LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 3, 1968
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 3, 1968

О СТРОГО КОСИНГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРАХ

Ю. Н. ВЛАДИМИРСКИЙ

Все рассматриваемые пространства предполагаются банаховскими, а операторы – линейными и ограниченными.

Будем придерживаться терминологии из [2]. Нормально разрешимый оператор $A: X \to Y$ (или, что то же, оператор $A: X \to Y$, имеющий замкнутый образ $\operatorname{Im} A$) называют $\Phi_+ - (\Phi_- -)$ *оператором* [1], если $\dim \operatorname{Ker} A < \infty$ ($\operatorname{codim} \operatorname{Im} A < \infty$)*); оператор $B: X \to Y$ называют $\Phi_+ - (\Phi_- -)$ *допустимым возмущением* [2], если $A+B$ есть $\Phi_+ - (\Phi_- -)$ – оператор для любого $\Phi_+ - (\Phi_- -)$ оператора A.

Изучая Φ_+ – допустимые возмущения, Т. Като [3] ввел важный класс операторов, названных им *строго сингулярными*. Это – операторы $T: X \to Y$, сужение которых на любое бесконечномерное банаховское подпространство в X не есть изоморфное вложение (или, что то же, не имеет одновременно нулевое ядро и замкнутый образ). Т. Като показал (см. также [2]), что строго сингулярные операторы $T: X \to Y$ являются Φ_+ – допустимыми возмущениями и образуют замкнутое подпространство в пространстве $L(X, Y)$ всех ограниченных линейных операторов из X в Y, притом являющееся двусторонним идеалом, когда $X = Y$.

Определение строгой сингулярности оператора $T: X \to Y$ можно переформулировать следующим образом: не существует бесконечномерного банаховского пространства E и изоморфных вложений $i_1: E \to X$, $i_2: E \to Y$, для которых была бы коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "T"] & & Y \\ & E \arrow[ul, "i_1"] \arrow[ur, "i_2"'] & \end{tikzcd}$$

А. Пелчинский [4] ввел дуальное понятие, назвав оператор $T: X \to Y$ *строго косингулярным*, если не существует бесконечномерного банаховского пространства E и (гомоморфных) наложений $h_1: X \to E$, $h_2: Y \to E$, для которых была бы коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "h_1"'] & & Y \arrow[dl, "h_2"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

В настоящей статье доказывается, что строго косингулярные операторы являются Φ_- – допустимыми возмущениями и образуют в $L(X, Y)$ замкну-

*) Приведенное здесь определение $\Phi_+ - (\Phi_- -)$ – оператора взято из [2] и несколько отличается от определения, данного в [1].

тое подпространство, являющееся при $X=Y$ двусторонним идеалом.

Условимся еще о некоторых обозначениях. Под словом „подпространство" всегда будем понимать замкнутое подпространство. Следуя В. Птаку, будем использовать обозначение $X \Subset Y$ для выражения того, что X есть подпространство в Y. Пусть $X_1 \Subset X$. Тогда $X_1^\perp = \{x^* \in X^* : <x, x^*> = 0$ для всех $x \in X_1\}$. Если $T \in L(X, Y)$ и $X_1 \Subset X$, то $T|X_1$ обозначает сужение оператора T на X_1.

Лемма 1. *Пусть $T \in L(X, Y)$. Тогда „T строго косингулярен" $\rightleftarrows$ „ сужение T^* на любое бесконечномерное слабо замкнутое подпространство в Y^* не есть изоморфное вложение".*

Доказательство. Как известно, слабо замкнутые подпространства в Y^* — это подпространства, представимые в виде $Y_1^\perp$, где $Y_1 \Subset Y$. Пусть $Y_1 \Subset Y$. Обозначим через $\varphi : Y \to Y/Y_1$ каноническое наложение, через $i : Y_1^\perp \to Y^*$ каноническое вложение. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
X^* & Y^* \arrow[l, "T^*"'] & (Y/Y_1)^* \arrow[l, "\varphi^*"'] \arrow[dl, "j"] \\
 & Y_1^\perp \arrow[u, "i"] &
\end{tikzcd},$$

где $j = i^{-1}\varphi^*$ — изоморфизм. Пользуясь теоремой VI. 6. 2 и леммой VI. 6. 3 в [5], заключаем, что „φT наложение" $\rightleftarrows$ „$T^*\varphi^*$ изоморфное вложение" $\rightleftarrows$ $\rightleftarrows$ „T^*i изоморфное вложение". Остается заметить, что „$\dim Y_1^\perp = \infty$" $\rightleftarrows$ $\rightleftarrows$ „$\dim Y/Y_1 = \infty$".

Лемма 2. *Пусть $T \in L(X, Y)$. Если $T^*|_{Y_1^\perp}$ не есть Φ_+ — оператор, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется бесконечномерное $Y_2^\perp \Subset Y_1^\perp$ и вполне непрерывный оператор $A \in L(Y^*, X^*)$ такие, что $T^*|_{Y_2^\perp} = A|_{Y_2^\perp}$ и $|A| < \varepsilon$.*

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 4.1 в [2]. Так как $T^*|_{Y_1^\perp}$ не есть Φ_+ — оператор, то для любого $Z \Subset Y_1^\perp$ с $\dim Y_1^\perp/Z < \infty$ $T^*|_z$ не есть изоморфное вложение. (Действительно, пусть $Y_1^\perp = Z \dot{+} K$, где $\dim K = n < \infty$. Тогда если $T^*(Z)$ замкнуто и $\operatorname{Ker}(T^*|_z) = 0$, то $T^*(Y_1^\perp)$ замкнуто и $\dim \operatorname{Ker}(T^*|_{Y_1^\perp}) \leqslant n < \infty \Big)$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдется $y_1^* \in Y_1^\perp$ такой, что $|y_1^*| = 1$, $|T^*y_1^*| < \varepsilon \cdot 2^{-2}$. Тогда найдется $y_1 \in Y$ такой, что $<y_1, y_1^*> = 1$, $|y_1| < 2$. Предположим, что построены биортогональные системы $\{y_k^*\}_1^{n-1}$, $\{y_k\}_1^{n-1}$, $(y_k^* \in Y_1^\perp$, $y_k \in Y)$ такие, что

$$|y_k^*| = 1, \ |y_k| < 2^{2k-1}, \ |T^*y_k^*| < \varepsilon \cdot 2^{1-3k} (k = 1, \ \ldots n-1). \qquad (1)$$

Обозначим $\{y_1, \ \ldots, \ y_{n-1}\}^\perp = E$. Ясно, что $\dim Y_1^\perp/(Y_1^\perp \cap E) \leqslant \dim Y^*/E < \infty$, следовательно, $T^*|_{Y_1^\perp \cap E}$ не есть изоморфное вложение. Возьмем $y_n^* \in Y_1^\perp \cap$ $\cap \{y_1, \ \ldots, \ y_{n-1}\}^\perp$ такой, что $|y_n^*| = 1$, $|T^*y_n^*| < \varepsilon \cdot 2^{1-3n}$ и $g_n \in Y$ такой, что $<g_n, y_n^*> = 1$ и $|g_n| < 2$.

Положим $y_n = g_n - \sum\limits_{k=1}^{n-1} \langle g_n, y_k^* \rangle y_k$. Тогда $\langle y_n, y_k^* \rangle = \delta_{n,k} (k = 1, \ \ldots, \ n)$ и $|y_n| <$

$<2^{2n-1}$. Таким образом, по индукции можно построить биортогональные последовательности $\{y_k^*\}_1^\infty$, $\{y_k\}_1^\infty$ ($y_k^* \in Y_1^\perp$, $y_k \in Y$) такие, что для всех k выполняются соотношения (1).

Определим оператор $A: Y^* \to X^*$ равенством

$$Ay^* = \sum_{k=1}^{\infty} \langle y_k, y^* \rangle T^* y_k^*.$$

Ясно, что A вполне непрерывен и $\|A\| < \varepsilon$. Но $A = B^*$, где

$$Bx = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, T^* y_k^* \rangle y_k.$$

Поэтому $\operatorname{Ker}(T^* - A) = \left(\operatorname{Im}(T - B)\right)^\perp$ слабо замкнуто. Обозначим $Y_1^\perp \cap \operatorname{Ker}(T^* - A) = Y_2^\perp$. Для завершения доказательства остается заметить, что $\dim Y_2^\perp = \infty$. Это следует из того, что для всех k $Ay_k^* = T^* y_k^*$ и $y_k^* \in Y_1^\perp$, причем y_k^* линейно независимы.

Теорема 1. *Пусть $T \in L(X, Y)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) T есть строго косингулярный оператор;

б) для всякого бесконечномерного $Y_1^\perp \Subset Y^*$, $T^*|_{Y_1^\perp}$ не есть Φ_+-оператор;

в) для всякого бесконечномерного $Y_1^\perp \Subset Y^*$ найдется бесконечномерное $Y_2^\perp \Subset Y_1^\perp$ такое, что $T^*|_{Y_2^\perp}$ вполне непрерывен.

Доказательство. а)$\Rightarrow$б). Пусть найдется бесконечномерное $Y_1^\perp \Subset Y^*$ такое, что $T^*|_{Y_1^\perp}$ есть Φ_+-оператор. Тогда $\dim \operatorname{Ker}\left(T^*|_{Y_1^\perp}\right) < \infty$. Из теоремы Хана-Банаха следует, что существует $Z^\perp \Subset Y_1^\perp$ такое, что $Y_1^\perp = \operatorname{Ker}\left(T^*|_{Y_1^\perp}\right) \dotplus Z^\perp$. Тогда $\operatorname{Ker}(T^*|_{Z^\perp}) = 0$, а так как $T^*(Z^\perp) = T^*(Y_1^\perp)$, то $T^*(Z^\perp)$ замкнуто. Следовательно . $T^*|_{Z^\perp}$ есть изоморфное вложение. Но так как $\dim z^\perp = \infty$, то это противоречит лемме 1.

б)$\to$в) следует из леммы 2.

в)$\to$а). Пусть выполнено условие в). Возьмем произвольное бесконечномерное $Y_1^\perp \Subset Y^*$. Из теоремы Рисса (см. теорему IV. 3. 5 в [5]) следует, что $T^*|_{Y_1^\perp}$ не есть изоморфное вложение. Из леммы 1 следует а).

Следствие 1. *Если оператор $B: X \to Y$ строго косингулярный, а $T: X \leftarrow Y$ есть Φ_--оператор, то $T + B$ есть Φ_--оператор.*

Доказательство. Заметим сначала, что „T есть Φ_--оператор"$\leftarrow$ „T^* есть Φ_+-оператор". (Это следует из того, что „$\operatorname{Im} T$ замкнут" $\rightleftarrows$ „$\operatorname{Im} T^*$ замкнут" (см. теоремы VI.6.2 и VI. 6. 4 в [5]) и из соотношения $\dim \operatorname{Ker} T^* = \dim (Y/\overline{\operatorname{Im} T})^*$). Предположим, что $T + B$ не есть Φ_--оператор. Тогда $(T + B)^*$ не есть Φ_+-оператор. В силу леммы 2 существует бесконечномерное $Y_1^\perp \Subset Y^*$ такое, что $(T + B)^*|_{Y_1^\perp}$ вполне непрерывен. Пользуясь теоремой 1, найдем бесконечномерное $Y_2^{\perp} \subseteq Y_1^{\perp}$ такое, что $B^*|_{Y_2^{\perp}}$ вполне непрерывен. Тогда $T^*|_{Y_2^{\perp}}$ вполне непрерывен, и из теоремы Рисса (см. также теорему 4.1 в [2]) следует, что T^* не есть Φ_+-оператор. Но это противоречит тому, что T есть Φ_--оператор. Значит, $T+B$ есть Φ_--оператор.

Замечание. Легко убедиться, что утверждение, содержащееся в следствии 1, сохраняет силу, если $T: X \to Y$ — замкнутый (но, вообще говоря, неограниченный) Φ_--оператор.

Следствие 2. *Множество всех строго косингулярных операторов из $L(X, Y)$ образует замкнутое подпространство в $L(X, Y)$, являющееся двусторонним идеалом, если $X = Y$.*

Доказательство. В [4] (см. предложение 1) доказано, что множество всех строго косингулярных операторов из $L(X, Y)$ замкнуто, и что если $B: X \to Y$ строго косингулярен, $A \in L(Z_1, X)$, $C \in L(Y, Z_2)$, то BA и CB строго косингулярны. Из теоремы 1 ($a \rightleftarrows b$) следует, что сумма любых двух строго косингулярных операторов из $L(X, Y)$ также есть строго косингулярный оператор. Отсюда следует доказываемое утверждение.

Следствие 3. *В пространствах $l_p (p \geqslant 1)$ и C_0 строго косингулярные операторы вполне непрерывны.*

Доказательство. Утверждение следует из теоремы 5.1 в [2] о единственности нетривиального двустороннего замкнутого идеала в $L(E, E)$ (где E — пространство одного из указанных типов) и следствия 2.

Замечание. В [2] построен пример строго сингулярного оператора $T: X \to X$, который не является Φ_--допустимым возмущением. Используя конструкцию этого примера, нетрудно построить пример строго косингулярного оператора $T: X \to X$, не являющегося Φ_+-допустимым возмущением. Остается открытым вопрос: существует ли $\Phi_+ \cdot (\Phi_- -)$ допустимое возмущение $T: X \to X$, не являющееся строго сингулярным (строго косингулярным) оператором?

Автор выражает глубокую признательность А. С. Маркусу и Д. А. Райкову за постановку задачи и помощь в работе.

Поступило в редакцию 17.II.1967

Москва

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов УМН XII, вып. 2(74), 43—118 (1957).
2. И. Ц. Гохберг, А. С. Маркус и И. А. Фельдман. О нормально разрешимых операторах и связанных с ними идеалах, Известия молдавского филиала АН СССР, № 10 (76), 51—70 (1960).
3. T. Kato, Perturbation theory for nullity, deficiency and other quantities of linear operators, Journal d'analise mathematique, 6, 261—322 (1958).
4. A. Pelczynski, On Strictly Singular and Strictly Cosingular Operators, Bulletin de L'academie polonaise des sciences. Serie des sciences math., astr. et phys. Vol. IX, III, N 1, 1965.
5. Н. Данфорд и Дж. Шварц, Линейные операторы, М. ИЛ, 1962.

APIE GRIEŽTAI KOSINGULIARINIUS OPERATORIUS

J. VLADIMIRSKIS

(Reziumė)

Sakykime, X, Y — Banacho erdvės. Darbe įrodoma, kad bet kuriam Φ — operatoriui $A:X\to Y$ ir bet kokiems griežtai kosinguliariniams operatoriams $B:X\to Y$ ir $C:X\to Y$, $A+B$ yra Φ_- — operatoriaus, o $B+C$ — griežtai kosinguliarinis operatorius.

ON STRICTLY COSINGULAR OPERATORS

J. VLADIMIRSKI

(Summary)

Let X, Y are Banach spaces. In this article are prove that for every Φ_- — operator $A:X\to Y$ and strictly cosingular operators $B:X\to Y$, and $C:X\to Y$, $A+B$ is a Φ_- — operator and $B+C$ is a strictly cosingular operator.