LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 3, 1968
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 3, 1968

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛИНЫ ХОРДЫ ОВАЛА И ОВАЛОИДА И ЕЕ СВЯЗЬ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ РАССТОЯНИЯ ВНУТРИ ОВАЛА И ОВАЛОИДА

Э. ГЯЧЯУСКАС

Функция распределения длины хорды овала рассматривалась Зуланке [6]. Был предложен метод ее вычисления через опорную функцию и даны примеры для круга и равностороннего треугольника, полученные прямым подсчетом. Горовиц [4] также прямым подсчетом нашел плотности функции распределения для круга, квадрата и сферы.

Ниже дается новое выражение функции распределения длины хорды овала (овалоида), позволяющее установить связь этой функции с функцией распределения расстояния между двумя точками внутри овала (овалоида).

Отметим, что Зуланке рассматривал II модель, а Горовиц и мы—I модель, определенные Горовицом следующим образом:

I модель. Хорды рассматриваются как лучи через овал (овалоид), исходящие из точек, равномерно распеределенных на контуре овала (поверхности овалоида).

II модель. Хорды рассматриваются как отрезки лучей через овал (овалоид), исходящих из точек равномерно распределенных на контуре окружности (поверхности сферы) бесконечного радиуса, отсекаемые овалом (овалоидом), помещенным в центре этой окружности (сферы). Также, но иным способом – привлекая интегральную геометрию, устанавливается связь между моментами этих функций распределения для II модели.

Теорема 1.

$$F(x)=1-\frac{\Theta(x)}{\pi},$$

где $F(x)$ – функция распределения длины хорды овала, $\Theta(x)$ – среднее значение суммы углов тех секторов круга радиуса x с центром в точке контура овала, которые полностью помещаются в овале.

Доказательство. Пусть l_s – хорда, исходящая из точки s на контуре овала, $d_s=\max l_s$, $\Theta(s, x)$ – сумма углов тех секторов круга радиуса x с центром в точке s контура овала, которые полностью помещаются в овале, $P(\ldots)$ – вероятность.

Имеет место

$$\Theta(s, x)=\pi[P(l_s<d_s)-P(l_s<x)],$$
$$\Theta(s, x)=\pi[1-P(l_s<x)].$$

Принимаем, что все направления хорды и все исходные точки на контуре овала одинаково возможны.

Возьмем среднее значение по всем s

$$\Theta(x)=\underset{s}{E}\,\Theta(s, x)=\pi[1-\underset{s}{E}P(l_s<x)].$$

$\underset{s}{E}P(l_s<x)$ есть не что иное как $F(x)$.

$$\Theta(x)=\pi[1-F(x)], \quad F(x)=1-\frac{\Theta(x)}{\pi}.$$

Теорема доказана.

Пример. Используя выражение $\Theta(x)$, полученное в [2], получаем, что функция распределения длины хорды квадрата со стороной a имеет следующий вид:

$$F(x)=\begin{cases} \frac{2x}{\pi a}, & 0\leqslant x\leqslant a, \\ 2+\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi a}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{4}{\pi}\arcsin\frac{a}{x}, & a\leqslant x\leqslant a\sqrt{2}. \end{cases}$$

Теорема 2.

$$\hat{F}(x)=1-\frac{Q(x)}{2\pi x^2},$$

где $\hat{F}(x)$ – функция распределения длины хорды овалоида, $Q(x)$ – среднее значение площади части, находящейся внутри овалоида, поверхности шара радиуса x с центром на поверхности овалоида.

Доказывается также, как и предыдущая теорема.

Объединив теорему 1 с результатом работы [2], получаем следующее соотношение, связывающее функции $F(x)$ и $P(x)$.

Теорема 3. *Пусть $P(x)$ – функция распределения расстояния между двумя точками внутри овала, тогда*

$$P(x)=\frac{4}{F}[B(x)+C_2],$$

$$B(x)+C_2=\int x[A(x, 1)+C_1(x)]\,dx,$$

$$A(x, \lambda)+C_1(x)=\pi\int\lambda[1-F(x, \lambda)]\,d\lambda,$$

где F – площадь овала, $F(x, \lambda)$ – функция распределения длины хорды овала, подобного данному с коэффициентом подобия λ. $C_1(x)$ определяется из равенства

$$A\left(x, \frac{x}{D}\right)+C_1(x)=0,$$

а C_2 – из равенства $P(D)=1$, где D – наибольшая хорда овала.

Покажем, что между b_k – моментами $P(x)$ – функции распределения расстояния между двумя точками внутри овала и a_k – моментами $F(x)$ – функции распределения длины хорды овала существует связь совершенно простого вида для II модели.

Пользуясь формулами интегральной геометрии [5] можем записать, что

$$a_k=\int_0^D x^k\,dF(x)=\frac{\int\limits_{g\cdot K\neq 0} l^k\,dG}{\int\limits_{g\cdot K\neq 0} dG}=\frac{I_k}{L},$$

$$b_k=\int_0^D x^k\,dP(x)=\frac{\int\limits_{K\times K} r^k\,dP_1\,dP_2}{\int\limits_{K\times K} dP_1\,dP_2}=\frac{J_k}{F^2},$$

где K – овал, L – длина контура овала, F – площадь овала, D – наибольшая хорда овала, dG – плотность множества прямых, $dP_1 dP_2$ – плотность множества пар точек.

Известно [5], что

$$J_k = \frac{2}{(k+2)(k+3)} I_{k+3}.$$

Следовательно,

$$b_k = \frac{2L}{(k+2)(k+3)F^2} a_{k+3}. \tag{1}$$

В случае овалоида, объединив теорему 2 с результатом работы [3], получаем следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть $\hat{P}(x)$ – функция распределения расстояния между двумя точками внутри овалоида, тогда*

$$\hat{P}(x) = \frac{6}{V} [B(x) + C_2],$$

$$B(x) + C_2 = \int [A(x, 1) + C_1(x)]\, dx,$$

$$A(x, \lambda) + C_1(x) = 2\pi x^2 \int \lambda^2 [1 - \hat{F}(x, \lambda)]\, d\lambda,$$

где V – объем овалоида, $\hat{F}(x, \lambda)$ – функция распределения хорды овалоида, подобного данному с коэффициентом подобия λ. $C_1(x)$ определяется из равенства

$$A\left(x, \frac{x}{D}\right) + C_1(x) = 0,$$

а C_2 – из равенства $P(D) = 1$, где D – наибольшая хорда овалоида.

Также покажем, что между $\hat{b}_k$ – моментами $\hat{P}(x)$ – функции распределения расстояния между двумя точками внутри овалоида и $\hat{a}_k$ – моментами $\hat{F}(x)$ – функции распределения длины хорды овалоида имеется связь, аналогичная выражению (1).

Формулы интегральной геометрии [1] позволяют записать, что

$$a_k = \int_0^D x^k\, d\hat{F}(x) = \frac{\int\limits_{g \cdot W \neq 0} l^k\, dG}{\int\limits_{g \cdot W \neq 0} dG} = \frac{\hat{I}_k}{\frac{\pi}{2} S},$$

$$\hat{b}_k = \int_0^D x^k\, d\hat{P}(x) = \frac{\int\limits_{W \times W} r^k\, dP_1\, dP_2}{\int\limits_{W \times W} dP_1\, dP_2} = \frac{\hat{J}_k}{V^2},$$

где W – овалоид, S – площадь поверхности овалоида, V – объем овалоида, D – наибольшая хорда овалоида.

Известно [1], что

$$\hat{J}_k = \frac{2}{(k+3)(k+4)} \hat{I}_{k+4}.$$

Следовательно,

$$\hat{b}_k = \frac{\pi S}{(k+3)(k+4)V^2} a_{k+4}. \tag{2}$$

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
22.II.1967

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Blaschke, Vorlesungen über Integralgeometrie, Berlin, 1955.
2. Э. Гячяускас, Функция распределения расстояния между двумя точками внутри овала, Лит. мат. сб., **VI**, 2, 245—248 (1966).
3. Э. Гячяускас, Распределение расстояния внутри овалоида, Лит. мат. сб., **VII**, 1, 35—36 (1967).
4. M. Horowitz, Probability of random paths across elementary geometrical shapes. J. Appl. Prob., 2, 169—177 (1965).
5. Л. Сантало, Введение в интегральную геометрию, Москва, 1956.
6. R. Sulanke, Die Verteilung der Sehnenlängen an ebenen und räumlichen Figuren. Math. Nachr., B 23, H 1, 51—74 (1961).

OVALO IR OVALOIDO STYGOS ILGIO PASISKIRSTYMO FUNKCIJA IR JOS RYŠYS ATSTUMO PASISKIRSTYMU OVALE IR OVALOIDE

E. GEČIAUSKAS

(Reziumė)

Darbe pateikiamas metodas ovalo ir ovaloido stygos ilgio pasiskirstymo funkcijai surasti (1 ir 2 teoremos). Nustatoma, kad egzistuoja savotiškas ryšys tarp atstumo dviejų ovalo ir ovaloido vidaus taškų pasiskirstymo funkcijos (3 ir 4 teoremos). Suintegralinės geometrijos pagalba randamos priklausomybės tarp šių funkcijų momentų (1 ir 2 formulės). Nagrinėjami du Horovico apibrėžti pasiskirstymo modeliai.

THE DISTRIBUTION FUNCTION OF THE CHORD LENGTH OF OVAL AND OVALOID AND ITS RELATION TO DISTRIBUTION OF A DISTANCE IN AN OVAL AND OVALOID

E. GEČIAUSKAS

(Summary)

The method for finding the distribution function of chord length of oval and ovaloid is given (theorems 1 and 2). The relation of this function to distribution function of a distance between two points in oval and ovaloid is established (theorems 3 and 4). Using formulas of the integral geometry we find relations between the moments of these functions (formulas 1 and 2). Two models of distribution defined by Horowitz are considered.