$

$$=\lim_{h\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cdot\exp\{(z-\lambda_n)\cdot(\sigma_0+h\cdot e^{i\theta})\}}{z-\lambda_n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cdot e^{\sigma_0(z-\lambda_n)}}{z-\lambda_n}.$$

Далее

$$|\exp\{(z-\lambda_n)\cdot(\sigma_0+h\cdot e^{i\theta})\}|<A\cdot\exp\{r\cdot h\cdot\cos(\psi+\Theta)\}\cdot\exp\{-\lambda_n\sigma_0\},$$

где A не зависит от h.

Следовательно,

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cdot \exp\{(z-\lambda_n)\cdot(\sigma_0+h\cdot e^{i\theta})\}}{z-\lambda_n} \right| < A\cdot\exp\{r\cdot h\cdot\cos(\psi+\Theta)\}\times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|\cdot e^{-\lambda_n\sigma_0}}{|z-\lambda_n|}.$$

Так как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\cdot e^{-\lambda_n\sigma_0}$$

сходится, то при любом $z\neq\lambda_n$ тем более сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|\cdot e^{-\lambda_n\sigma_0}}{|z-\lambda_n|},$$

а это означает, что предел левой части неравенства при $h\to\infty$ равен нулю, в силу того, что $\cos(\psi+\Theta)<0$.

Таким образом, если $z\neq\lambda_n$, то

$$F(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n\cdot e^{\sigma_0\cdot(z-\lambda_n)}}{z-\lambda_n}. \tag{2.3}$$

Ряд в правой части равенства (2.3) сходится равномерно в любой конечной области, из которой выброшены кружки сколь угодно малых радиусов с центрами λ_n, так как сходится абсолютно числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot e^{-\lambda_n\cdot\sigma_0}.$$

Значит $F(z)$ — мероморфная функция во всей плоскости с простыми полюсами, образующими последовательность $\{\lambda_n\}$.

Поэтому функция

$$\Phi(z) = \int_a^{\sigma_0} f(s)\cdot e^{sz}ds + \int_{\sigma_0}^{\sigma_0+\infty\cdot e^{i\theta}} f(s)\cdot e^{sz}ds,$$

где a — любая точка, лежащая внутри треугольника ABC (рис. 4), обладает тем же свойством.

Рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = -\Phi(z)\cdot L(z), \tag{2.4}$$

где $L(z)$ — характеристическая функция последовательнотси $\{\lambda_n\}$. Очевидно, что эта функция целая, причем из (2.3) следует, что

$$\varphi(\lambda_n) = a_n L'(\lambda_n)\,(n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{2.5}$$

Пусть x_1 — точка пересечения с действительной осью прямой, проходящей через точку

$$H_1 + k\cdot\pi\bar{D} + i\cdot(H_1+\pi\underline{D} - k\cdot\pi\bar{D})$$

и наклоненной к этой оси под углом $\frac{\pi}{2}-\psi$ (рис. 4). Пусть, далее, $b>x_1$.

Проведем через точку b луч под углом Θ к действительной оси так, чтобы он целиком находился в области голоморфности функции $f(s)$ и чтобы $\Theta + \psi > \frac{\pi}{2}$ (что всегда можно сделать). Рассмотрим функцию

$$\tilde{\Phi}(z) = \int_a^b f(s) \cdot e^{sz} ds + \int_b^{b+\infty \cdot e^{i\theta}} f(s) \cdot e^{sz} ds. \tag{2.6}$$

С помощью несложных выкладок можно показать, что

$$\lim_{\sigma \to \infty} \int_{q_\sigma} e^{sz} f \cdot (s)\, ds = 0,$$

где q_σ – отрезок прямой, параллельной мнимой оси, между лучами

$$\arg(s - \sigma_0) = \Theta$$

и

$$\arg(s - b) = \Theta$$

с абсциссой σ (см. [3]).

Отсюда следует, что

$$\Phi(z) \equiv \tilde{\Phi}(z). \tag{2.7}$$

Функция $f(s)$ равномерно ограничена на луче

$$\arg(s - b) = \Theta.$$

Это можно показать, разбив этот луч точкой s_1 на два участка, первый из которых конечен и достаточно велик, так что второй целиком лежит в области сходимости ряда (2.2). Тогда на первом участке функция $f(s)$ ограничена в силу непрерывности, на втором она мажорируется числовым сходящимся рядом, так как ряд (2.2) в точке s_1 сходится абсолютно, и при

$$s = s_1 + t \cdot e^{i\theta}$$

$$|e^{-\lambda_n s}| = \exp\{-\lambda_n \cdot s_1\} \cdot \exp\{-t \cdot \lambda_n \cdot \cos\Theta\},$$

где $\cos\Theta > 0$.

Из равенств (2.6), (2.7) и ограниченности $f(s)$ следует

$$|\Phi(z)| = \left| \int_a^b f(s) \cdot e^{sz} ds + \int_b^{b+\infty \cdot e^{i\theta}} f(s) \cdot e^{sz} ds \right| < M \times$$

$$\times \left(\int_a^b |e^{sz}|\, ds + \left| \int_b^{b+\infty \cdot e^{i\theta}} |e^{sz}| \cdot ds \right| \right).$$

Так как на луче

$$\arg(s - b) = \Theta$$

имеет место равенство

$$|e^{sz}| = \exp\{b \cdot r \cdot \cos\psi\} \cdot \exp\{t \cdot r \cdot \cos(\psi + \Theta)\},$$

то

$$\left| \int_b^{b+\infty \cdot e^{i\theta}} |e^{sz}| \cdot ds \right| < \exp\{b \cdot r \cdot \cos\psi\} \cdot \int_0^\infty \exp\{t \cdot r \cdot \cos(\psi + \Theta)\} \cdot dt =$$

$$= -\frac{\exp\{br \cdot \cos\psi\}}{r \cdot \cos(\psi + \Theta)}.$$

Кроме того,

$$\int\limits_a^b |e^{sz}|\cdot ds < N\cdot\exp\{b\cdot r\cdot\cos\psi\},$$

где N — постоянная.

Следовательно, как бы мало ни было $\varepsilon>0$, при достаточно большом

$$|z|=r$$

имеет место оценка

$$|\Phi(r\cdot e^{i\psi})| < \exp\{(b+\varepsilon)\cdot r\cdot\cos\psi\}.$$

Но b можно взять как угодно близким к

$$x_1=(H_1+k\pi\bar{D})-(H_1+\pi\underline{D}-k\pi\bar{D})\operatorname{tg}\psi,$$

поэтому, если $0<\psi<\beta$ и $\varepsilon>0$ сколь угодно мало, то при достаточно большом r

$$|\Phi(r\cdot e^{i\psi})| < \exp\{[(H_1+k\pi\bar{D})\cdot\cos\psi -$$

$$-(H_1+\pi\underline{D}-k\pi\bar{D})\cdot\sin\psi+\varepsilon]\cdot r\}.$$

Аналогично можно показать, что при $-\beta<\psi<0$, сколь угодно малом $\varepsilon>0$ и достаточно большом r имеет место неравенство

$$|\Phi(r\cdot e^{i\psi})| < \exp\{[(H_1+k\pi\bar{D})\cdot\cos\psi -$$

$$-(H_1+\pi\underline{D}-k\pi\bar{D})\cdot|\sin\psi|+\varepsilon]\cdot r\}.$$

Отсюда с помощью (1′) и (1″) имеем

$$|\varphi(z)| < \exp\{[k\pi\bar{D}\cdot(|\sin\psi|+\cos\psi)+$$

$$+(H_1+H_2)\cdot\cos\psi+(\pi\bar{D}-\pi\underline{D}-H_1-H_2)\cdot|\sin\psi|+\varepsilon]\cdot r\}$$

при

$$0<|\psi|<\beta<\frac{\pi}{4}$$

и любом $\varepsilon>0$, если r достаточно велико, а при

$$\frac{\pi}{4}\leqslant|\psi|<\beta<\frac{\pi}{2}$$

$$|\varphi(z)| < \exp\{[k\cdot\pi\bar{D}\cdot(|\sin\psi|+\cos\psi)+$$

$$+H_1\cos\psi+(\pi\bar{D}-\pi\underline{D}-H_1)\cdot|\sin\psi|+\varepsilon]\cdot r\}$$

($\varepsilon>0$ — любое, r — достаточно велико).

Обозначим через P_1 и P_2 соответственно максимумы функций

$$R_1(\psi)=(H_1+H_2)\cdot\cos\psi+(\pi\bar{D}-\pi\underline{D}-H_1-H_2)\cdot|\sin\psi|$$

и

$$R_2(\psi)=H_1\cdot\cos\psi+(\pi\bar{D}-\pi\underline{D}-H_1)\cdot|\sin\psi|$$

при

$$0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

Тогда мы можем записать

$$|\varphi(z)| < \exp\{[k \cdot \pi \bar{D} \cdot (|\sin\psi| + \cos\psi) + P + \varepsilon] \cdot r\}$$

при $|\psi| < \beta$ и любом $\varepsilon > 0$, если r достаточно велико, где под P понимаем

$$\max\{P_1, P_2\}.$$

Заметим, что P мало вместе с разностью $\bar{D} - \underline{D}$, так как при этом малы H_1 и H_2.

Нетрудно доказать, что функция $\varphi(z)$ экспоненциального типа во всей плоскости и тем более в угле $|\psi| < \beta$ (см. [3]).

Этим и завершается доказательство теоремы.

Теорема 2. *Если функция*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot e^{-\lambda_n s}$$

голоморфна в полуплоскости

$$\operatorname{Re} s > H_1 + k \cdot \pi \bar{D} \left(k < \frac{H_1 + \pi \underline{D}}{\pi \bar{D}}\right),$$

на отрезке

$$|\operatorname{Im} s| < H_1 + \pi \cdot \underline{D} - k \cdot \pi \bar{D}$$

оси голоморфности и в области Δ, представляющей собой внутренность равнобедренного треугольника, основанием которого является этот отрезок, а боковые стороны образуют с действительной осью углы

$$\frac{\pi}{2} - \beta \text{ и } \beta - \frac{\pi}{2},$$

соответственно, то существует функция $\varphi(z)$ экспоненциального типа в угле $|\arg z| < \beta$, имеющая в этом угле индикатрису, не превышающую функции

$$h(\psi) = k \cdot \pi \bar{D} \cdot (|\sin\psi| + \cos\psi) + P,$$

и для которой

$$\varphi(\lambda_n) = a_n L'(\lambda_n) (n = 1, 2, \ldots).$$

Заменив в условии теоремы 2 полуплоскость $\operatorname{Re} s > H_1 + k \cdot \pi \bar{D}$ полуплоскостью $\operatorname{Re} s > H_1$ и повторив те же рассуждения и выкладки, приходим к **теореме 2'.** *Если функция $f(s)$ голоморфна в полуплоскости*

$$\operatorname{Re} s > H_1 \left(k < \frac{H_1 + \pi \underline{D}}{\pi \bar{D}}\right),$$

на отрезке

$$|\operatorname{Im} s| < H_1 + \pi \underline{D} - k \pi \bar{D}$$

оси голоморфности и в области Δ, определенной точно так же, как и в теореме 2, то существует функция $\varphi(z)$ экспоненциального типа в угле

$$|\arg z| < \beta,$$

имеющая в этом угле индикатрису, не превышающую функции

$$h(\psi) = k \cdot \pi \bar{D} \cdot |\sin\psi| + P,$$

и для которой

$$\varphi(\lambda_n) = a_n L'(\lambda_n) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

§ 3. Если σ_h – наименьшее из значений σ, для которых функция $f(s)$ голоморфна в полуплоскости $\operatorname{Re} s > \sigma$, то полуплоскость $\operatorname{Re} s > \sigma_h$ называется полуплоскостью голоморфности функции $f(s)$.

Пусть σ^* – абсцисса границы полуплоскости голоморфности ряда (2.2) и пусть функция $f(s)$ голоморфна на отрезке

$$|\operatorname{Im} s| < H_1 + \pi \underline{D} - k_1 \pi \bar{D}$$

оси голоморфности и в области Δ – внутренности равнобедренного треугольника, основанием которого является этот отрезок, а боковые стороны наклонены к действительной оси под углами

$$\frac{\pi}{2} - \beta \quad \text{и} \quad \beta - \frac{\pi}{2} \left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right).$$

Пусть

$$k_1 < -\frac{P}{\pi \bar{D}}. \tag{3.1}$$

Сделав замену переменной по формуле

$$\zeta = s - \sigma^* + H_1 + k_1 \cdot \pi \bar{D},$$

получим

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{-\lambda_n \cdot [\zeta + \sigma^* - H_1 - k_1 \cdot \pi \bar{D}]\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n \cdot \zeta} = F(\zeta).$$

Для функции $F(\zeta)$ полуплоскостью голоморфности является полуплоскость

$$\operatorname{Re} \zeta > \zeta^* = H_1 + k_1 \cdot \pi \bar{D},$$

кроме того эта функция голоморфна на отрезке

$$|\operatorname{Im} \zeta| < H_1 + \pi \underline{D} - k_1 \cdot \pi \bar{D}$$

оси голоморфности и в области Δ', полученной путем соответствующего сдвига области Δ.

На основании теоремы 2 можно утверждать, что существует функция $\varphi(\zeta)$ – экспоненциального типа в угле

$$|\arg \zeta| < \beta,$$

удовлетворяющая условиям

$$\varphi(\lambda_n) = A_n \cdot L'(\lambda_n),$$

и индикатриса которой в указанном угле не превышает функции

$$h(\psi) = k_1 \cdot \pi \bar{D} \cdot (|\sin \psi| + \cos \psi) + P < k \cdot \pi \bar{D} \cdot (|\sin \psi| + \cos \psi),$$

где

$$k = k_1 + \frac{P}{\pi \cdot \bar{D}} < 0. \tag{3.2}$$

В силу теоремы 1 можно утверждать, что функция $F(\zeta)$ голоморфна в полуплоскости

$$\operatorname{Re} \zeta > \zeta_0 = H_1 + k \cdot \pi \bar{D} + k \pi \bar{D} \cdot \operatorname{tg} \beta,$$

причем $\zeta_0 < \zeta^*$ в том случае, если

$$\operatorname{tg}\beta > \frac{k_1 - k}{k}. \tag{3.3}$$

Пользуясь (3.2), получим

$$\operatorname{tg}\beta > \frac{r_P}{|k| \cdot \pi\tilde{D}}. \tag{3.3'}$$

и

$$H_1 + \pi\bar{D} - k_1 \cdot \pi\bar{D} = H_1 + \pi\underline{D} + |k| \cdot \pi\bar{D} + P.$$

Следовательно, если выполнены условия (3.1) и (3.3′), то ζ^* находится внутри полуплоскости, в которой голоморфна функция $F(\zeta)$, а это противоречит тому, что полуплоскость $\operatorname{Re}\zeta > \zeta^*$ является полуплоскостью голоморфности этой функции.

Заметим, наконец, что $\operatorname{tg}\beta$ можно взять как угодно близким к величине

$$\frac{P}{|k| \cdot \pi\bar{D}}.$$

Итак, доказана

Теорема 3. *Функция $f(s)$ имеет по крайней мере одну особую точку в замкнутом равнобедренном треугольнике Δ с основанием на оси голоморфности длиной*

$$l = 2 \cdot (H_1 + \pi\underline{D} + |k| \cdot \pi\bar{D} + P)$$

и боковыми сторонами, наклоненными под углами

$$\frac{\pi}{2} - \beta \quad \text{и} \quad \beta - \frac{\pi}{2}$$

к действительной оси, где β и $|k|$ связаны условием

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{P}{|k| \cdot \pi\bar{D}}. \tag{3.4}$$

Заметим, что при увеличении длины отрезка l (то есть при увеличении $|k|$) уменьшается правая часть равенства (3.4), а, следовательно, уменьшается угол β. При этом расстояние

$$d' = \frac{(H_1 + \pi\underline{D} + P) \cdot P}{|k| \cdot \pi\bar{D}} + P$$

от вершины треугольника Δ до оси голоморфности уменьшается и стремится к P.

Пусть теперь, по-прежнему, $\delta < \infty$ и Q — полуплоскость голоморфности функции

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot e^{-\lambda_n s}.$$

Сдвиг полуплоскости голоморфности влияет только на коэффициенты ряда, поэтому можно считать, что абсцисса голоморфности равна $s^* = H_1$. Осуществив сколь угодно малый сдвиг вправо полуплоскости Q, получим некоторую полуплоскость Q', на границе которой функция $f(s)$ также голоморфна.

Из теоремы 2′ следует, что существует функция $\varphi(z)$ экспоненциального типа в некотором угле

$$|\arg z| < \beta \left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right),$$

индикатриса которой в этом угле не превышает функции

$$h(\psi) = k \cdot \pi \bar{D} \cdot |\sin \psi| + P \left(k < \frac{H_1 + \pi \underline{D}}{\pi \bar{D}}\right),$$

и для которой

$$\varphi(\lambda_n) = a_n \cdot L'(\lambda_n) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

В силу непрерывности индикатрисы можно утверждать, что существует такое $\eta > 0$, что при $|\psi| < \eta$ и достаточно большом r

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln |\varphi(r \cdot e^{i\psi})|}{r} \leqslant P.$$

Так как с другой стороны

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot e^{-\lambda_n s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)} \cdot e^{-\lambda_n s},$$

то

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\ln |a_n|}{\lambda_n} \leqslant P + \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{\lambda_n} \cdot \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_n)} \right| \leqslant P + \delta.$$

Но

$$\bar{s} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\ln |a_n|}{\lambda_n}$$

есть абсцисса сходимости ряда (2.2), а, следовательно, справедлива

Теорема 4. *Расстояние между границами полуплоскостей сходимости и голоморфности ряда* (2.2) *не превосходит величины* $d' = P + \delta - H_1$.

Из теоремы 4 следует, что $\delta \geqslant H_1 - P$, так как абсцисса сходимости не меньше абсциссы голоморфности ряда (2.2).

Частным случаем теорем 3 и 4, когда $\underline{D} = \bar{D} = D$, являются известные теоремы Полиа и В. Бернштейна [4].

Заметим, наконец, что условие $\delta < \infty$ для теоремы 3 несущественно.

Московский институт
химического машиностроения

Поступило в редакцию
31.X.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Гольдберг, Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций, IV, Мат. сб., 66 (108), вып. 3, 1965, 411—457.
2. Г. Л. Лунц, Оценка роста канонического произведения, Международный конгресс математиков, Москва, 1966, Тезисы кратких научных сообщений, секция 4, стр. 64.
3. Г. Л. Лунц, О рядах Дирихле с комплексными показателями, Мат. сб., 67 (109), вып. 1, 1965, 89—134.
4. V. Bernstein, Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries Dirichlet, Paris, 1933.

POLYA IR V. BERNŠTEINO TEOREMŲ DIRICHLE EILUČIŲ KLAUSIMU APIBENDRINIMAS

L. OSKOLKOVAS

(Reziumė)

Darbe apibendrinamos klasiškos teoremos Dirichle eilučių klausimu tuo atveju, kai rodiklių seka (rodikliai yra teigiami) neišmatuojama, bet turi aprėžtą viršutinį tankį.

LA GÉNÉRALISATION DES THÉORÈMES DE POLYA ET V. BERNSTEIN SUR LES SÉRIES DE DIRICHLET

L. OSKOLKOV

(Résumé)

L'article est consacré a la généralisation des théorèmes classiques sur les séries de Dirichlet dans le cas où la suite des exposants (qui sont positifs) n'est pas mésurable et possède seulement une densité superieure finie.