LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, VII Nr. 3, 1968
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК, VII № 3, 1968

НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

В. П. КАБАЙЛА

1. В настоящей статье рассматриваются уравнения:

$$Af=g \tag{1}$$

и

$$(A_\delta+i\alpha I)f=g_\delta, \tag{2}$$

где A – линейный (ограниченный или неограниченный) самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H, I – единичный оператор, $A_\delta=A+\delta A$, δA – линейный ограниченный самосопряженный оператор в H; $\|\delta A\|\leqslant\delta$ g, $g_\delta\in H$, $\|g-g_\delta\|\leqslant\delta$; δ, $\alpha>0$. Решается задача аппроксимации нормального решения (т. е. решения с наименьшей нормой) уравнения (1) решениями уравнения (2) в случае, когда не существует ограниченного обратного оператора A^{-1} (нулевая точка принадлежит спектру оператора A) и существует хотя бы одно решение уравнения (1). В этом случае решения уравнения (1), вообще, не зависят непрерывно от правой части уравнения и от вариаций самого оператора A, т. е. задача решения уравнения (1) является „некорректной" задачей. Задача решения уравнения (2), очевидно, является „корректной" задачей, так как оператор $(A_\delta+i\alpha I)^{-1}$ существует и ограничен. В статье доказывается, что при δ, $\alpha\to 0$ и $\delta=o(\alpha)$ решения $f_{\delta,\alpha}$ уравнения (2) сходятся к нормальному решению f^* уравнения (1) и, следовательно система элементов $\{f_{\delta,\alpha}\}$ образует, по определению А. Н. Тихонова [1], регуляризованное семейство приближенных решений для уравнения (1). Получены оценки $\|f^*-f_{\delta,\alpha}\|$. В частном случае, когда нулевая точка является изолированной точкой спектра оператора A (например, когда $A=B-\lambda_0 I$, где B – вполне непрерывный самосопряженный оператор, а λ_0 – собственное значение оператора B), оптимальная асимптотическая оценка получается при $\alpha=\sqrt{\delta}$:

$$\|f^*-f_{\delta,\alpha}\|=O(\sqrt{\delta}).$$

На примере показано, что эту оценку нельзя улучшить.

В конце статьи (п.5) рассматривается уравнение

$$Uf=g, \tag{3}$$

где U – линейный (ограниченный или неограниченный, не обязательно самосопряженный) замкнутый оператор с плотной в H областью определения. Доказывается, что если в этом случае не существует ограниченного обратного оператора U^{-1}, но уравнение (3) имеет решение, то нормальные решения уравнения (3) и уравнения

$$U^*Uf=U^*g$$

совпадают и решения $f_{\delta,\alpha}$ уравнения:

$$(U_\delta^* U_\delta + i\alpha I) f = U_\delta^* g \tag{4}$$

(U_δ – линейный оператор в H, $\| U - U_\delta \| \leqslant \delta$, $\| g - g_\delta \| \leqslant \delta$) сходятся к нормальному решению уравнения (3), когда δ, $\alpha \to 0$, $\delta = o(\alpha)$. Оценки скорости сходимости получаются из рассмотренного ранее случая уравнения с самосопряженным оператором A, если положить $A = U^* U$.

Следует отметить, что приближения решений уравнений, аналогичных уравнению (1), решениями уравнений, близких к уравнению (2), рассматривались и другими авторами. Различные способы исследования, решения и применения некорректных задач описаны в [1 – 9]. Обзор работ по некорректным задачам можно найти в [6] и [7].

2. Общие понятия и термины функционального анализа в дальнейшем изложении употребляются в том смысле, как они определены в [10]. В доказательствах автор пользуется некоторыми хорошо известными свойствами линейных (ограниченных или неограниченных) операторов в гильбертовом пространстве H. Перечислим некоторые из них.

а) Любой линейный самосопряженный оператор A допускает представление в виде:

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d E_\lambda,$$

где $\{E_\lambda\}$ – спектральное семейство проекционных операторов, определяемое оператором A. Спектральное семейство $\{E_\lambda\}$ обладает свойствами: 1) $E_\lambda \leqslant E_\mu$ при $\lambda < \mu$, 2) $E_{\lambda+0} = E_\lambda$ (в смысле сильной сходимости, т. е. сходимости в каждой точке), 3) $E_\lambda \to 0$, когда $\lambda \to -\infty$ и $E_\lambda \to I$, когда $\lambda \to +\infty$ (в смысле сильной сходимости).

б) Если для некоторой функции $u(\lambda)$ и некоторого $f \in H$ сходится интеграл Лебега-Стильтьеса:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda) d(E_\lambda f, g)$$

для всех $g \in H$, то значения $u(A) f$ линейного оператора $u(A)$ определяются равенствами:

$$\left(u(A) f, g\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda) d(E_\lambda f, g).$$

Кроме того,

$$\| u(A) f \|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |u(\lambda)|^2 d(E_\lambda f, f).$$

В частности:

$$A - z I)^{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda - z} dE_\lambda,$$

если только одна из частей равенства имеет смысл.

$$\|(A - z I)^{-1}\| = \frac{1}{\rho\left(z, \sigma(A)\right)},$$

где $\rho\left(z, \sigma(A)\right)$ означает расстояние от точки z до спектра оператора A.

в) Если отрезок $[\lambda_1, \lambda_2]$ не содержит точек спектра $\sigma(A)$, то $E_{\lambda_1}=E_{\lambda_2}$ и следовательно:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda)\,d(E_\lambda f, g)=\int_{\sigma(A)} u(\lambda)\,d(E_\lambda f, g).$$

г) Если $E_{\lambda_0}\neq E_{\lambda_0-0}$, то λ_0 – собственное значение оператора A и проекционный оператор $E(\lambda_0)=E_{\lambda_0}-E_{\lambda_0-0}$ проектирует пространство H в подпространство $H(\lambda_0)$, образуемое всеми собственными элементами, соответствующими собственному значению λ_0. Это можно доказать так: если $f_0\in(E_{\lambda_0}-E_{\lambda_0-0})(H)$, то для любого $\varepsilon>0$ $f_0\in(E_{\lambda_0}-E_{\lambda_0-\varepsilon})(H)$ и потому

$$\|(A-\lambda_0 I)f_0\|^2=\int_{-\infty}^{+\infty}|\lambda-\lambda_0|^2\,d(E_\lambda f_0, f_0)=\int_{\lambda_0-\varepsilon}^{\lambda_0}|\lambda-\lambda_0|^2\,d(E_\lambda f_0, f_0)\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon^2\int_{\lambda_0-\varepsilon}^{\lambda_0}d(E_\lambda f_0, f_0)=\varepsilon^2\int_{-\infty}^{+\infty}d(E_\lambda f_0, f_0)=\varepsilon^2\|f_0\|^2;$$

при $\varepsilon\to 0$ получается:

$$\|(A-\lambda_0 I)f_0\|=0,\quad \text{т. е.}\quad Af_0=\lambda_0 f_0.$$

И наоборот, если $Af_0=\lambda_0 f_0$, то

$$0=\|(A-\lambda_0 I)f_0\|^2\geqslant\int_{-\infty}^{\lambda_0-\varepsilon}|\lambda-\lambda_0|^2\,d(E_\lambda f_0, f_0)+\int_{\lambda_0+\varepsilon}^{+\infty}|\lambda-\lambda_0|^2\,d(E_\lambda f_0, f_0)\geqslant$$

$$\geqslant\varepsilon^2\left\{\int_{-\infty}^{\lambda_0-\varepsilon}d(E_\lambda f_0, f_0)+\int_{\lambda_0+\varepsilon}^{+\infty}d(E_\lambda f_0, f_0)\right\}=\varepsilon^2\Big((E_{\lambda_0-\varepsilon}+I-E_{\lambda_0-\varepsilon})f_0, f_0\Big)\geqslant 0,$$

следовательно, $\Big(I-(E_{\lambda_0+\varepsilon}-E_{\lambda_0-\varepsilon})\Big)f_0=0$, т. е. $(E_{\lambda_0+\varepsilon}-E_{\lambda_0-\varepsilon})f_0=f_0$. При $\varepsilon\to 0$ получается: $(E_{\lambda_0}-E_{\lambda_0-0})f_0=f_0$, т. е. $f_0\in E(\lambda_0)(H)$.

д) Самосопряженный оператор замкнут.

3. Рассмотрим уравнение $Af=g$, где A – линейный самосопряженный оператор в H, в случае, когда не существует ограниченного обратного оператора A^{-1} (т. е. когда нулевая точка принадлежит спектру оператора A), но существует одно или несколько решений уравнения (1). В этом случае решения однородного уравнения $Ah=0$ образуют линейное и замкнутое множество H' – подпространство пространства H (замкнутость H' следует из замкнутости самосопряженного оператора A).

Пусть f_0 – одно из решений уравнения $Af=g$. Ортогонально разлагая его получаем: $f_0=h_0+f^*$, где $h_0\in H'$, $f^*\perp H'$. Очевидно, что f^* – решение уравнения $Af=g$ и общее решение этого уравнения будет $f=h+f^*$, где h – произвольное решение однородного уравнения. Так как

$$\|f\|^2=\|h\|^2+\|f^*\|^2\geqslant\|f^*\|^2,$$

то f^* является решением уравнения $Af=g$ с наименьшей нормой. Следовательно, нормальное решение f^* уравнения $Af=g$ единственно и ортогонально всем решениям однородного уравнения $Ah=0$.

4. Рассмотрим уравнения

$$Af=g \tag{1}$$

и

$$(A_\delta+i\alpha I)f=g_\delta \tag{2}$$

(обозначения объяснены в п. 1 настоящей статьи). Так как все точки спектра самосопряженного оператора действительны, то существуют ограниченные резольвентные операторы $(A_\delta+i\alpha I)^{-1}$ и $(A+i\alpha I)^{-1}$. Следовательно, уравнение (2) имеет единственное решение $f_{\delta,\alpha}$. Подставим решение $f_{\delta,\alpha}$ в (2) и изменим обозначения:

$$A_\delta=A+\delta A, \quad g_\delta=g+\delta g.$$

Тогда:

$$(A+i\alpha I)f_{\delta,\alpha}=g+\delta g-\delta A f_{\delta,\alpha} \tag{5}$$

и

$$f_{\delta,\alpha}=(A+i\alpha I)^{-1}(g+\delta g-\delta A f_{\delta,\alpha}). \tag{6}$$

Аналогично, подставляя нормальное решение f^* уравнения (1) в это уравнение и прибавляя к обеим частям полученного равенства $i\alpha f^*$, получим:

$$(A+i\alpha I)f^*=g+i\alpha f^* \tag{7}$$

и

$$f^*=(A+i\alpha I)^{-1}(g+i\alpha f^*). \tag{8}$$

Отнимая (8) из (6) получим:

$$f_{\delta,\alpha}-f^*=(A+i\alpha I)^{-1}(\delta g-\delta A f_{\delta,\alpha})-i\alpha(A+i\alpha I)^{-1}f^* \tag{9}$$

и

$$\|f_{\delta,\alpha}-f^*\|\leqslant\|(A+i\alpha I)^{-1}\|\cdot\|\delta g-\delta A f_{\delta,\alpha}\|+\alpha\|(A+i\alpha I)^{-1}f^*\|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\delta}{\alpha}(1+\|f_{\delta,\alpha}\|)+\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha^2}{\lambda^2+\alpha^2}\,d(E_\lambda f^*, f^*)\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{10}$$

Оценим интеграл в правой части неравенства (10). Для любого положительного β справедливы неравенства:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha^2}{\lambda^2+\alpha^2}\,d(E_\lambda f^*, f^*)=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{-\beta}\frac{\alpha^2}{\lambda^2+\alpha^2}\,d(E_\lambda f^*, f^*)+\int\limits_{+\beta}^{+\infty}\frac{\alpha^2}{\lambda^2+\alpha^2}\,d(E_\lambda f^*, f^*)+\int\limits_{-\beta}^{+\beta}\frac{\alpha^2}{\lambda^2+\alpha^2}\,d(E_\lambda f^*, f^*)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\alpha^2}{\beta^2+\alpha^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d(E_\lambda f^*, f^*)+\int\limits_{-\beta}^{+\beta}d(E_\lambda f^*, f^*)=$$

$$=\frac{\alpha^2}{\beta^2+\alpha^2}\|f^*\|^2+\Big((E_\beta-E_{-\beta})f^*, f^*\Big)\leqslant\frac{\alpha^2}{\beta^2}\|f^*\|^2+\Big((E_\beta-E_{-\beta})f^*, f^*\Big). \tag{11}$$

Обозначив

$$\gamma=\gamma(\beta)=\sqrt{\Big((E_\beta-E_{-\beta})f^*, f^*\Big)}, \tag{12}$$

из (10) и (11) получаем:

$$\|f_{\delta,\alpha}-f^*\|\leqslant\frac{\delta}{\alpha}(\|f_{\delta,\alpha}\|+1)+\frac{\alpha}{\beta}\|f^*\|+\gamma. \tag{13}$$

Отсюда, используя неравенство $\|f_{\delta,\alpha}\|\leqslant\|f_{\delta,\alpha}-f^*\|+\|f^*\|$, для $\delta<\alpha$ получаем:

$$\|f_{\delta,\alpha}-f^*\|\leqslant\frac{1}{1-\frac{\delta}{\alpha}}\left[\frac{\delta}{\alpha}(\|f^*\|+1)+\frac{\alpha}{\beta}\|f^*\|+\gamma\right]. \tag{14}$$

Для оценки скалярного произведения $\gamma^2=\Big((E_\beta-E_{-\beta})f^*, f^*\Big)$ рассмотрим некоторые частные случаи.

Случай 1: нулевая точка является изолированной точкой спектра оператора A, т. е. принадлежит точечному спектру и не принадлежит непрерывному спектру. В этом случае нулевая точка — собственное значение оператора A и уравнение (1) имеет различные решения. Нормальное решение f^*, как было указано в п. 3, ортогонально ко всем решениям однородного уравнения $Ah=0$, т. е. ко всем собственным элементам оператора A, соответствующим нулевому собственному значению.

Пусть ρ — расстояние нулевой точки от остальной части спектра оператора A и $0<\beta<\rho$. Тогда:

$$\gamma^2=\Big((E_\beta-E_{-\beta})f^*,\ f^*\Big)=\Big((E_0-E_{-0})f^*,\ f^*\Big)=0,$$

так как проекционный оператор E_0-E_{-0} проектирует пространство H в подпространство $H'=\{f: Af=0\}$, а $f^*\perp H'$. Из неравенств (13) и (14) в этом случае получается:

$$\|f_{\delta,\alpha}-f^*\|\leqslant\frac{1}{1-\frac{\delta}{\alpha}}\left[\frac{\delta}{\alpha}\left(\|f^*\|+1\right)+\frac{\alpha}{\rho}\|f^*\|\right],\ \text{если}\ \delta<\alpha, \tag{15}$$

и

$$\|f_{\delta,\alpha}-f^*\|\leqslant\frac{\rho}{\rho-\alpha}\left[\frac{\delta}{\alpha}\left(\|f_{\delta,\alpha}\|+1\right)+\frac{\alpha}{\rho}\|f_{\delta,\alpha}\|\right],\ \text{если}\ \alpha<\rho. \tag{16}$$

Если α, $\delta\to 0$ и $\delta=0(\alpha)$, то из (15) следует:

$$\|f_{\delta,\alpha}-f^*\|=O\left(\frac{\delta}{\alpha}+\alpha\right).$$

Очевидно, оптимальная асимптотическая оценка получается когда $\alpha=\sqrt{\delta}$:

$$\|f_{\delta,\sqrt{\delta}}-f^*\|=O(\sqrt{\delta}). \tag{18}$$

Заметим, что легко построить пример, из которого будет видно, что асимптотическую оценку (18) улучшить нельзя. Действительно, если, например, в двухмерном гильбертовом пространстве операторы A, A_δ и элементы f, g, g_δ определить матрицами:

$$A=A_\delta=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\quad f=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\quad g=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad g_\delta=\begin{pmatrix}1+\dfrac{\delta}{\sqrt{2}}\\1-\dfrac{\delta}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

то нормальное решение f^* уравнения $Af=g$ и решение $f_{\delta,\sqrt{\delta}}$ уравнения $(A_\delta+i\sqrt{\delta}I)f=g_\delta$, как легко проверить, при $\delta\to 0$ будут удовлетворять неравенствам:

$$\|f_{\delta,\sqrt{\delta}}-f^*\|\geqslant C\cdot\sqrt{\delta},$$

где C — некоторая положительная константа.

Случай 2: нулевая точка принадлежит непрерывному спектру оператора A и не принадлежит точечному спектру оператора A, т. е. нулевая точка не является собственным числом. В этом случае спектральное семейство $\{E_\lambda\}$ непрерывно в точке $\lambda=0$ и, следовательно, $E_0-E_{-0}=0$ (в смысле сильной сходимости). Оценим правую часть неравенства (14) асимптотически при $\delta\to 0$. Выбираем $\alpha=\alpha(\delta)$ и $\beta=\beta(\alpha)$ так, чтобы было $\delta=o(\alpha)$, $\alpha=o(\beta)$, $\beta=o(1)$. Тогда все члены в правой части неравенства (14) стремятся к нулю и $\|f_{\delta,\alpha}-f^*\|\to 0$ при δ, $\alpha\to 0$ и $\delta=o(\alpha)$.

В **общем случае**, когда нулевая точка — произвольная точка спектра $\sigma(A)$, скалярное произведение $\gamma^2=\left((E_\beta-E_{-\beta})f^*,\ f^*\right)$ можно разложить на сумму:

$$\left((E_\beta-E_{-\beta})f^*,\ f^*\right)=$$
$$=\left((E_\beta-E_0)f^*,\ f^*\right)+\left((E_0-E_{-0})f^*,\ f^*\right)+\left((E_{-0}-E_{-\beta})f^*,\ f^*\right)=$$
$$=\left((E_\beta-E_0)f^*,\ f^*\right)+\left((E_{-0}-E_{-\beta})f^*,\ f^*\right), \tag{19}$$

так как $f^*\perp(E_0-E_{-0})(H)$. При $\delta\to 0$, выбирая, как и в случае 2, $\alpha=\alpha(\delta)$ и $\beta=\beta(\alpha)$ так, чтобы было $\delta=o(\alpha)$, $\alpha=o(\beta)$ и $\beta=o(1)$, получим, что правая часть равенства (19) и, следовательно, правая часть неравенства (14) будет сходиться к нулю.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема. *Пусть A — линейный (ограниченный или неограниченный) самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H и пусть не существует ограниченного обратного оператора A^{-1}. Если уравнение*

$$Af=g \tag{1}$$

при некотором $g\in H$ имеет хотя бы одно решение и f^* — нормальное решение этого уравнения, то решение $f_{\delta,\alpha}$ уравнения

$$(A_\delta+i\alpha I)f=g_\delta, \tag{2}$$

где δ, $\alpha>0$, $A_\delta=A+\delta A$, δA — ограниченный самосопряженный оператор, $\|\delta A\|\leqslant\delta$, $g_\delta\in H$, $\|g_\delta-g\|\leqslant\delta$, при δ, $\alpha\to 0$ и $\delta=o(\alpha)$ сходится к нормальному решению f^* уравнения (1) и норма $\|f_{\delta,\alpha}-f^*\|$ оценивается неравенством (14). В частном случае, когда нулевая точка является изолированной точкой спектра оператора A, оптимальная (относительно δ) асимптотическая оценка нормы $\|f_{\delta,\alpha}-f^*\|$ при $\delta\to 0$ получается при $\alpha=\sqrt{\delta}$:

$$\|f_{\delta,\sqrt{\delta}}-f^*\|=O(\sqrt{\delta}); \tag{18}$$

оценка (18) — точная в том смысле, что существует пример уравнений вида (1) и (2), решения которых, при достаточно малых δ удовлетворяют неравенствам:

$$C_1\sqrt{\delta}\leqslant\|f_{\delta,\sqrt{\delta}}-f^*\|\leqslant C_2\sqrt{\delta},$$

где C_1 и C_2 — некоторые положительные константы; кроме того, если ρ — расстояние нулевой точки от остальной части спектра оператора A и $0<\alpha<\rho$, то

$$\|f_{\delta,\alpha}-f^*\|\leqslant\frac{\rho}{\rho-\alpha}\left[\frac{\delta}{\alpha}\left(\|f_{\delta,\alpha}\|+1\right)+\frac{\alpha}{\rho}\|f_{\delta,\alpha}\|\right]. \tag{16}$$

Замечание 1. Если $A=B-\lambda_0 I$, где B — вполне непрерывный самосопряженный оператор и $\lambda_0\,(\lambda_0\neq 0)$ — собственное значение оператора B, то, очевидно, нулевая точка является изолированной точкой спектра оператора A и справедливы оценки (16) и (18).

Замечание 2. Для доказательства теоремы не существенно, что при составлении „приближенного" уравнения (2) к оператору A_δ добавляется оператор $i\alpha I$ с чисто мнимым множителем $i\alpha$. Вместо уравнения (2) можно было брать уравнение

$$(A_\delta+zI)f=g_\delta,$$

где z — действительное или комплексное число, не принадлежащее спектру оператора A.

Замечание 3. Для доказательства теоремы не существенно и то, что в равенстве $A_\delta = A + \delta A$ оператор δA — самосопряженный. Достаточно было бы требовать его ограниченности: $\| \delta A \| \leqslant \delta$.

5. Пусть U — линейный (ограниченный или неограниченный) замкнутый оператор в гильбертовом пространстве H с областью определения плотной в H и пусть g принадлежит области определения оператора U^*. Рассмотрим уравнение

$$Uf = g \tag{3}$$

в случае, когда не существует ограниченного обратного оператора U^{-1}, но уравнение (3) имеет хотя бы одно решение. В этом случае, очевидно, элемент g ортогонален любому решению h однородного сопряженного уравнения $U^* h = 0$, так как

$$(g,\ h) = (Uf,\ h) = (f,\ U^* h) = (f,\ 0) = 0.$$

Кроме того, множество H_1 решений уравнения $Uf = 0$ — линейно и замкнуто (замкнутость следует из замкнутости оператора U), т. е. является подпространством пространства H. Аналогично множество H_1^* решений однородного сопряженного уравнения является подпространством пространства H. Из таких же рассуждений, как в п. 3 настоящей статьи, следует, что среди решений уравнения (3) найдется единственное решение с наименьшей нормой — нормальное решение f^*, которое ортогонально всем решениям однородного уравнения $Uf = 0$.

Рассмотрим уравнение:

$$U^* Uf = U^* g. \tag{20}$$

Очевидно, каждое решение уравнения (3) является решением и уравнения (20), потому нормальное решение $\tilde{f}$ уравнения (20) по норме не превышает нормального решения f^* уравнения (3):

$$\|\tilde{f}\| \leqslant \|f^*\|. \tag{21}$$

Докажем, что *нормальные решения уравнений* (3) *и* (20) *совпадают, т. е.* $\tilde{f} = f^*$.

Для доказательства введем обозначение:

$$U\tilde{f} = \tilde{g}. \tag{22}$$

Подставляя $\tilde{f}$ в уравнение (20), получаем:

$$U^* (\tilde{g} - g) = 0,$$

т. е. элемент $\tilde{g} - g$ принадлежит подпространству $H_1^* = \{h : U^* h = 0\}$. Но $g \perp H_1^*$, а из равенства (22) следует, что $\tilde{g} \perp H_1^*$, потому $\tilde{g} - g \perp H_1^*$. Следовательно, $\tilde{g} = g$ и в равенстве (22) вместо $\tilde{g}$ можно писать g: $U\tilde{f} = g$. Но это равенство показывает, что $\tilde{f}$ является решением уравнения (3) и потому

$$\|f^*\| \leqslant \|\tilde{f}\|. \tag{23}$$

Из (21) и (23) следует равенство $\|f^*\| = \|\tilde{f}\|$, а из единственности нормального решения — равенство $f^* = \tilde{f}$. Утверждение доказано.

Так как оператор $U^* U$ — самосопряженный, то решения $f_{\delta,\alpha}$ уравнений:

$$(U_\delta^* U_\delta + i\alpha I) f = U_\delta^* g_\delta,$$

где δ, $\alpha>0$, $\|U_\delta-U\|\leqslant\delta$, $\|g_\delta-g\|\leqslant\delta$, по доказанной в п. 4 теореме, будут сходиться при δ, $\alpha\to 0$ и $\delta=o(\alpha)$ к нормальному решению $\tilde{f}$ уравнения (20) и, вследствие равенства $\tilde{f}=f^*$, к нормальному решению f^* уравнения (3). Оценки быстроты сходимости указаны в теореме (п. 4). В частном случае, когда точка $z=0$ – изолированная точка спектра оператора U и $\alpha=\sqrt{\delta}$, справедлива оценка: $\|f_{\delta,\sqrt{\delta}}-f^*\|=O(\sqrt{\delta})$.

Вильнюсский Государственный университет
им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
7.II.1967

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Тихонов, О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризаций, Докл. АН СССР, **151**, № 3, 501—504 (1963).
2. А. Н. Тихонов, О регуляризации некорректно поставленных задач, Докл. АН СССР, **153**, № 1, 49—52 (1963).
3. А. Н. Тихонов, О решении нелинейных интегральных уравнений первого рода, Докл. АН СССР, **156**, № 6, 1296—1299 (1964).
4. А. Н. Тихонов, Об устойчивости алгоритмов для решения вырожденных систем линейных алгебраических уравнений, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **5**, № 4, 718—722 (1965).
5. В. К. Иванов, О некорректно поставленных задачах, Мат. сб., **61**, № 2, 211—223 (1963).
6. М. М. Лаврентьев, О некоторых некорректных задачах математической физики, Новосибирск, Сиб. отд. АН СССР, 1962.
7. М. М. Лаврентьев, О постановке некоторых некорректных задач математической физики, Сборник «Некоторые вопросы вычисл. и прикл. матем., Новосибирск, «Наука», 258—276 1966.
8. В. Н. Судаков, Л. А. Халфин, Статистический подход к корректности задач математической физики, Докл. АН СССР, **157**, № 5, 1058—1060 (1964).
9. Б. Жюбрите, О некорректных задачах теории дифференциальных уравнений, Тезисы докл. XIX научн. студ. конф., матем., физ., хим., Вильнюс, Вильнюсский Гос. Ун-т, 1966.
10. Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь, Лекции по функциональному анализу, Москва, 1954.

NEKOREKTIŠKI UŽDAVINIAI HILBERTO ERDVĖJE TIESINĖMS LYGTIMS SU NEAPRĖŽTAIS TIESINIAIS OPERATORIAIS

V. KABAILA

(Reziumė)

Straipsnyje nagrinėjamos lygtys:

$$Af=g \tag{1}$$

ir

$$A_\delta f+i\alpha f=g_\delta, \tag{2}$$

kur A — sausujungtinis tiesinis (aprėžtas arba neaprėžtas) operatorius Hilberto erdvėje H, $A_\delta=A+\delta A$, δA — aprėžtas sausujungtinis operatorius erdvėje H, $\|\delta A\|\leqslant\delta$; g, $g_\delta\in H$, $\|g-g_\delta\|\leqslant\delta$; δ, $\alpha>0$. Įrodoma, kad (2) lygties sprendiniai $f_{\delta,\alpha}$ konverguoja į normalinį (1) lygties sprendinį f^* (t. y. į sprendinį su mažiausia norma), kai δ, $\alpha\to 0$

ir $\delta = o\ (\alpha)$ ir kai (1) lygtis turi bent vieną sprendinį. Gauti dydžio $\|f^* - f_{\delta, \alpha}\|$ įvertinimai. Atskiru atveju, kai nulis yra izoliuotas operatoriaus A spektro taškas, optimalus asimptotinis įvertinimas gaunamas, pasirenkant $\alpha = \sqrt{\delta}$:

$$\|f^* - f_{\delta, \sqrt{\delta}}\| = O(\sqrt{\delta}).$$

Analogiški rezultatai gauti ir tuo atveju, kai A — bet koks uždaras (ne sausujungtinis) tiesinis operatorius su tiršta erdvėje H apibrėžtumo sritimi, tik vietoj (2) lygties sprendinių reikia imti lygties

$$A_\delta^* A_\delta f + i\alpha f = A_\delta^* g_\delta$$

sprendinius.

NICHT KORREKTE AUFGABEN IN DEM HILBERTSCHEN RAUME FÜR LINEARE GLEICHUNGEN MIT NICHT BESCHRÄNKTEN LINEAREN OPERATOREN

V. KABAILA

(Zusammenfassung)

In der Arbeit untersucht man die Gleichungen:

$$Uf = g \tag{3}$$

und

$$U_\delta^* U_\delta f + i\alpha f = U^* g_\delta, \tag{4}$$

wo U, U_δ — lineare (beschränkte oder nicht beschränkte) Operatoren in dem Hilbertschen Raum H sind $\|U_\delta - U\| \leq \delta$; g, $g_\delta \in H$, $\|g_\delta - g\| \leq \delta$; $\delta > 0$, $\alpha > 0$. Der Autor beweist, dass die Lösung $f_{\delta, \alpha}$ der Gleichung (4) zu der normalen Lösung (d. h. zu der Lösung mit der minimalen Norm) der Gleichung (3) konvergiert, wenn α, $\delta \to o$, $\delta = o(\alpha)$ und die Gleichung (3) eine oder mehrere Lösungen hat. Wenn der Punkt $z=0$ ein isolierter Punkt des Spektrums des Operators U ist und $\alpha = \sqrt{\delta}$ ist, dann ist

$$\|f_{\delta, \sqrt{\delta}} - f^*\| = O(\sqrt{\delta}).$$