LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 2, 1967
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 2, 1967

# О ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ В СЛУЧАЕ УСТОЙЧИВОГО ПРЕДЕЛЬНОГО ЗАКОНА

В. А. СТАТУЛЯВИЧЮС

В работе автора [1] рассматривались предельные теоремы для плотности $p_{Z_n}(x)$ нормированной суммы

$$Z_n=\frac{S_n-A_n}{B_n}, \qquad S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$$

независимых случайных величин

$$\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n,\ \ldots \tag{1}$$

и асимптотические разложения для $p_{Z_n}(x)$ и для $F_{Z_n}(x)=\mathbf{P}\{Z_n<x\}$ по многочленам Чебышева – Эрмита в случае нормального предельного закона. Предлагаемым в статье [1] методом успешно можно получить разные предельные теоремы для плотностей, асимптотические разложения по псевдомоментам и тогда, когда в качестве предельного закона выступает любой устойчивый или безгранично делимый закон.

Целью настоящей заметки и является показать, как можно оценивать характеристическую функцию $f_{Z_n}(t)$ во всем интервале значений аргумента в случае устойчивого предельного закона. Попутно также докажем одну теорему.

Пусть последовательность (1) такова, что для $F_{\xi_k}$ выполняются следующие условия:

I. $$1-F_{\xi_k}(x)=\frac{c'_k+\alpha'_k(x)}{x^{\alpha}} \quad \text{при} \quad x>0,$$

$$F_{\xi_k}(x)=\frac{c''_k+\alpha''_k(x)}{|x|^{\alpha}} \quad \text{при} \quad x<0,$$

$0<\alpha<2$, причем $c'_k\geqslant 0$ и $c''_k\geqslant 0$ таковы, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}c'_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}c''_k}=c \qquad (0\leqslant c\leqslant\infty),$$

$$c_k=c'_k+c''_k>0$$

и существует неотрицательная функция $\alpha(x)\to 0$, когда $x\to\infty$ такая, что

$$|\alpha'_k(x)|\leqslant c_k\,\alpha\left(\frac{x}{c_k^{\frac{1}{\alpha}}}\right),$$

$$|\alpha''_k(x)|\leqslant c_k\,\alpha\left(\frac{x}{c_k^{\frac{1}{\alpha}}}\right), \qquad k=1,\ 2,\ \ldots$$

II. Существуют плотности $P_{\xi_k}(x) \leqslant C_k \leqslant \infty$.

**Теорема.** *Если выполнены условия* I, II,

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, c_k < \infty$$

*и*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{C_k^2} = \infty,$$

*то существуют постоянные* $A_n$ *и* $B_n = \left(\sum_{k=1}^{n} c_k\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ *и устойчивый закон* $V_\alpha(x)$ *с плотностью распределения* $v_\alpha(x)$, *что для* $Z_n = \frac{S_n - A_n}{B_n}$ *равномерно относительно* $x$ $(-\infty < x < \infty)$ *имеет место соотношение*

$$p_{Z_n}(x) \to v_\alpha(x), \qquad n \to \infty.$$

Доказательство. Заметим, что в условиях теоремы будем иметь

$$\sup_x |F_{Z_n}(x) - V_\alpha(x)| \to 0 \qquad (n \to \infty). \tag{2}$$

Кроме того, для функции распределения

$$F_{\tilde{\xi}_k}(x) = \int F_{\xi_k}(x+y)\, dF_{\xi_k}(y)$$

симметризованной случайной величины $\tilde{\xi}_k$ будет верно соотношение

$$1 - F_{\tilde{\xi}_k}(x) = \frac{c_k + \alpha_k(x)}{x^\alpha}, \qquad x > 0, \tag{3}$$

где

$$|\alpha_k(x)| \leqslant c_k \tilde{\alpha}\left(\frac{x}{c_k^{\frac{1}{\alpha}}}\right)$$

и

$$0 \leqslant \tilde{\alpha}(x) \to 0\, (x \to \infty). \tag{4}$$

Характеристическую функцию распределения $V_\alpha(x)$ обозначим $g_\alpha(t)$. Согласно условиям теоремы существует $p_{Z_n}(x)$, функция $|f_{S_n}(t)|$ является интегрируемой при $n \geqslant m_0$ и поэтому имеем

$$\sup_x |p_{Z_n}(x) - v_\alpha(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}(I_1 + I_2 + I_3 + I_4), \tag{5}$$

где

$$I_1 = \int\limits_{|t| \leqslant T_n} |f_{Z_n}(t) - g_\alpha(t)|\, dt, \quad I_2 = \int\limits_{|t| > T_n} |g_\alpha(t)|\, dt,$$

$$I_3 = \int\limits_{T_n < |t| \leqslant K_n} |f_{Z_n}(t)|\, dt, \quad I_4 = \int\limits_{K_n < |t| < \infty} |f_{Z_n}(t)|\, dt, \qquad 0 < T_n < K_n < \infty.$$

Согласно (2) можно найти медленно возрастающую последовательность $T_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, такую, что $I_1 \to 0$ $(n \to \infty)$. Тогда и $I_2 \to 0$ $(n \to \infty)$.

Имеем

$$|f_{S_n}(t)| \leqslant \exp\left\{-I_n\left(\frac{t}{2\pi}\right)\right\},$$

где

$$I_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 \pi t x\, dF_{\tilde{\xi}_k}(x) \geqslant 4t^2 I_n\left(\frac{1}{2|t|}\right)$$

и

$$l_n(N) = \sum_{k=1}^{n} \int_{|x| \leqslant N} x^2 dF_{\xi_k}(x), \qquad N > 0.$$

Пусть $N_0$ такое, что

$$\tilde{\alpha}(x) \leqslant \frac{1}{6} \quad \text{при} \quad x \geqslant N_0,$$

что возможно в силу (4), и

$$0 < |t| \leqslant \frac{1}{2 \cdot 2^{\frac{1}{\alpha}} N_0 \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} c_k^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Тогда, учитывая (3), находим

$$l_n\left(\frac{1}{2|t|}\right) \geqslant 2 \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\frac{1}{2 \cdot 2^{\frac{1}{\alpha}} |t|} \leqslant \frac{1}{2|t|}} x^2 dF_{\tilde{\xi}_k}(x) \geqslant$$

$$\geqslant 2^{-\frac{2}{\alpha}-1} t^{-2} \sum_{k=1}^{n} \left\{ F_{\tilde{\xi}_k}\left(\frac{1}{2|t|}\right) - F_{\tilde{\xi}_k}\left(\frac{1}{2 \cdot 2^{\frac{1}{\alpha}} |t|}\right) \right\} \geqslant$$

$$\geqslant 2^{-\frac{2}{\alpha}-1+\alpha} |t|^{\alpha-2} \sum_{k=1}^{n} c_k \left(1 - 2\tilde{\alpha}\left(\frac{1}{2 \cdot 2^{\frac{1}{\alpha}} |t| c_k^{\frac{1}{\alpha}}}\right) - \tilde{\alpha}\left(\frac{1}{2|t| c_k^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\right) \geqslant$$

$$\geqslant 2^{\alpha-2-\frac{2}{\alpha}} |t|^{\alpha-2} \sum_{k=1}^{n} c_k.$$

Следовательно, при

$$|t| \leqslant \frac{\pi}{2^{\frac{1}{\alpha}} N_0 \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} c_k^{\frac{1}{\alpha}}}$$

имеем

$$|f_{S_n}(t)| \leqslant \exp\left\{-\frac{|t|^{\alpha}}{2^{\frac{2}{\alpha}} \pi^{\alpha}} \sum_{k=1}^{n} c_k\right\}$$

или

$$|f_{Z_n}(t)| \leqslant \exp\left\{-\frac{|t|^{\alpha}}{2 \cdot 2^{\frac{1}{\alpha}} \pi^{\alpha}}\right\} \quad \text{при} \quad |t| \leqslant \frac{\pi B_n}{2^{\frac{1}{\alpha}} N_0 \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} c_k^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Итак, $I_3 \to 0$ $(n \to \infty)$, если положить

$$K_n = \frac{\pi B_n}{2^{\frac{1}{\alpha}} N_0 \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} c_k^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Уточним леммы 2 и 3 из [1].

**Лемма 2′.** *Пусть*

$$J_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} (xt)^2 p_{\tilde{\xi}_k}(x)\, dx.$$

*Тогда для любых $n \geqslant 1$ и $N_n > 0$ существует разбиение*

$$\ldots < t_{-1}^{(n)} < t_0^{(n)} = 0 < t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \ldots$$

*интервала $(-\infty, \infty)$ с условием*

$$\frac{1}{6N_n} \leqslant t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)} \leqslant \frac{1}{4N_n}, \tag{6}$$

*что*

$$J_n(t) \geqslant \frac{1}{2}\,(t - t_{k0}^{(n)})\,\bar{l}_n\left(\frac{1}{6\,|\,t - t_{k0}^{(n)}\,|}\right), \tag{7}$$

*если $t \in [t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}]$, причем $t_{k0}^{(n)}$ при данном $n$ в зависимости от $k$ равно или $t_k^{(n)}$ или $t_{k+1}^{(n)}$.* Здесь $(\alpha)$ означает расстояние числа $\alpha$ до ближайшего целого числа.

**Лемма 3′.** *Пусть имеется какое нибудь разбиение*

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$$

*интервала $[a, \infty)$ с*

$$\max_{0 \leqslant k < \infty} (t_{k+1} - t_k) \leqslant \varepsilon$$

*и пусть неотрицательная функция $g(t)$, определенная на интервале $[a, \infty)$ на каждом из интервалов $(t_k, t_{k+1})$ удовлетворяет условию Липшица*

$$|\,g(t+s) - g(t)\,| \leqslant K\,|\,s\,|^{\beta}$$

*с показателем $\beta > 0$.*

*Пусть, кроме того,*

$$V = \int_a^{\infty} g(t)\,dt < \infty.$$

*Тогда при*

$$\mu \geqslant \frac{\beta+1}{\beta}$$

*справедлива оценка*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sup_{t_k < t < t_{k+1}} g^{\mu}(t)\right)\Delta t_k \leqslant V\left[\left(\frac{\beta+1}{\beta}\,K^{\frac{1}{\beta}}\,\varepsilon\left(\sup_{a \leqslant t < \infty} g(t)\right)^{\mu-1-\frac{1}{\beta}}\right)^{\frac{\mu\beta}{\beta+1}} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\beta+1}{\beta}\right)^{\mu}\left(\sup_{a \leqslant t < \infty} g(t)\right)^{\mu-1}\right],$$

*где*

$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k.$$

Доказательство лемм 2′ и 3′ пропустим, так как оно вполне аналогично доказательству лемм 2 и 3 из [1].

Положим

$$N_n = \max\left\{3\,2^{\frac{1}{\alpha}-1} N_0 \max_{1 \leqslant k \leqslant n} c_k^{\frac{1}{\alpha}},\ 1\right\}. \tag{8}$$

Тогда для $t \in [t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}]$ согласно (7) имеем

$$I_n(t) \geqslant 4J_n(t) \geqslant 2\,(t - t_{k0}^{(n)})^2\,\bar{l}_n\left(\frac{1}{6\,|\,t - t_{k0}^{(n)}\,|}\right),$$

причем

$$l_n\left(\frac{1}{6\,|t-t_{k0}^{(n)}|}\right)\geqslant 2\int\limits_{\frac{1}{6\cdot 2^{\frac{1}{\alpha}}|t-t_{k0}^{(n)}|}\leqslant x\leqslant\frac{1}{6\,|t-t_{k0}^{(n)}|}} x^2\,dF_{\tilde{\xi}_k}(x)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{18\cdot 2^{\frac{2}{\alpha}}}\,|t-t_{k0}^{(n)}|^{\alpha-2}\sum_{k=1}^{n}c_k\left(1-2\tilde{\alpha}\left(\frac{1}{6\cdot 2^{\frac{1}{\alpha}}\,|t-t_{k0}^{(n)}|\,c_k^{\frac{1}{\alpha}}}\right)-\right.$$

$$\left.-\tilde{\alpha}\left(\frac{1}{6\,|t-t_{k0}^{(n)}|\,c_k^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\right)\geqslant\frac{1}{36\cdot 2^{\frac{2}{\alpha}}}\,|t-t_{k0}^{(n)}|^{\alpha-2}\sum_{k=1}^{n}c_k,$$

так как

$$\frac{1}{6\cdot 2^{\frac{1}{\alpha}}\,|t-t_{k0}^{(n)}|\,c_k^{\frac{1}{\alpha}}}\geqslant\frac{2N_n}{3\cdot 2^{\frac{1}{\alpha}}\,c_k^{\frac{1}{\alpha}}}\geqslant N_0.$$

Следовательно,

$$I_n(t)\geqslant\frac{1}{18\cdot 2^{\frac{2}{\alpha}}}\,|t-t_{k0}^{(n)}|^{\alpha}\sum_{k=1}^{n}c_k \tag{9}$$

при

$$t\in[t_k^{(n)},\ t_{k+1}^{(n)}].$$

С другой стороны, согласно оценке (4.6) леммы 1 из [1], имеем

$$I_n(t)\geqslant\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\alpha\left(\mathfrak{M}_k,\ \frac{1}{2|t|}\right)$$

при всех $-\infty<t<\infty$. В нашем случае положим

$$\mathfrak{M}_k=\{\Delta_{k1},\ C_{k1};\ \Delta_{k2},\ C_{k2}\},$$

$$\Delta_{k1}=\left[N_0^{\frac{1}{\alpha}}c_k^{\frac{1}{\alpha}},\ 2^{\frac{1}{\alpha}}N_0^{\frac{1}{\alpha}}c_k^{\frac{1}{\alpha}}\right],\quad \Delta_{k2}=\left[-2^{\frac{1}{\alpha}}N_0^{\frac{1}{\alpha}}c_k^{\frac{1}{\alpha}},\ -N_0^{\frac{1}{\alpha}}c_k^{\frac{1}{\alpha}}\right],\quad C_{k1}=C_{k2}=C_k,$$

где

$$\alpha(\mathfrak{M}_k,\ N)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{Q_{ki}^3}{(|\Delta_{ki}|+2N)^2\,C_{ki}^2},\qquad N>0,$$

$$Q_{ki}=\int\limits_{\Delta_{ki}}\min\{C_{ki},\ p_{\tilde{\xi}_k}(x)\}\,dx$$

при наборе

$$\mathfrak{M}_k=\{\Delta_{ki},\ C_{ki},\ i=1,\ 2,\ \ldots\}$$

непересекающихся интервалов $\Delta_{ki}$ длины $|\Delta_{ki}|$ и положительных констант

$$C_{ki}\leqslant\infty,\ k=1,\ 2,\ \ldots$$

Имеем

$$Q_{k1}=Q_{k2}=F_{\tilde{\xi}_k}\left(2^{\frac{1}{\alpha}}N_0^{\frac{1}{\alpha}}c_k^{\frac{1}{\alpha}}\right)-F_{\tilde{\xi}_k}\left(N_0^{\frac{1}{\alpha}}c_k^{\frac{1}{\alpha}}\right)\geqslant$$

$$\geqslant c_k\left\{\frac{1}{N_0c_k}\left(1-\tilde{\alpha}(N_0)\right)-\frac{1}{2N_0c_k}\left(1+\tilde{\alpha}(2N_0)\right)\right\}\geqslant\frac{1}{6N_0},$$

поэтому

$$\alpha\left(\mathfrak{M}_k, \frac{1}{2|t|}\right) \geqslant \frac{1}{108\left(2^{\frac{1}{\alpha}} c_k^{\frac{1}{\alpha}} N_0^{\frac{1}{\alpha}} + |t|^{-1}\right)^2 C_k^2}$$

и при $|t| \geqslant \frac{3}{4N_n}$

$$I_n(t) \geqslant \frac{\delta_\alpha}{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} c_k^{\frac{2}{\alpha}}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{C_k^2}, \tag{10}$$

где

$$\delta_\alpha = \frac{1}{108\left(2\cdot 2^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right) \max\left\{N_0^5, N_0^{\frac{2}{\alpha}+3}\right\}}.$$

Пусть $\delta$ какое нибудь положительное число, такое, что $\delta<\alpha$ и $\delta=1$ при $\alpha>1$.

Положим

$$\beta = \frac{\alpha}{\alpha+1-\delta} \tag{11}$$

и пусть $n_0$ — наименьшее целое число $\geqslant \frac{\beta+1}{\beta}$. Согласно условиям теоремы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{C_k^2} = \infty. \tag{12}$$

Поэтому найдутся индексы $i_1, \ldots, i_{2n_0}$, такие, что $C_{i_j}<\infty$, $j=1, \ldots, 2n_0$. Для простоты обозначений, не нарушая общности, положим, что $i_j=j$. Пользуясь оценками (8)—(10) и (6), находим

$$I_4 = 2\pi B_n \int\limits_{\frac{K_n}{2\pi B_n}<|t|<\infty} |f_{S_n}(2\pi t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi B_n e^{2n_0} \exp\left\{-\frac{1}{2} \min_{|t|\geqslant\frac{3}{4N_n}} I_n(t)\right\} \int\limits_{\frac{3}{4N_n}<|t|<\infty} e^{-\frac{1}{2}I_n(t)} |f_{S_{2n_0}}(2\pi t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi e^{2n_0} B_n \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{\delta_\alpha}{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} c_k^{\frac{2}{\alpha}}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{C_k^2}\right\} \sum_k \int\limits_{t_k^{(n)}}^{t_{k+1}^{(n)}} \exp\left\{-\frac{1}{36\cdot 2^{\frac{2}{\alpha}}} |t-\right.$$

$$\left.- t_{k0}^{(n)}|^\alpha B_n^\alpha\right\} |f_{S_{2n_0}}(2\pi t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant 3^{\frac{2}{\alpha}} 2^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\alpha^2}+1} \pi \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) e^{2n_0} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{\delta_\alpha}{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} c_k^{\frac{2}{\alpha}}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{C_k^2}\right\} U_n, \tag{13}$$

где

$$U_n = \sum_k \sup_{t_k^{(n)} \leqslant t \leqslant t_{k+1}^{(n)}} |f_{S_{2n_0}}(2\pi t)| \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{i=1}^{2n_0} \left( \sum_k \sup_{t_k^{(n)} \leqslant t \leqslant t_{k+1}^{(n)}} |f_{\xi_i}(2\pi t)|^{2n_0} \right)^{\frac{1}{2n_0}} \leqslant$$

$$\leqslant 3^2 2^{\frac{1}{\alpha}} N_0 \max_{1 \leqslant k \leqslant n} c_k^{\frac{1}{\alpha}} \prod_{i=1}^{2n_0} C_i^{\frac{1}{2n_0}} \left[ \left( \frac{\beta+1}{\beta} \right)^{n_0} + \left( \frac{\beta+1}{\beta} K_i^{\frac{1}{\beta}}(\alpha, \delta)\, \varepsilon_n \right)^{\frac{n_0\beta}{\beta+1}} \right]^{\frac{1}{2n_0}}, \quad (14)$$

$$K_i(\alpha, \delta) \leqslant \begin{cases} 2\pi \mathbf{M} |\bar{\xi}_i| \quad \text{при} \quad \alpha > 1, \\ 2^{\alpha - 2 + \frac{1}{\alpha}} \pi^\alpha N_0^{\frac{\alpha-\delta}{1+\alpha-\delta}} \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} c_k^{\frac{1-\delta}{\alpha(1+\alpha-\delta)}} \mathbf{M} |\bar{\xi}_i|^\delta + \\ + 2^{3\alpha+1} \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} c_k^{\frac{\alpha-\delta}{1+\alpha-\delta}} \quad \text{при} \quad \alpha \leqslant 1, \end{cases}$$

$$\varepsilon_n = \frac{1}{4N_n} = \frac{1}{\max \left\{ 6 \cdot 2^{\frac{1}{\alpha}} N_0 \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} c_k^{\frac{1}{\alpha}},\ 4 \right\}},$$

так как функции $g_i(t) = |f_{\xi_i}|(2\pi t)|^2$ в интервале $(-\infty, \infty)$ удовлетворяют условиям леммы 3′ с $\varepsilon = \varepsilon_n$, $K_i = K_i(\alpha, \delta)$, с показателем $\beta$ определенными в (11),

$$V_i = p_{\bar{\xi}_i}(0) \leqslant C_i, \quad i = 1, \ldots, 2n_0 \quad \text{и} \quad \mu = n_0.$$

Так как

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} c_k < \infty,$$

то из (13) и (14) заключаем, что $I_4 \to 0$ $(n \to \infty)$, если только имеет место (12).

Таким образом, все $I_i \to 0$ $(n \to \infty)$, $i = 1, 2, 3, 4$ и из (5) следует справедливость утверждения теоремы.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Вильнюсский Государственный университет
им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
26.XII.1966

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. Статулявичюс, Предельные теоремы для плотностей и асимптотические разложения для распределений сумм независимых случайных величин, Теория вероятн. и ее примен., **10**, 4 (1965), 645—659.

## RIBINIŲ TEOREMŲ STABILAUS RIBINIO DĖSNIO ATVEJU KLAUSIMU

V. STATULEVIČIUS

(*Reziumė*)

Straipsnyje pateikiami nepriklausomų atsitiktinių dydžių $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ normuotos sumos

$$Z_n = \frac{S_n - A_n}{B_n}, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$$

charakteringosios funkcijos $f_{Z_n}(t)$ įvertinimai visiems $t \in (-\infty, \infty)$ stabilaus ribinio dėsnio $V_\alpha(x)$ atveju, kai patenkintos I, II sąlygos.

Esant šioms sąlygoms, jei tik

$$\overline{\lim_{k \to \infty}}\, c_k < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{C_k^2} = \infty,$$

tai

$$\sup_x \left| p_{Z_n}(x) - \frac{d}{dx} V_\alpha(x) \right| \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

## ON THE LIMIT THEOREMS WHEN THE LIMIT LAW IS STABLE

V. STATULEVIČIUS

(*Summary*)

Under conditions I and II estimations for the characteristic function $f_{Z_n}(t)$ of normal sum

$$Z_n = \frac{S_n - A_n}{B_n}, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$$

of independent random variables $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ for all $t \in (-\infty, \infty)$ when the limit law $V_\alpha(x)$ is stable are given.

Under these conditions, if

$$\overline{\lim_{k \to \infty}}\, c_k < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{C_k^2} = \infty$$

we have

$$\sup_x \left| p_{Z_n}(x) - \frac{dV_\alpha(x)}{dx} \right| \to \infty \quad (n \to \infty).$$