LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 3, 1968
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 3, 1968

# ОБ ОДНОЙ НИЖНЕЙ ОЦЕНКЕ ДЛЯ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ

Н. Г. ГАМКРЕЛИДЗЕ

Значительное число работ посвящено достаточным условиям применимости локальной теоремы (л. т.) последовательности независимых решетчатых случайных величин, а также оценке сверху скорости сходимости в л. т. (см. ссылки в [2]). Здесь будет указан способ построения нижней оценки скорости сходимости в л. т. Примем следующие обозначения.

Пусть

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots \tag{1}$$

последовательность независимых случайных величин, каждая из которых принимает лишь целые значения,

$$p_{kj}=P\{\xi_k=j\}, \quad S_n=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n, \quad A_n=MS_n, \quad a_i=M\xi_i,$$
$$B_n^2=DS_n, \quad \sigma_i^2=D\xi_i, \quad P_n(m)=P(S_n=m),$$

а $\zeta_i$ – независимые случайные величины, которые имеют характеристическую функцию следующего вида:

$$f(t, \zeta_i)=|f(t, \xi_i)|^2.$$

Пусть последовательность (1) удовлетворяет л. т., т. е.

$$\sup_K \left| P_n(K)-(2\pi)^{-\frac{1}{2}} B_n^{-1} \exp\left(-\frac{z_{nk}^2}{2}\right)\right| = \frac{\lambda_n}{B_n},$$

где $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$.

**Теорема.** *Для того, чтобы для последовательности* (1) *выполнялось л. т. необходимо, чтобы она выполнялась также и для „симметризованных" величин* $\zeta_i$.

Доказательство. Согласно предположению

$$\sup_K \left| P_n(K)-(2\pi)^{-\frac{1}{2}} B_n^{-1} \exp\left(-\frac{z_{nk}^2}{2}\right)\right| = \frac{\lambda_n}{B_n},$$

где $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Обозначим

$$\zeta_{(n)}=\sum_{i=1}^{n} \zeta_i \quad \text{и} \quad \varphi(z)=e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

Представим $P(\zeta_{(n)}=K)$ следующим образом:

$$P(\zeta_n=K)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} P(S_n=K+j)P(S_n=j).$$

Учитывая условие теоремы мы можем написать, что

$$P(\zeta_{(n)}=K)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}B_n}\varphi(z_{n,K+j})\frac{1}{\sqrt{2\pi}B_n}\varphi(z_{nj})+$$

$$+\Theta'\frac{\lambda_n}{B_n}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}B_n}\varphi(z_{nj})+\Theta''\frac{\lambda_n}{B_n},$$

где $\Theta'$ и $\Theta''$ по абсолютной величине меньше единицы. Используя лемму 1 работы Ю. В. Прохорова [1], мы можем заменить эти интегральные суммы соответствующими интегралами. Тогда получим

$$\left|\mathbf{P}(\zeta_{(n)}=K)-\frac{1}{B_n}\int\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\varphi\left(\frac{K}{B_n}-z\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\varphi(z)\,dz\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{4}{B_n^2 2\pi}+\frac{\lambda_n}{B_n}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{4\lambda_n}{B_n^2\sqrt{2\pi}}+\frac{\lambda_n}{B_n},$$

т. е.

$$\left|\mathbf{P}(\zeta_{(n)}=K)-\frac{1}{2\sqrt{\pi}B_n}e^{-\frac{K^2}{4B_n^2}}\right|\leqslant\frac{\Lambda_n}{B_n},\tag{2}$$

где

$$\Lambda_n=\frac{2}{\pi B_n}(1+\sqrt{2\pi})+2\lambda_n.\tag{3}$$

Из этого неравенства вытекает утверждение теоремы.

Перейдем сейчас к основной цели нашего раздела — нижней оценке скорости сходимости в локальной теореме.

Рассмотрим разность

$$\vartheta_n=\mathbf{P}(\zeta_{(n)}=0)-\frac{\sum_{j=-k}^{k}\mathbf{P}(\zeta_{(n)}=K)}{2k+1}.$$

С помощью формулы обращения эту разность можно представить в следующем виде:

$$\vartheta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1-\frac{\sin\frac{2k+1}{2}t}{(2K+1)\sin\frac{t}{2}}\right)\prod_{j=1}^{n}|f(t,\ \xi_j)|^2\,dt.$$

По (2)

$$\mathbf{P}(\zeta_n=0)\leqslant\frac{1}{2\sqrt{\pi}B_n}+\frac{\Lambda_n}{B_n},\qquad \mathbf{P}(\zeta_{(n)}=j)\geqslant\frac{1}{2\sqrt{\pi}B_n}e^{-\frac{K^2}{4B_n^2}}-\frac{\Lambda_n}{B_n},$$

$$\vartheta_n\leqslant\frac{1}{2\sqrt{\pi}B_n}+\frac{\Lambda_n}{B_n}-\frac{1}{2\sqrt{\pi}B_n}e^{-\frac{K^2}{4B_n^2}}+\frac{\Lambda_n}{B_n}\leqslant\frac{K^2}{2\sqrt{\pi}B_n4B_n^2}+\frac{2\Lambda_n}{B_n},$$

где $K=K_n$ — наибольшее целое число, для которого

$$\frac{K}{B_n}\leqslant\sqrt{\Lambda_n}.$$

С другой стороны,

$$\vartheta_n\geqslant\frac{1}{4\pi}\int_{\pi\geqslant|t|\geqslant\frac{2}{\pi(2K+1)}}\prod_{j=1}^{n}|f(t,\ \xi_j)|^2\,dt,$$

и таким образом:

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\frac{\Lambda_n}{4}+2\Lambda_n\geqslant\vartheta B_n\geqslant\frac{B_n}{4\pi}\int\limits_{\pi\geqslant|t|\geqslant\frac{2}{\pi(2K+1)}}\prod_{j=1}^{n}|f(t,\ \xi_j)|^2\,dt. \qquad (4)$$

Это неравенство позволяет оценивать снизу число слагаемых, необходимое для достижения заданной точности в л. т.

Пусть, например, все $\xi_K$ одинаково распределены, и на отрезке

$$\left[\frac{2}{\pi(2K_n+1)},\ \pi\right]$$

имеется точка $t_0$ локального максимума $|f(t)|^2$, такая, что интервал

$$|t-t_0|\leqslant\frac{1}{\sigma_1}=\frac{|f(t_0)|}{\sigma}$$

лежит целиком внутри указанного отрезка.

Так как

$$|f(t,\ \xi_j)|^2\geqslant|f(t_0)|^2\left(1-\sigma_1^2(t-t_0)^2\right),$$

то

$$\int\limits_{\pi\geqslant|t|\geqslant\frac{2}{\pi(2K_n+1)}}|f(t,\ \xi_1)|^{2n}\,dt\geqslant|f(t_0)|^{2n}\int\limits_{|t-t_0|\leqslant\frac{1}{\sigma_1}}\left(1-\sigma_1^2(t-t_0)^2\right)^n dt=$$

$$=\frac{2}{\sigma_1}\,|f(t_0)|^{2n}\int\limits_0^1(1-z^2)^n\,dz=\frac{2}{\sigma}\,|f(t_0)|^{2n+1}\,2\,\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

По формуле Стирлинга

$$\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\geqslant\sqrt{\pi n}\,e^{-\frac{1}{24n}}.$$

Поэтому

$$\left(\frac{1}{8\sqrt{\pi}}+2\right)\Lambda_n\geqslant\frac{1}{4\pi}\,B_n 2\int\limits_{\pi\geqslant t\geqslant\frac{2}{\pi(2K_n+1)}}|f(t,\ \xi_1)|^{2n}\,dt\geqslant$$

$$\geqslant\frac{2\sigma\sqrt{n}}{4\pi}\,\frac{2}{\sigma}\,|f(t_0)|^{2n+1}\,\frac{2}{2n+1}\,\sqrt{\pi n}\,e^{-\frac{1}{24n}}.$$

Поэтому

$$\left(\frac{1}{8\sqrt{\pi}}+2\right)\Lambda_n\geqslant\frac{1}{4\pi}\,B_n 2\int\limits_{\pi\geqslant t\geqslant\frac{2}{\pi(2K_n+1)}}|f(t,\ \xi_1)|^{2n}\,dt\geqslant$$

$$\geqslant\frac{\sqrt{n}}{\pi}\,|f(t_0)|^{2n+1}\,\frac{2}{2n+1}\,\sqrt{\pi n}\,e^{-\frac{1}{24n}}$$

и

$$\Lambda_n\geqslant\mathrm{const}\,|f(t_0)|^{2n+1}.$$

Подобные оценки имеют смысл при $|f(t_0)|$, близком к единице. Из (4) можно извлечь и другие, более тонкие, полезные оценки.

Автор искренне признателен Юрию Васильевичу Прохорову под руководством, которого написана настоящая заметка.

Тбилиси

Поступило в редакцию
3.I.1967

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Ю. В. Прохоров, Асимптотическое поведение биномиального распределения, Успехи матем. наук, вып. 8, 55, 135—143 (1953).
2. Н. Г. Гамкрелидзе, О скорости сходимости в локальной теореме для решетчатых распределений, Теория вероятн. и ее примен., IX, I (1966).

## APIE VIENĄ KONVERGAVIMO GREIČIO APATINĮ ĮVERTINIMĄ LOKALINĖJE TEOREMOJE

N. GAMKRELIDZĖ

*(Reziumė)*

Darbe nagrinėjama nepriklausomų atsitiktinių dydžių, įgyjančių tik sveikas reikšmes, seka. Gaunama nelygybė, įgalinanti įvertinti iš apačios dėmenų skaičių, reikalingą tam, kad pasiekti norimą tikslumą lokalinėje teoremoje.

## ON THE LOWER ESTIMATION OF THE RATE OF CONVERGENCE IN THE LOCAL THEOREM

N. GAMKRELIDZĖ

*(Summary)*

The sequence of independent random variables taking only integer values is dealt with. The inequality which enables to evaluate the lower bound of the number of tems we need to achieve the exactness we wish in the local theorem is obtained.